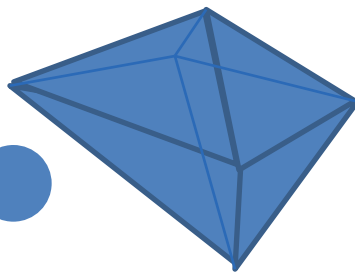
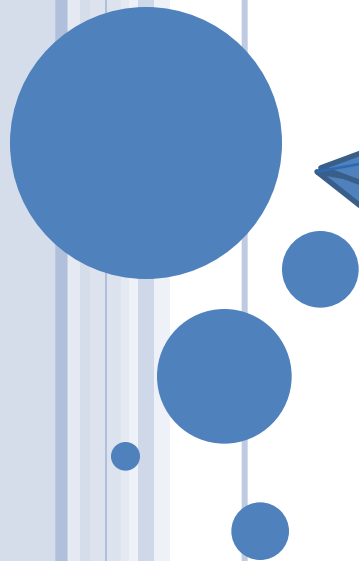
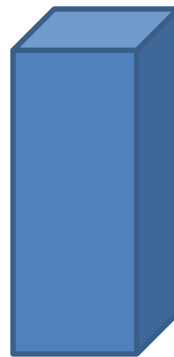


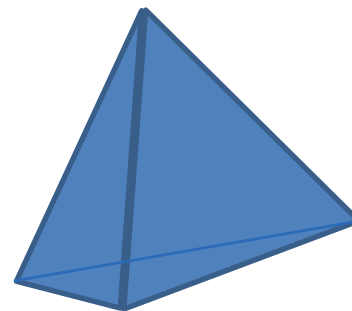
*Многогранник — это поверхность,
составленная из многоугольников и
ограничивающая геометрическое тело. Это
тело также называют многогранником.*



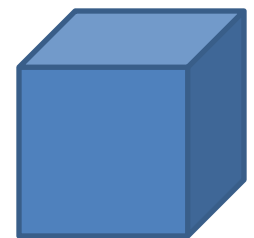
Октаэдр



Прямоугольный
параллелепипед



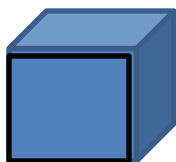
Тетраэдр



Куб

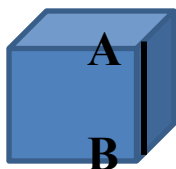
МНОГОГРАННИКИ

- Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются **гранями**.



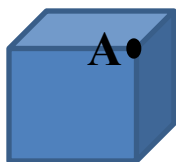
Гранью куба является квадрат

- Стороны граней называются **рёбрами**.



АВ является ребром куба

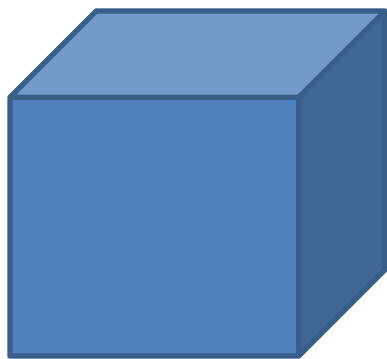
- А концы рёбер называют **вершинами** многоугольника.



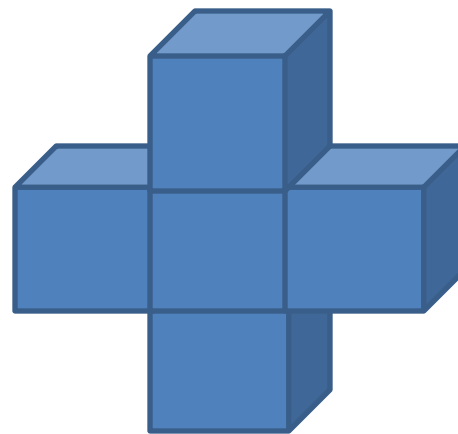
А является вершиной куба



*МНОГОГРАННИКИ БЫВАЮТ **ВЫПУКЛЫМИ** И **НЕВЫПУКЛЫМИ**. ВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК РАСПОЛОЖЕН ПО ОДНУ СТОРОНУ ОТ ПЛОСКОСТИ КАЖДОЙ СВОЕЙ ГРАНИ. НЕВЫПУКЛЫЙ МНОГОГРАННИК РАСПОЛОЖЕН ПО РАЗНЫЕ СТОРОНЫ ОТ ОДНОЙ ИЗ ПЛОСКОСТИ.*



Выпуклый
многогранник



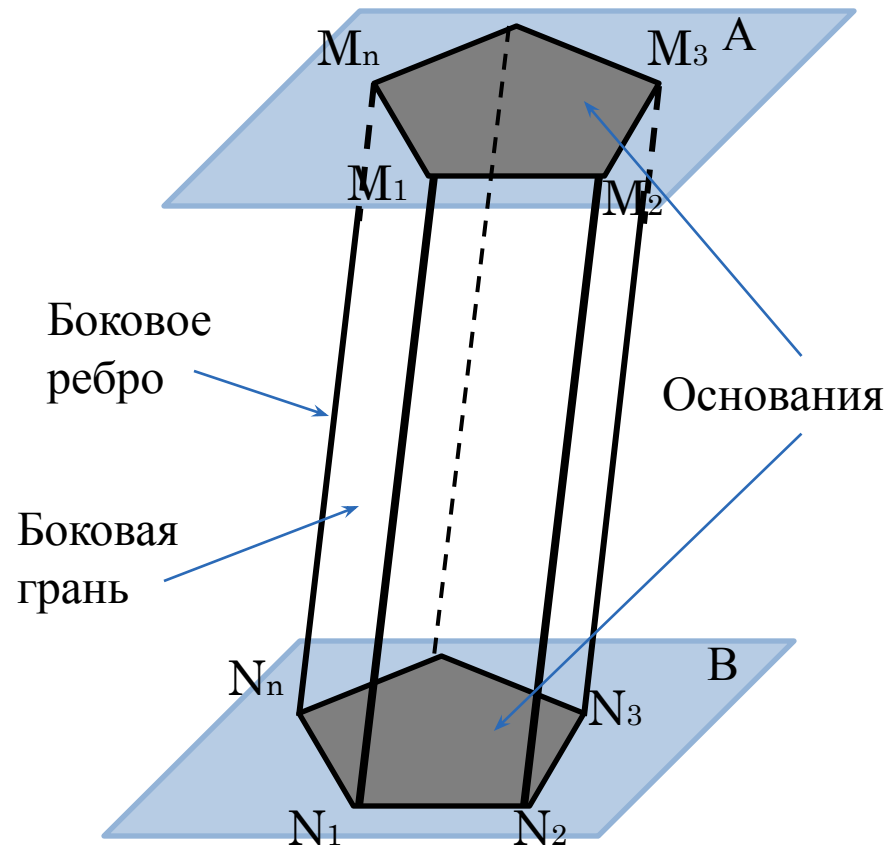
Невыпуклый
многогранник



ПРИЗМА

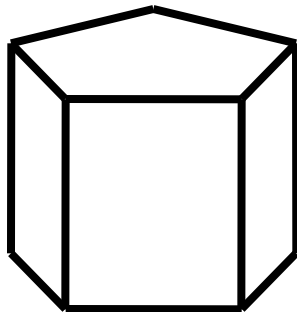
Призмой называется многогранник, у которого две грани (основания) лежат в параллельных плоскостях, а все ребра вне этих граней параллельны между собой.

***n*-угольной призмой** называется многогранник $M_1M_2...M_n N_1N_2...N_n$, составленный из двух равных *n*-угольников $M_1M_2...M_n$ и $N_1N_2...N_n$ - **оснований** призмы и *n* параллелограммов $M_1M_2N_1N_2, ..., M_nM_1N_1N_n$ - **боковых граней** призмы.

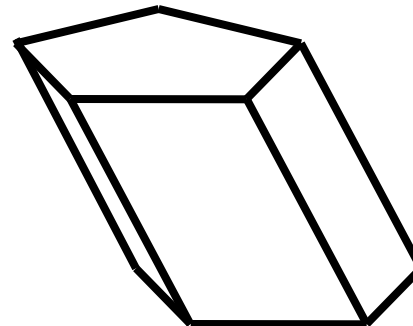


- ▣ Призмы бывают прямыми и наклонными.

*Если все боковые рёбра призмы перпендикулярны к плоскостям её оснований, то призма называется **прямой**; в противном случае призма называется **наклонной**.*



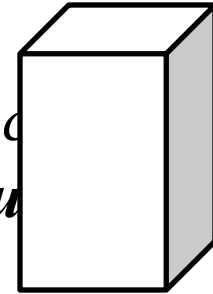
Прямая призма



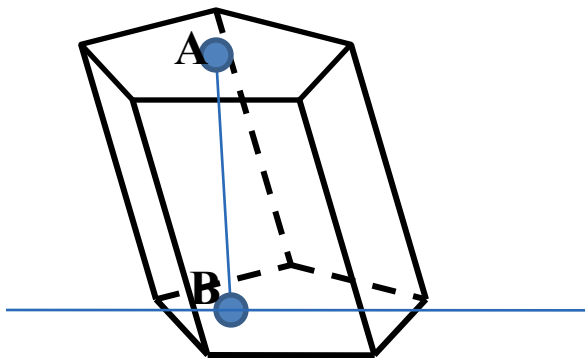
Наклонная призма



- Прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники, называется **правильной**



- **Высота призмы** – это такой отрезок который перпендикулярен плоскостям и пересекает основания призмы.

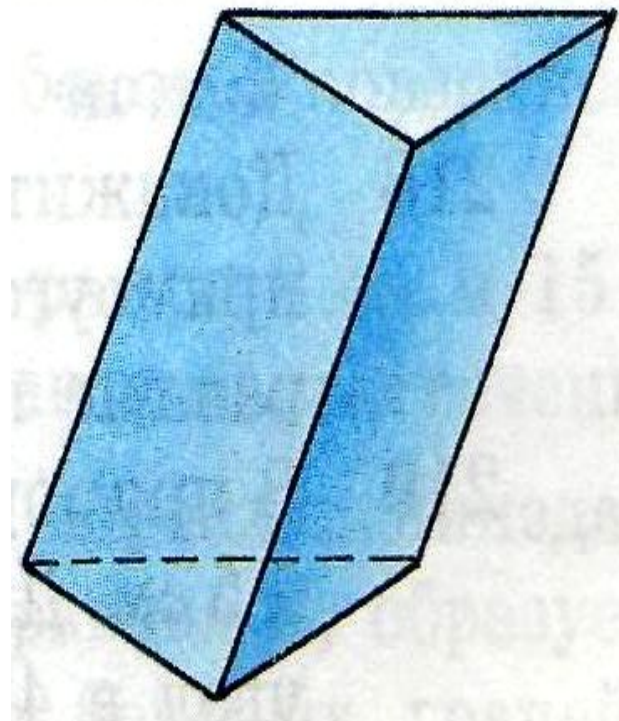


AB – высота.



Площадь полной поверхности призмы

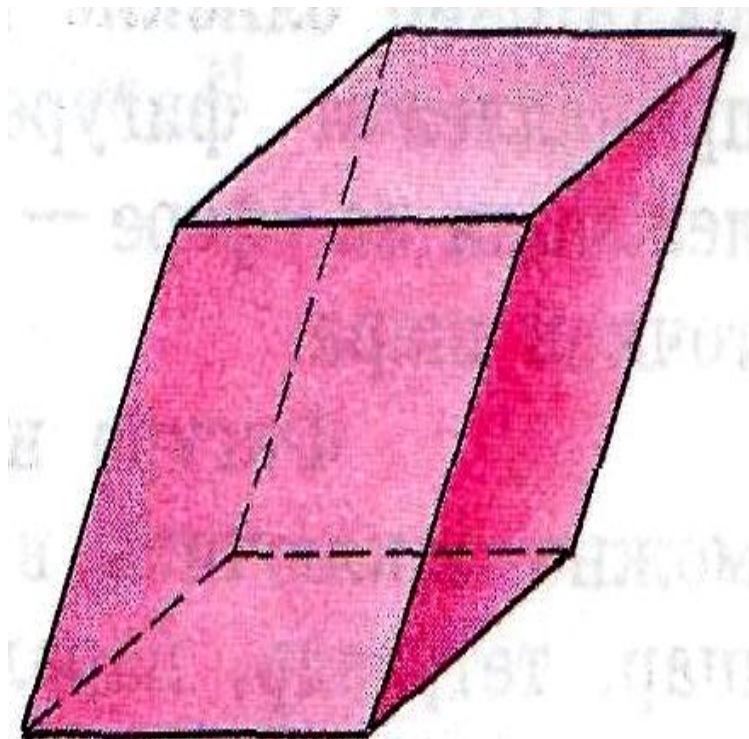
$$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}.$$



Площадь боковой поверхности призмы

ТЕОРЕМА:

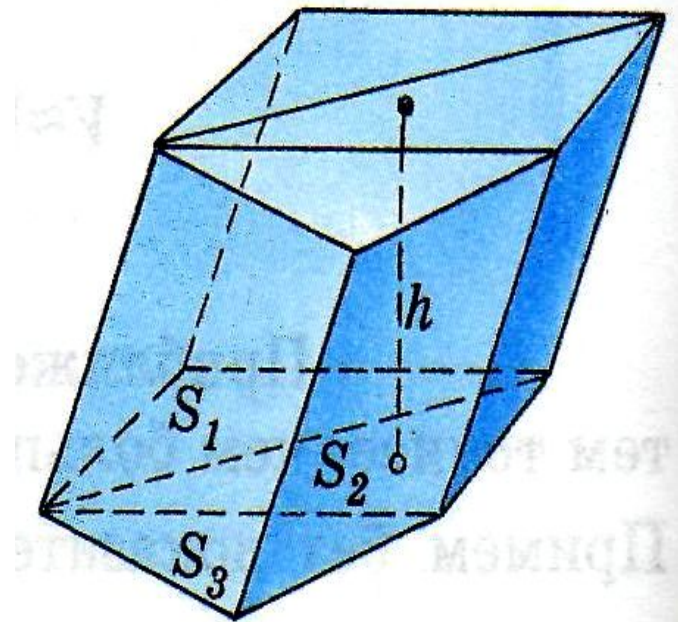
Площадь боковой поверхности *прямой призмы* равна половине произведения периметра основания на высоту призмы.



ОБЪЕМ НАКЛОННОЙ ПРИЗМЫ

ТЕОРЕМА:

**Объем наклонной
призмы равен
произведению площади
основания на высоту.**

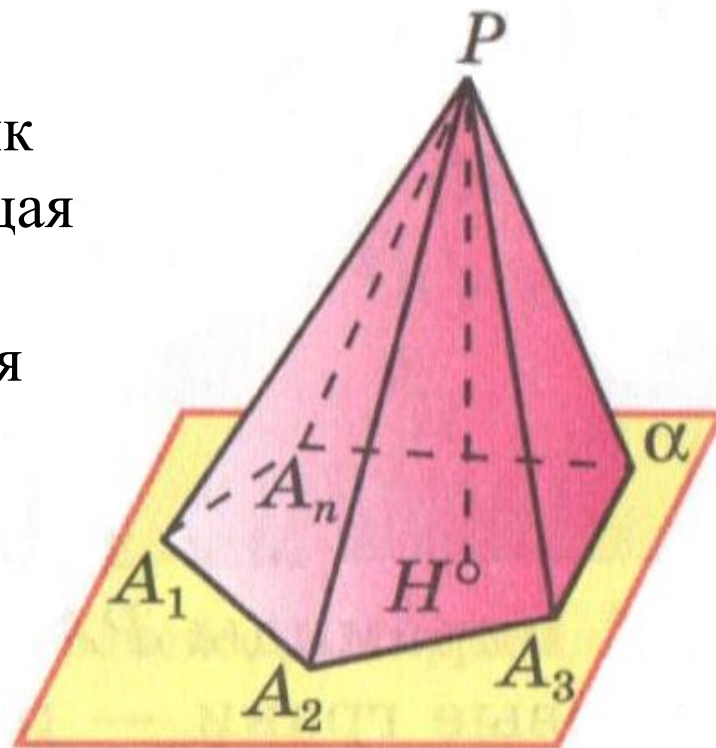


$$V = (S_1 + S_2 + S_3) h = S h$$



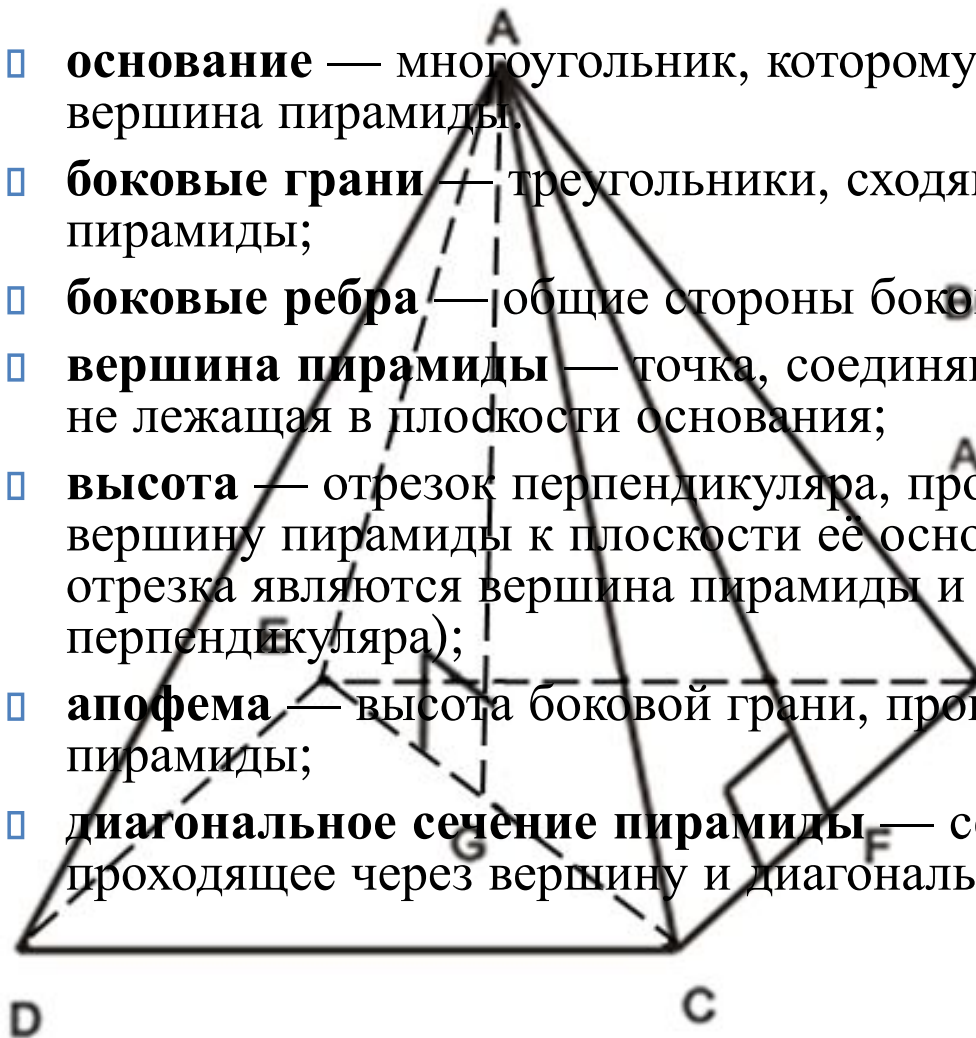
ОПРЕДЕЛЕНИЕ

- Пирамида — это многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ и точка P , не лежащая в плоскости этого многоугольника и соединенная отрезками с вершинами многоугольника.



ЭЛЕМЕНТЫ ПИРАМИДЫ

- **основание** — многоугольник, которому не принадлежит вершина пирамиды;
- **боковые грани** — треугольники, сходящиеся в вершине пирамиды;
- **боковые ребра** — общие стороны боковых граней;
- **вершина пирамиды** — точка, соединяющая боковые ребра и не лежащая в плоскости основания;
- **высота** — отрезок перпендикуляра, проведённого через вершину пирамиды к плоскости её основания (концами этого отрезка являются вершина пирамиды и основание перпендикуляра);
- **апофема** — высота боковой грани, проведенная из вершины пирамиды;
- **диагональное сечение пирамиды** — сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания;

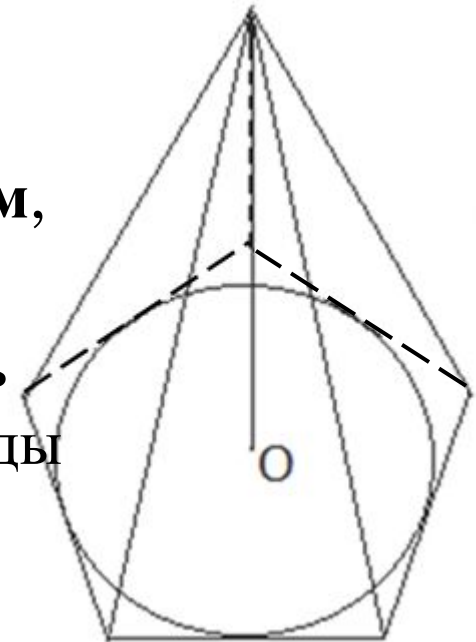


A — вершина пирамиды;
AB, AC, AD, AE — ребра пирамиды;
ADE, AEB, ABC, ACD — боковые грани пирамиды;
BCDE — основание пирамиды;
AG — высота;
AF — апофема;
AEC — диагональное сечение.

СВОЙСТВА ПИРАМИДЫ

Если боковые грани наклонены к плоскости основания под одним углом, то :

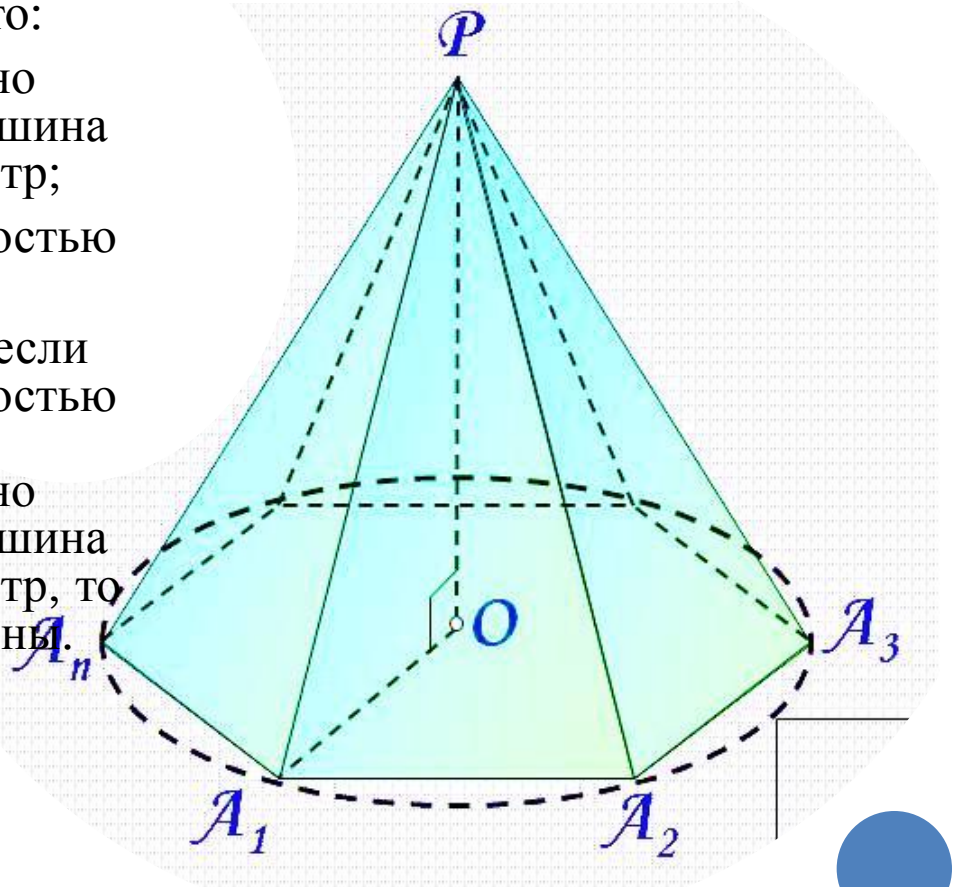
- в основание пирамиды можно вписать окружность, причем вершина пирамиды проецируется в ее центр;
- высоты боковых граней равны;



СВОЙСТВА ПИРАМИДЫ

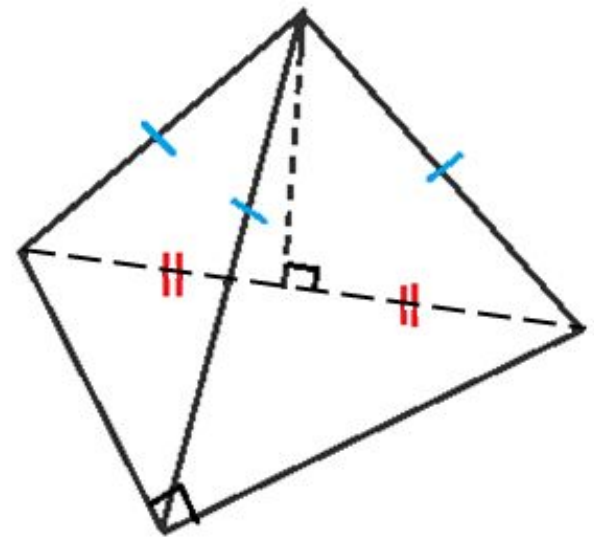
Если все боковые ребра равны, то:

- около основания пирамиды можно описать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр;
- боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы.
- также верно и обратное, то есть если боковые ребра образуют с плоскостью основания равные углы или если около основания пирамиды можно описать окружность, причём вершина пирамиды проецируется в её центр, то все боковые ребра пирамиды равны.



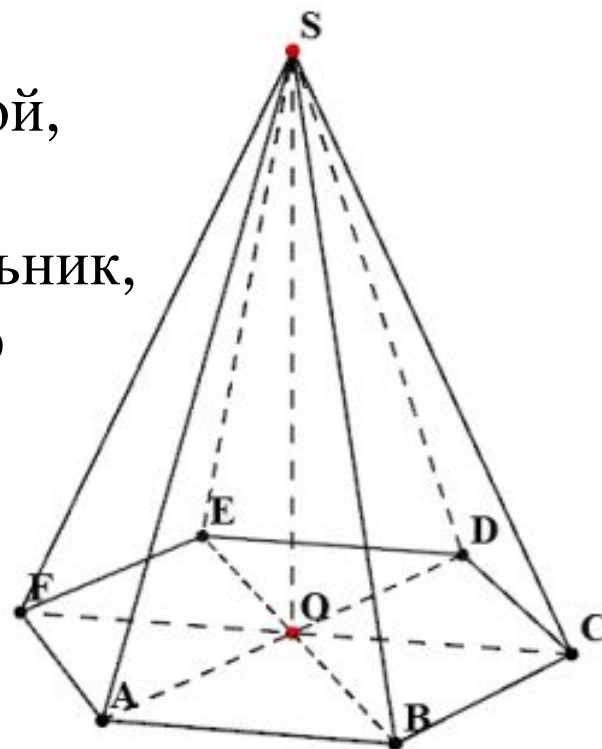
СВОЙСТВА ПИРАМИДЫ

- Если в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, а боковые ребра равны, то высота, опущенная из вершины пирамиды, проецируется на середину гипотенузы данного треугольника.



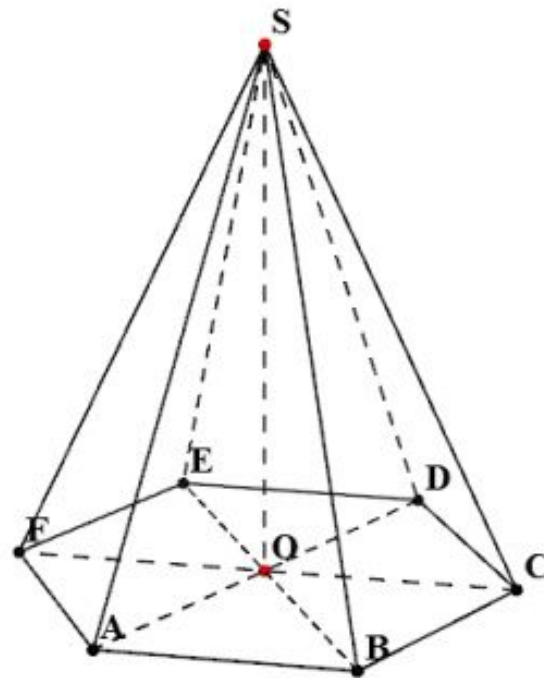
ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

- Пирамида называется правильной, если ее основанием является правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.



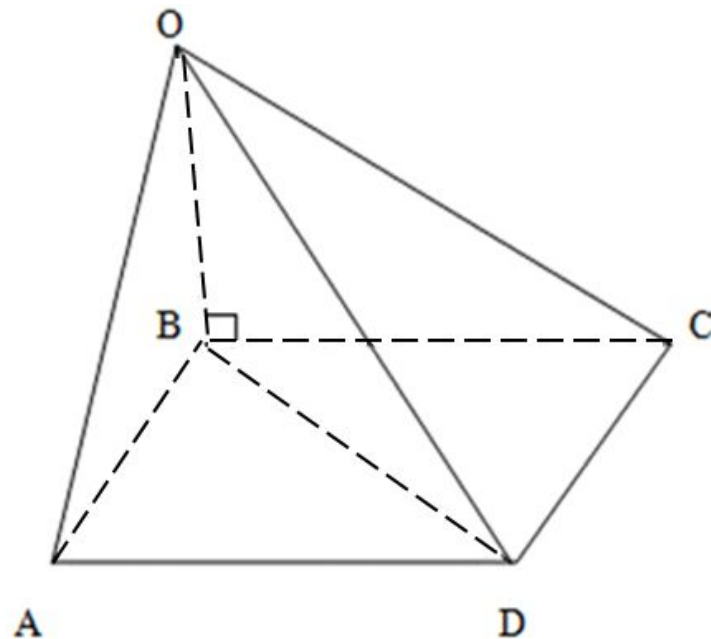
СВОЙСТВА ПРАВИЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

- боковые ребра правильной пирамиды равны;
- в правильной пирамиде все боковые грани — равные равнобедренные треугольники;



ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ПИРАМИДА

- Пирамида называется **прямоугольной**, если одно из боковых рёбер пирамиды перпендикулярно основанию. В данном случае, это ребро и является высотой пирамиды.



ПОВЕРХНОСТЬ ПИРАМИДЫ

- Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т.е. основания и боковых граней).
- Площадью боковой поверхности пирамиды называется сумма площадей ее боковых граней.



ФОРМУЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПИРАМИДОЙ

- Чтобы определить площадь боковой поверхности пирамиды, надо найти сумму площадей всех её боковых граней:

$$S_{\text{бок}} = \sum_i S_i$$



ФОРМУЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПИРАМИДОЙ

□● Если пирамида является правильной, то

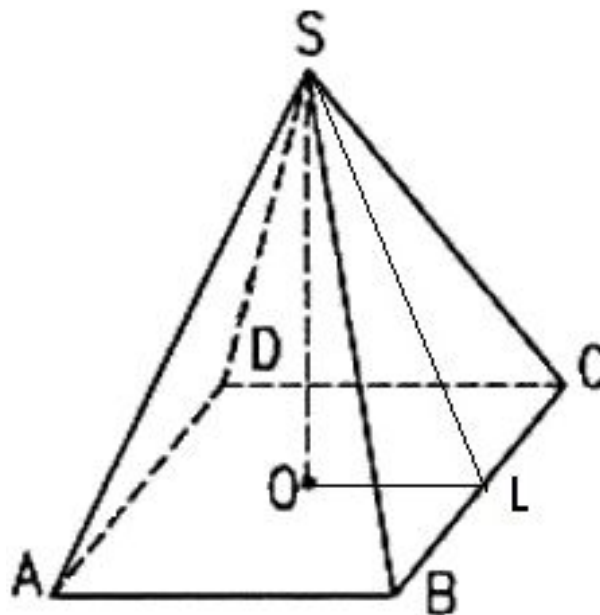
$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P a = \frac{n}{2} b^2 \sin \alpha ,$$

где a - апофема , P - периметр основания, n - число сторон основания, b - боковое ребро, α — плоский угол при вершине пирамиды.



ТЕОРЕМА

Боковая поверхность правильной пирамиды равна произведению периметра основания на половину апофемы.



ФОРМУЛЫ, СВЯЗАННЫЕ С ПИРАМИДОЙ

$$\square \odot S_{\text{полн}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{бок}}$$

$$\odot V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h$$

