

ЛЕКЦИЯ 4, часть 2.

Элементы релятивистской механики

План лекции

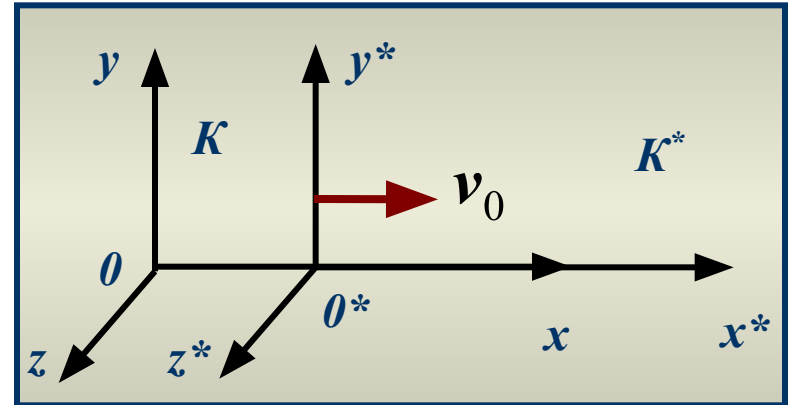
1. Преобразования Лоренца. Длина тел в разных системах отсчета
2. Преобразования Лоренца. Промежуток времени между событиями.
3. Преобразования Лоренца. Преобразование и сложение скоростей.
4. Релятивистское выражение для импульса.
5. Релятивистское выражение для энергии.

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

1. Одновременность событий в разных системах отсчета.

Пусть в системе отсчета K в точках с координатами x_1 и x_2 происходят одновременно два события в момент времени $t_1 = t_2 = T$.



Запишем для K^* :

$$t_1^* = \frac{T + (\beta/c)x_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t_2^* = \frac{T + (\beta/c)x_2}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Видно, что если события в системе K пространственно разобщены, т.е. $x_1 \neq x_2$, то в системе K^* они не будут одновременными ($t_2^* \neq t_1^*$). Знак разности $t_2^* - t_1^*$ определяется знаком выражения

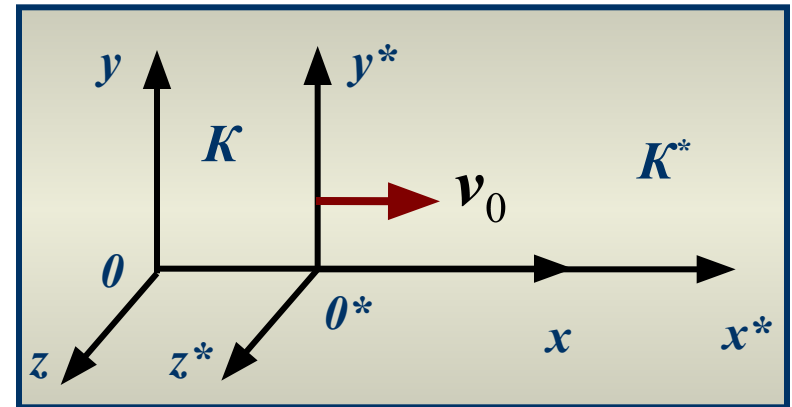
$$(\beta/c)(x_1 - x_2)$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

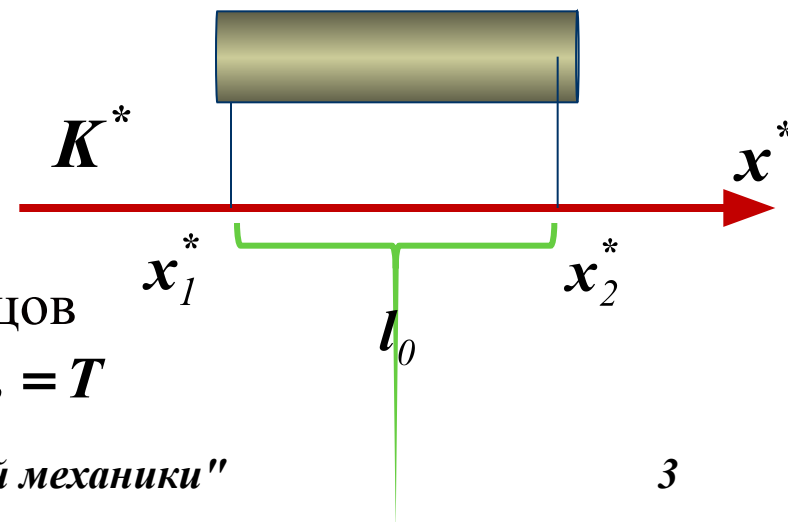
2. Длина тел в разных системах отсчета.

Рассмотрим расположенный вдоль оси x^* стержень, покоящийся относительно K^* .



Стержень движется относительно системы K со скоростью $v = v_0$. Определим его длину.

Отметим в системе K координаты концов стержня x_1^* и x_2^* в момент времени $t_1 = t_2 = T$



ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

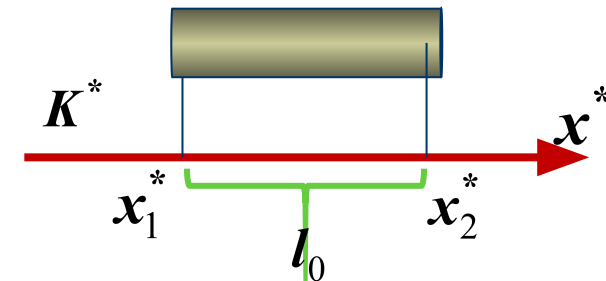
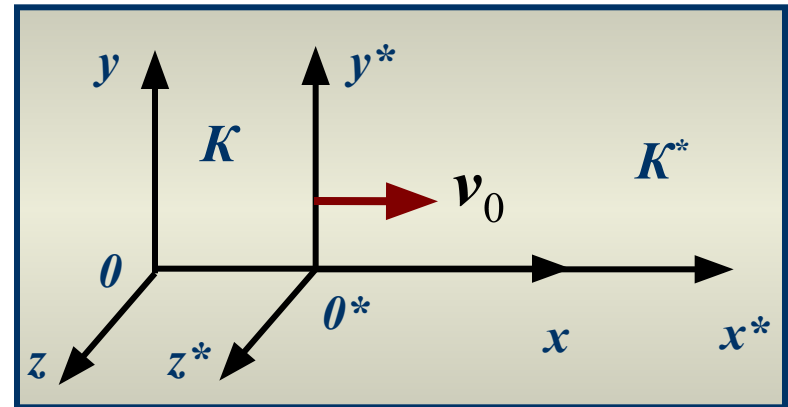
2. Длина тел в разных системах отсчета.

$l = x_2 - x_1$ - длина стержня, измеренная в системе K . Воспользуемся преобразованиями Лоренца.

$$x_1^* = \frac{x_1 - v_0 T}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}},$$

$$x_2^* = \frac{x_2 - v_0 T}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

$$x_2^* - x_1^* = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$



$$l = l_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Лоренцево сокращение

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

3. Промежуток времени между событиями.

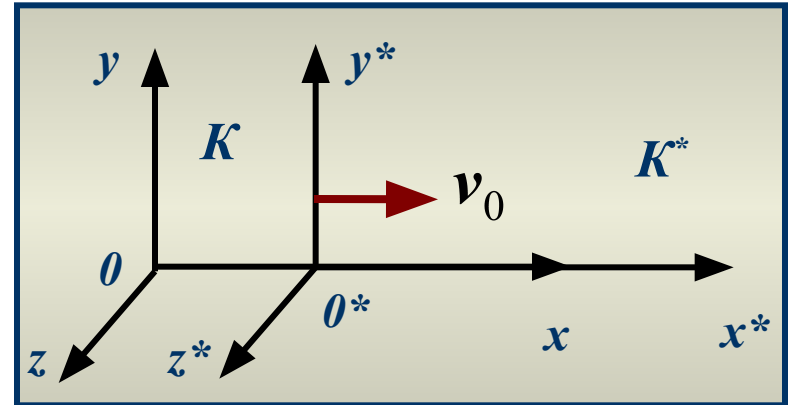
Пусть в системе K^* происходят два события. Первому событию соответствует координата $x_1^* = a$ и момент времени t_1^* .

Второму событию соответствует координата $x_1^* = x_2^* = a$ и момент времени t_2^* .

Воспользуемся преобразованиями Лоренца для перехода в систему отсчета K .

$$t_1 = \frac{t_1^* + (v_0 / c^2) a}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}},$$

$$t_2 = \frac{t_2^* + (v_0 / c^2) a}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}$$

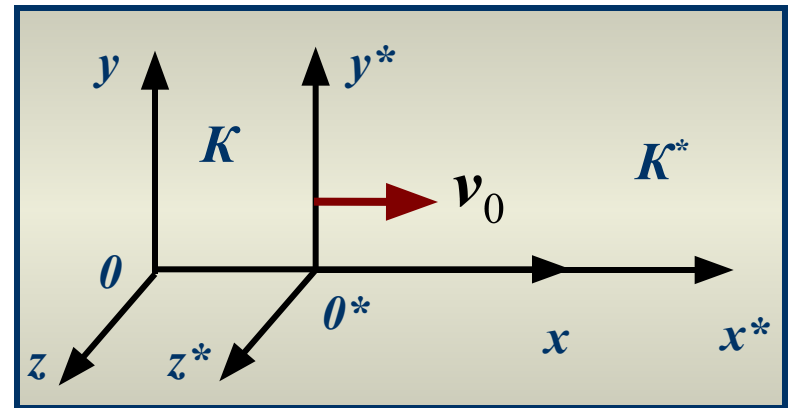


ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

3. Промежуток времени между событиями.

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2^* - t_1^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$



Введем обозначения: $t_2 - t_1 = \Delta t$, $t_2^* - t_1^* = \Delta t^*$

Пусть события происходят с одной и той же частицей, которая покоится в системе K^* и движется со скоростью $v = v_0$, если наблюдение вести из системы K .

$$\Delta t = \frac{\Delta t^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

Тогда $\Delta t^* = \Delta \tau$ собственное время частицы (в системе K^*)

$$\Delta \tau = \Delta t \sqrt{1 - v_0^2/c^2}$$

Движущиеся часы идут медленнее, чем неподвижные.

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

4. Преобразование скоростей

Компоненты скорости \mathbf{v} частицы в системе K равны

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt}$$

В системе K^* компоненты скорости \mathbf{v}^* той же частицы равны

$$v_{x^*}^* = \frac{dx^*}{dt^*}, \quad v_{y^*}^* = \frac{dy^*}{dt^*}, \quad v_{z^*}^* = \frac{dz^*}{dt^*}$$

Найдем формулы, связывающие компоненты скорости в разных системах. Запишем преобразования Лоренца

$$x = \frac{x^* + v_0 t^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}, \quad y = y^*, \quad z = z^*, \quad t = \frac{t^* + (v_0/c^2) x^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}}$$

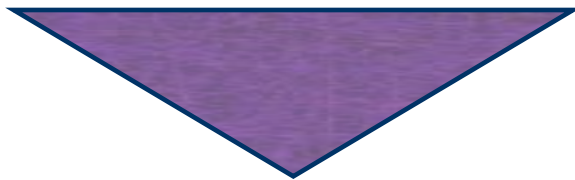
ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

4. Преобразование скоростей

Получим следующие выражения:

Разделив первую формулу на четвертую, получим



$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx^* + v_0 dt^*}{dt^* + (v_0/c^2) dx^*} = \frac{dx^*/dt^* + v_0}{1 + (v_0/c^2) dx^*/dt^*}$$

$$\left. \begin{aligned} dx &= \frac{dx^* + v_0 dt^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \\ dy &= dy^*, \quad dz = dz^* \\ dt &= \frac{dt^* + (v_0/c^2) dx^*}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \end{aligned} \right\}$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

4. Преобразование скоростей

Поскольку $\frac{dx}{dt} = v_x$, а $\frac{dx^*}{dt^*} = v_{x^*}$, то

$$v_x = \frac{v_{x^*} + v_0}{1 + v_{x^*} v_0 / c^2}$$

$$\begin{cases} dx = \frac{dx^* + v_0 dt^*}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}} \\ dy = dy^*, \quad dz = dz^* \\ dt = \frac{dt^* + (v_0 / c^2) dx^*}{\sqrt{1 - v_0^2 / c^2}} \end{cases}$$

Аналогичным образом получим выражения для v_y и v_z , разделив формулы 2 и 3 на формулу 4:

$$v_y = \frac{v_{y^*} \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}{1 + v_{x^*} v_0 / c^2}$$

$$v_z = \frac{v_{z^*} \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}{1 + v_{x^*} v_0 / c^2}$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Преобразования Лоренца. Некоторые следствия.

5. Сложение скоростей

Частица в системе K^* движется параллельно осям x и x^* в направлении v . Тогда

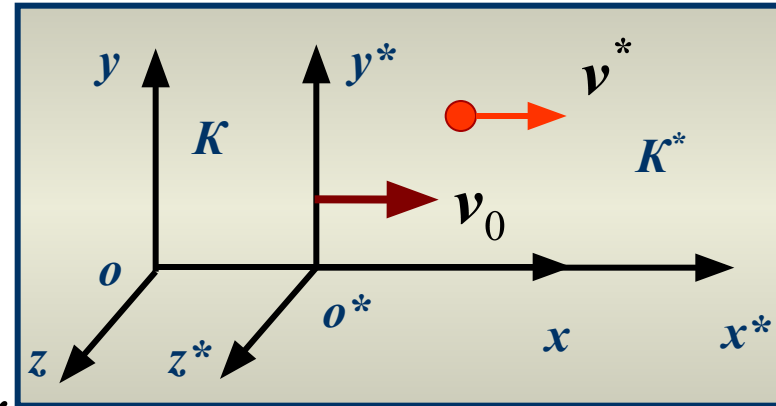
v_x совпадает с модулем скорости v частицы в системе K ;

v_x^* совпадает с модулем скорости v^* частицы в системе K^* . Запишем:

$$v_x = \frac{v_x^* + v_0}{1 + v_x^* v_0 / c^2}$$



$$v = \frac{v^* + v_0}{1 + v^* v_0 / c^2}$$



$$v_x = \frac{v_x^* + v_0}{1 + v_x^* v_0 / c^2}$$

$$v_y = \frac{v_y^* \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}{1 + v_x^* v_0 / c^2}$$

$$v_z = \frac{v_z^* \sqrt{1 - v_0^2 / c^2}}{1 + v_x^* v_0 / c^2}$$

Получили релятивистский закон сложения скоростей

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистское выражение для импульса

$\vec{p} = m\vec{v}$ - выражение для импульса тела в классической механике;

$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ - выражение для релятивистского импульса тела.

$$p = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} mv$$

- удобная для запоминания форма записи.

$$F = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

- второй закон Ньютона в релятивистской механике .

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистское выражение для энергии

Выражение для энергии получим, используя второй закон Ньютона.
Умножим выражение на перемещение частицы $ds = vdt$.

$$Fds = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) vdt$$

Левая часть - выражение для работы.

Правая часть - приращение кинетической энергии частицы T за время dt .

$$dT = \frac{d}{dt} \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) vdt = vd \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right)$$

$$v dv = d(v^2/2)$$



ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистское выражение для энергии

$$dT = v \left\{ \frac{mdv}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + \frac{mv(v dv/c^2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \right\} = \frac{md(v^2/2)}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{mc^2 d(v^2/c^2)}{2(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$$dT = d \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \right) \quad \begin{array}{l} \text{После интегрирования} \\ \text{получим:} \end{array} \quad T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + const$$

Определим выражение для константы. При $v = 0$ кинетическая энергия обращается в нуль. Следовательно $const = -mc^2$

$$\text{Итого: } T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 \right)$$

ЭЛЕМЕНТЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистское выражение для энергии

В релятивистской механике свободная частица кроме кинетической энергии обладает еще так называемой энергией покоя E_0

$$E_0 = mc^2$$

Выражение для полной энергии E частицы выглядит так:

$$E = T + E_0 = T + mc^2$$

Подставим в это выражение формулу для кинетической энергии, получим окончательно

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$