Лекция 5. Математические модели движения

Гравитационное поле притягивающего тела считается «сильным»,

если

$$g >> a = \frac{P}{M}.$$

Для КА с ЭРДУ $a = 1 \cdot 10^{-3}\, м/с^2 \ldots 1 \cdot 10^{-4}\, м/с^2 \left(1\, мм/с^2 \ldots 0{,}1\, мм/с^2\right)$

Гравитационное ускорение на поверхности Земли $g_0 = 9{,}81\, м/с^2.$

Гравитационное ускорение на поверхности Луны $g_{moon} = 1{,}62\, м/с^2.$

Гравитационное ускорение на поверхности Марса $g_{mars} = 3{,}71\, м/с^2.$

Гравитационное ускорение на поверхности Венеры $g_{venus} = 8{,}87\, м/с^2.$

Поле тяготения Солнца – относительно «слабое», на расстоянии среднего радиуса орбиты Земли (1 а.е.)

$g_{sun} = 5{,}97 \cdot 10^{-3}\, м/с^2 \left(5{,}97\, мм/с^2\right).$ При $a = 1\, мм/с^2$ $\frac{a}{g_{sun}} \approx \frac{1}{6}$

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

1. Простейшие режимы плоского движения КА с малой тягой в центральном поле тяготения

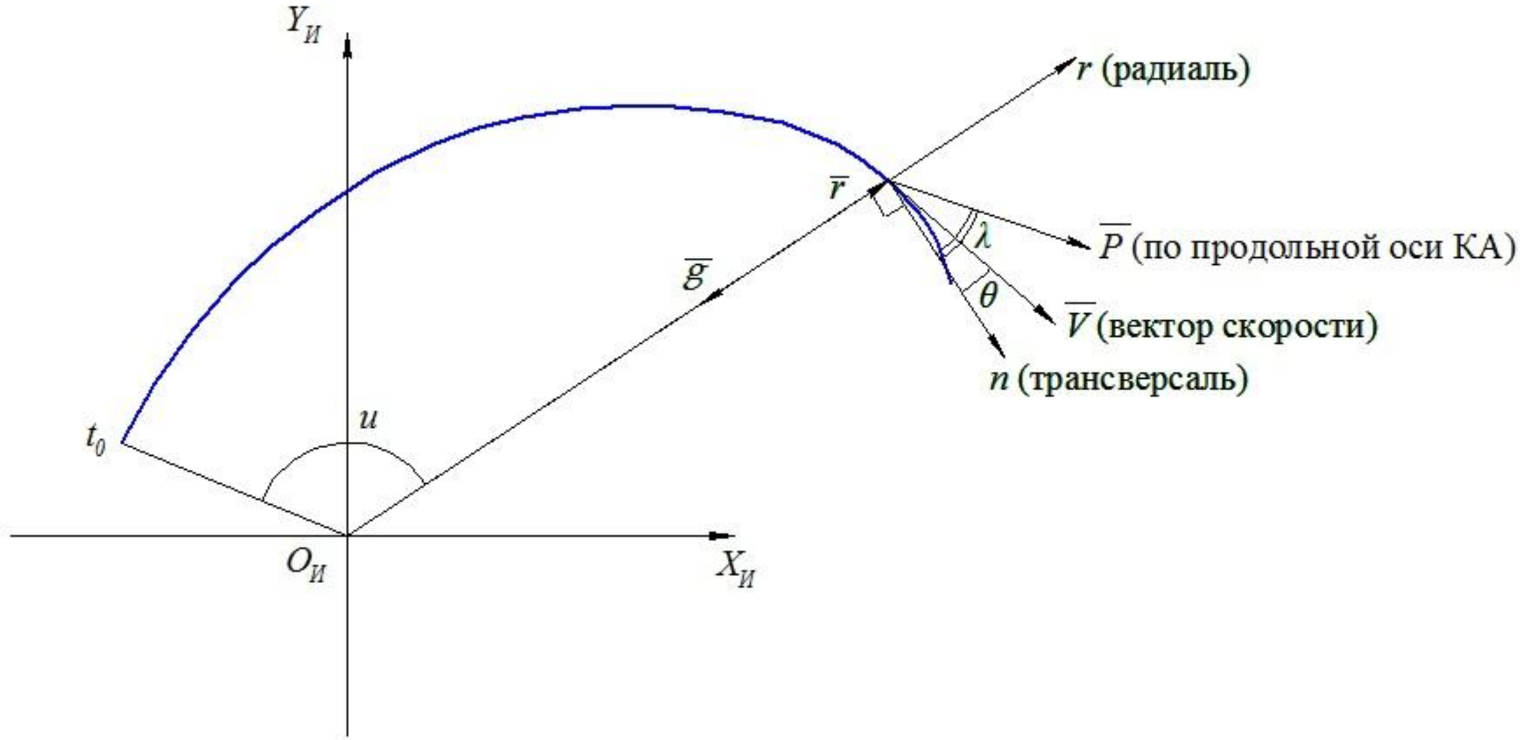


Рис. 1.11

трансверсальная тяга	тангенциальная тяга	радиальная тяга
$\lambda = 0$	$\lambda = \theta$	$\lambda = \dfrac{\pi}{2}$

Траектория КА – многовитковая спираль

Уравнения плоского движения КА в траекторной системе координат Oxyz

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = V \sin\theta,$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{V}{r}\cos\theta,$$

$$\frac{dV}{dt} = a\cos(\lambda - \theta) - \frac{\mu}{r^2}\sin\theta,$$

$$V\frac{d\theta}{dt} = a\sin(\lambda - \theta) - \frac{V^2}{r}\cos\theta - \frac{\mu}{r^2}\cos\theta.$$

θ - угол наклона траектории, λ – угол отклонения тяги от трансверсали, $\mu = f \times M_{Earth}$ – произведение гравитационной постоянной на массу притягивающего центра (гравитационный параметр).

Полная энергия поступательного движения центра масс КА (на единицу массы)

$$h = \frac{H}{M} = \frac{V^2}{2} - \frac{\mu}{r}.$$

$$\frac{dh}{dt} = V\frac{dV}{dt} + \frac{\mu}{r^2}\frac{dr}{dt} = V\left[a\cos(\lambda - \theta) - \frac{\mu}{r^2}\sin\theta\right] + \frac{\mu}{r^2}V\sin\theta = Va\cos(\lambda - \theta);$$

$$\frac{dh}{dt} \to \max \Rightarrow \lambda \equiv \theta$$ (тангенциальная тяга).

Околокруговая орбита, трансверсальная тяга

$$\frac{dh}{dt} = Va; \quad V^2 \approx \frac{\mu}{r} \to h = \frac{V^2}{2} - V^2 = -\frac{V^2}{2} \quad (<0);$$

«Парадокс разгона» с малой тягой

$$\frac{dh}{dt} = Va = \frac{d}{dt}\left(-\frac{V^2}{2}\right) = -V\frac{dV}{dt}.$$

$$\boxed{\frac{dV}{dt} \approx -a}$$

Скорость при разгоне уменьшается!

Приближенные решения для случая трансверсальной тяги

Допущения: $\lambda \equiv 0; \quad M = const; \quad a = const.$

Безразмерные (относительные) переменные

$$r' = \frac{r}{r_0}, \quad V' = \frac{V}{V_{кр0}}, \quad a' = \frac{a}{g_0}, \quad t' = \frac{t}{\sqrt{\frac{r_0^3}{\mu}}}, \quad \mu' = \frac{\mu}{\mu} = 1 \quad T_{об} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mu}}$$

$$t' = 2\pi \frac{t}{T_{об}}$$

Витки траектории до момента t ≈ 0,9$T_{пар}$ остаются близкими к круговым

$$V^2 = \frac{\mu}{r}$$

$$(V_{пар} = \sqrt{2} \cdot V_{кр})$$

$$\frac{dV'}{dt'} = -a'$$

$$r' = \frac{1}{(V')^2}$$

$$\boxed{r' \approx (1 - a't')^{-2} \qquad V' \approx 1 - a't'}$$

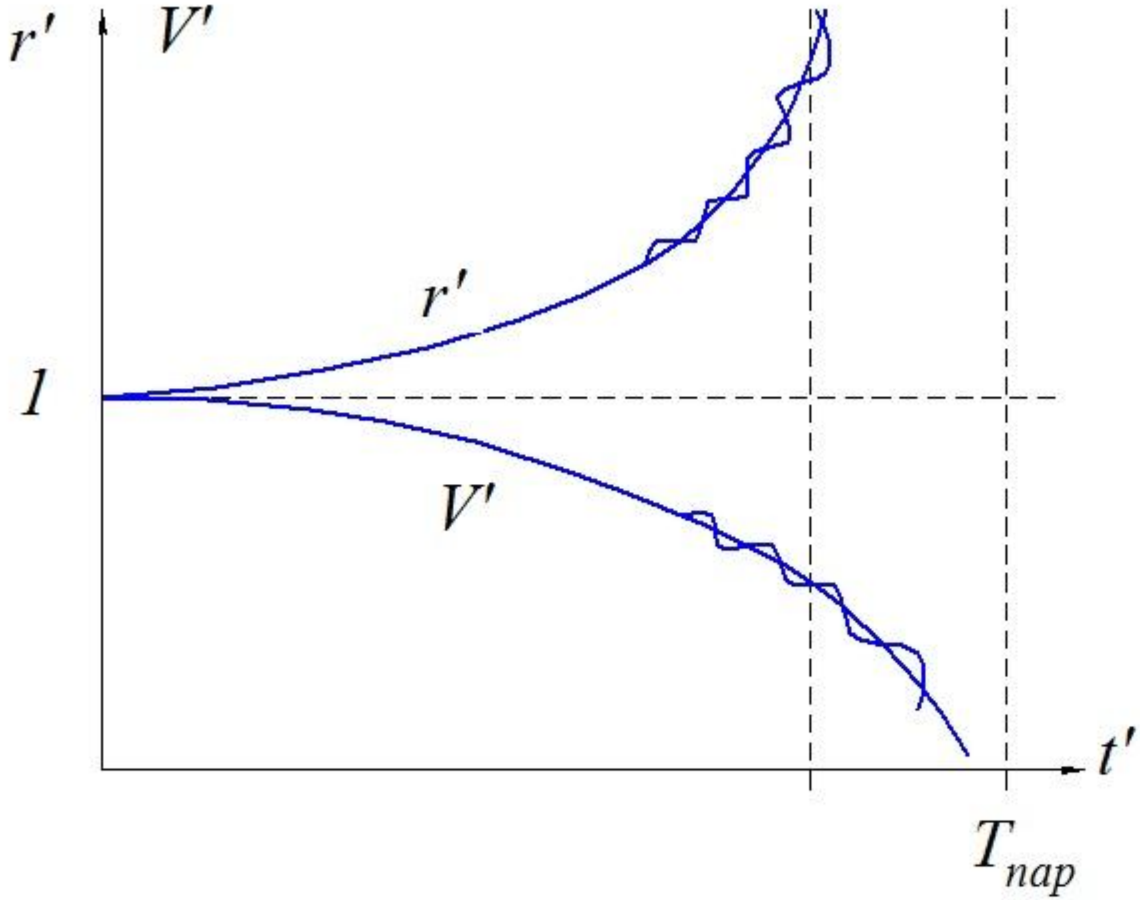


Рис. 1.12

2. Уравнения плоского движения КА в орбитальной системе координат (рис. 1.11)

$$\frac{dr}{dt} = V_r;$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{V_T}{r};$$

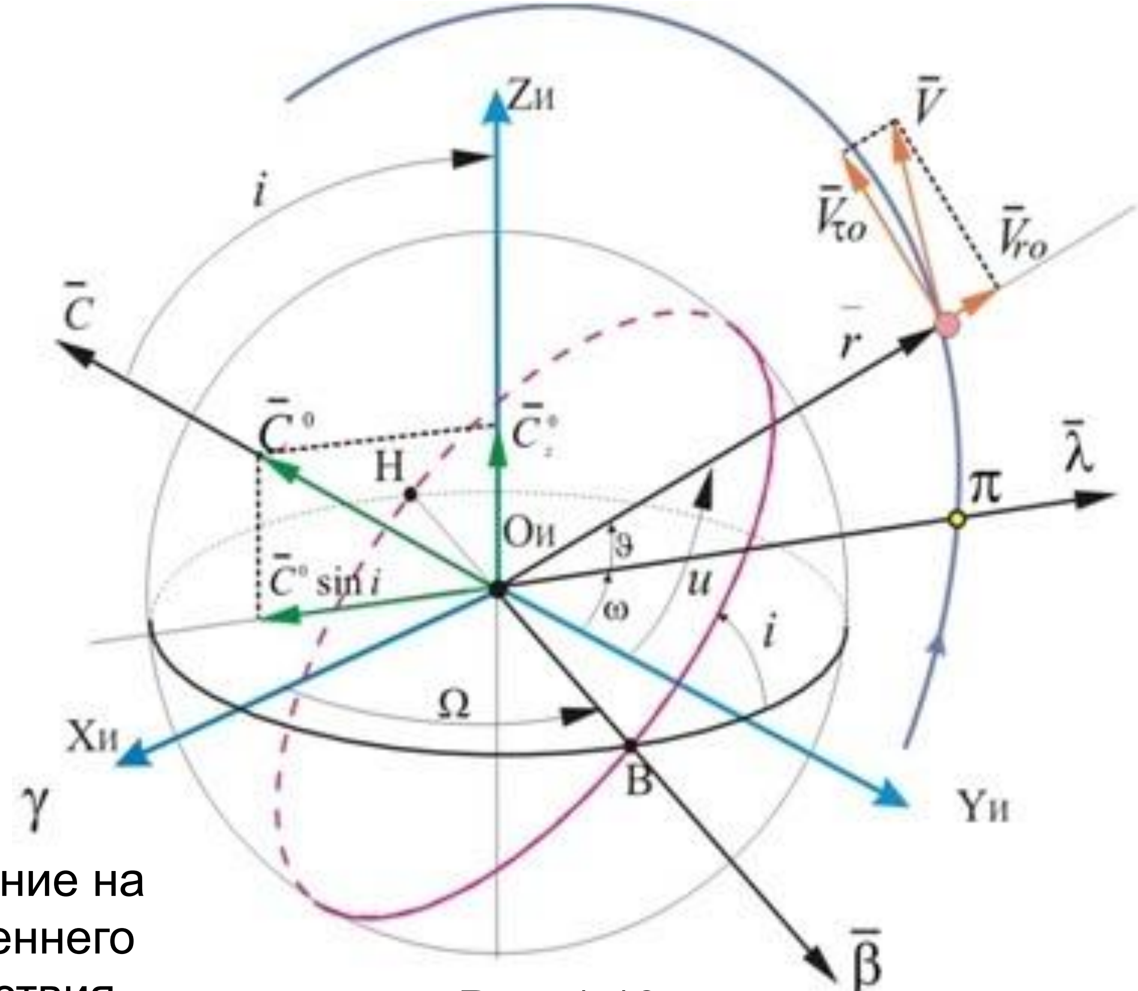
$$\frac{dV_r}{dt} = \frac{V_T^2}{r} - \frac{\mu}{r^2} + a\cos\lambda;$$

$$\frac{dV_T}{dt} = -\frac{V_r V_T}{r} + a\sin\lambda.$$

OTSW (onrb)

OT – трансверсаль,
OS – радиаль,
OW – бинормаль.

2. Математическая модель движения КА в оскулирующих элементах



Направление на точку весеннего равноденствия

Рис. 1.13

Уравнения движения в оскулирующих элементах

$$\frac{dA}{dt}=\frac{2p}{\left(1-e^2\right)^2}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\left[e\sin\vartheta\cdot S+\left(1+e\cos\vartheta\right)\cdot T\right];$$

$$\frac{de}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\left[\sin\vartheta\cdot S+\frac{e\cos^2\vartheta+2\cos\vartheta+e}{1+e\cos\vartheta}\cdot T\right];$$

$$\frac{di}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\frac{\cos u}{1+e\cos\vartheta}\cdot W;$$

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{1}{e}\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\left[-\cos\vartheta\cdot S+\frac{\sin\vartheta\left(2+e\cos\vartheta\right)}{1+e\cos\vartheta}\cdot T-\frac{e\sin u\cdot ctgi}{1+e\cos\vartheta}\cdot W\right];$$

$$\frac{d\Omega}{dt}=\sqrt{\frac{p}{\mu}}\cdot\frac{\sin u}{\sin i\left(1+e\cos\vartheta\right)}\cdot W;$$

$$\frac{du}{dt}=\frac{\sqrt{\mu p}}{p^2}\cdot\left[\left(1+e\cos\vartheta\right)^2+\frac{p^2}{\left(1+e\cos\vartheta\right)\mu}\cdot\sin u\cdot ctgi\cdot W\right].$$

Здесь $p=A(1-e^2)$ – фокальный параметр; $\vartheta = u - \omega$ – истинная аномалия; e – эксцентриситет; ω – угловое расстояние перицентра от узла; Ω – долгота восходящего узла; i – наклонение орбиты; t – время; u – аргумент широты; S, T, W – проекции реактивного ускорения на направление радиуса-вектора, на перпендикулярное к нему в плоскости орбиты и на перпендикулярное к плоскости орбиты; $\mu=fM$ – произведение гравитационной константы на массу притягивающего центра.

Выражение для компонент реактивного ускорения в орбитальной системе координат

$$T = \delta a \cos\lambda \cos\psi; \qquad S = \delta a \sin\lambda \cos\psi; \qquad W = \delta a \sin\psi.$$

Здесь а – модуль полного реактивного ускорения, δ – функция включения-выключения двигателей (δ = {0, 1}); λ – угол ориентации вектора тяги в плоскости орбиты ($\lambda \in [0^0, 180^0]$); ψ – угол ориентации вектора тяги в плоскости местного горизонта ($\psi \in [-90^0, 90^0]$).

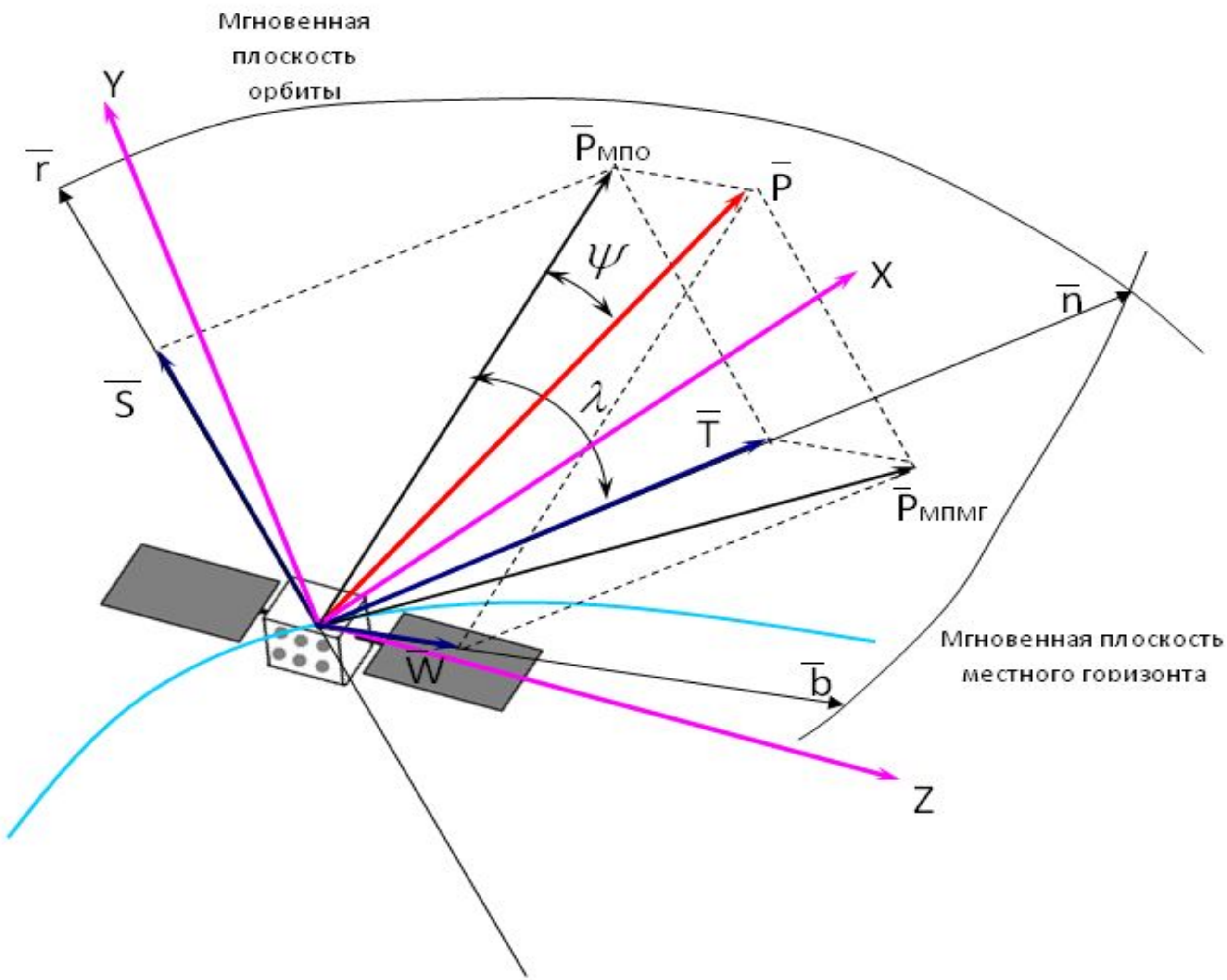

Мгновенная
плоскость
орбиты
Y
$\bar{r}$
$\bar{P}_{мпо}$
$\bar{P}$
ψ
X
$\bar{n}$
$\bar{S}$
λ
$\bar{T}$
$\bar{P}_{мпмг}$
Мгновенная плоскость
местного горизонта
$\bar{W}$
$\bar{b}$
Z

Рис. 1.14

Способы раздельного управления элементами орбиты

$$\frac{dA}{dt} \to \max \Rightarrow e \sin\vartheta \sin\lambda \cos\psi + (1 + e\cos\vartheta)\cos\lambda\cos\psi \to \max$$

$$\frac{de}{dt} \to \max \Rightarrow \sin\vartheta\sin\lambda\cos\psi + \frac{e\cos^2\vartheta + 2\cos\vartheta + e}{1 + e\cos\vartheta}\cos\lambda\cos\psi \to \max$$

$$\frac{di}{dt} \to \max \Rightarrow \frac{\cos u}{\sin i(1 + e\cos\vartheta)}\sin\psi \to \max$$

$$\frac{d\omega}{dt} \to \max \Rightarrow -\cos\vartheta\sin\lambda\cos\psi + \frac{\sin\vartheta(2 + e\cos\vartheta)}{1 + e\cos\vartheta}\cos\lambda\cos\psi - \frac{e\sin u \cdot ctgi}{1 + e\cos\vartheta}\sin\psi \to \max$$

$$\frac{d\Omega}{dt} \to \max \Rightarrow \frac{\sin u}{\sin i(1 + e\cos\vartheta)}\sin\psi \to \max$$

Частный случай: околокруговые многовитковые траектории (*e ≈ 0)*
Радиальная составляющая реактивного ускорения S = 0.
Трансверсальная T и бинормальная W составляющие

$$\frac{dA}{dt} \approx 2A\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cdot T \quad \Longrightarrow \quad sign\, T = sign\, \Delta A$$

$$\frac{de}{dt} \approx 2\sqrt{\frac{A}{\mu}} \cos\vartheta \cdot T \quad \Longrightarrow \quad sign\ T = \pm sign\left(\cos\vartheta\right)$$

$$\frac{di}{dt} \approx \sqrt{\frac{A}{\mu}} \cos u \cdot W \quad \Longrightarrow \quad sign\ W = \pm sign\left(\cos u\right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} \approx \sqrt{\frac{A}{\mu}} \frac{\sin u}{\sin i} \cdot W \quad \Longrightarrow \quad sign\ W = \pm sign\left(\sin u\right)$$

$$\left(\sin i \neq 0 \ \ !\right)$$

u – аргумент широты, угол между линией узлов НВ и радиусом-вектором КА r, лежит в плоскости оскулирующей орбиты;
ϑ - истинная аномалия, угол между направлением на перицентр (перигей) и радиусом-вектором КА.

3. Векторные уравнения движения центра масс КА в инерциальной (абсолютной) системе координат

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V}, \quad \frac{dM}{dt} = -q = -\frac{P}{c},$$

$$\frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{P \cdot \delta}{M(t)} \bar{e}(t) + \bar{g}(\bar{r}) + \bar{f}.$$

Здесь $\bar{g}(\bar{r})$ - гравитационное ускорение от основного притягивающего центра,

$\bar{f}$ - вектор возмущающего ускорения.

<u>Основные возмущающие факторы</u>

$$\bar{f} = \bar{f}_a + \bar{f}_g + \bar{f}_m + \bar{f}_s$$

возмущения от верхней атмосферы

гравитационные возмущения, вызванные учетом гармоник высших порядков

возмущения, обусловленные притяжением Луны

Возмущения, обусловленные притяжением Солнца

Системы координат. Связь траекторного и углового движений

Инерциальная (абсолютная) СК	- $O_И X_И Y_И Z_И$
Траекторная СК	- Oxyz
Связанная СК	- OXYZ
Орбитальная СК	- Onrb (OTSW)

Полная система уравнений (Модель 5)

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{F}_0, \qquad \overline{Q} = M(t)\cdot\overline{V}$$ - вектор количества движения,

$$\frac{d\overline{K}}{dt} + \overline{\omega}\times\overline{K} = \overline{M}_0, \qquad \overline{K} = J(t)\cdot\overline{\omega}$$ - вектор кинетического момента.

J – тензор инерции КА,
$$J = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix}$$

$$M(t)\cdot\frac{d\overline{V}}{dt}=\overline{F}_0,$$

$$J(t)\cdot\frac{d\overline{\omega}}{dt}+\overline{\omega}\times J(t)=M_0,\quad \overline{\omega}=\overline{\omega}_{орб}+\overline{\omega}_{св}.$$

Кинематические уравнения

$$\frac{d\overline{r}}{dt}=\overline{V},$$

$$\frac{d\overline{i}}{dt}=\overline{\omega}\times\overline{i},\quad \frac{d\overline{j}}{dt}=\overline{\omega}\times\overline{j},\quad \frac{d\overline{k}}{dt}=\overline{\omega}\times\overline{k}.$$

$\overline{i}$ ~ OX; $\overline{j}$ ~ OY; $\overline{k}$ ~ OZ (связанные оси).

Для КА с непрерывно работающим ЭРД существенную роль играет взаимосвязь траекторного и углового движений, поскольку для эффективного управления вектором тяги Р зачастую приходится разворачивать корпус КА с помощью управляющих моментов.

Выбор высоты орбиты старта с учетом возмущающего влияния верхней атмосферы Земли

Необходимое условие для осуществления маневров с малой тягой на низких орбитах

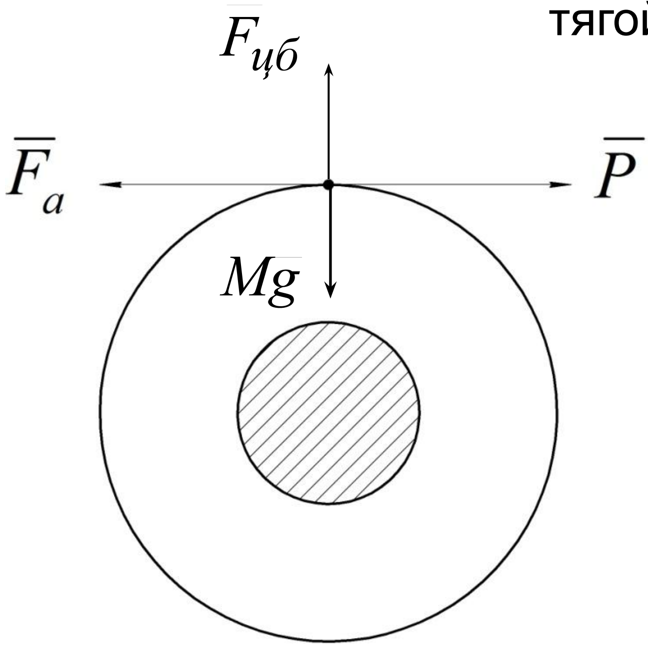


Рис. 1.15

$$P > F_a = C_{Xa} \frac{\rho V^2}{2} S_m,$$

$$a > f = \frac{C_{Xa} S_m}{2M} \rho V^2 = \sigma_x \rho V^2$$

Интегрально за виток

$$\int_0^{T_{об}} \frac{P}{M} dt >> \int_0^{T_{об}} \sigma_x \rho V^2 dt$$

σ_x - баллистический коэффициент КА,

ρ - плотность верхней атмосферы Земли,

S_m - площадь миделевого сечения КА.

а) $\sigma_x = \sigma_{xcp} = const$
(0,001 – 0,02 м^2/кг)

б) $\sigma_x = \sigma_{x0} + \sigma_1 \cos(u - u_0)$

Площадь миделя КА: $S_m \approx kS_{max}$ (максимальная площадь проекции КА+СБ)

Модели плотности верхней атмосферы Земли

«Статическая» модель (плотность зависит только от высоты H)

1) $\rho = \rho_0 \cdot e^{-\beta H}$ (изотермическая) 2) $\rho = \rho_0 \cdot \exp\left(a_1 - a_2 \sqrt{H - a_3}\right)$

(ГОСТ 25645.101-83)

«Динамическая» модель плотности верхней атмосферы

$$\rho = \rho_H \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot k_3 \cdot k_4 + \delta\rho$$

Здесь $\rho_Н$ – плотность «ночной» атмосферы

k_1 – сомножитель, отражающий изменение плотности с изменением индекса интенсивности солнечного излучения на волне 10,7 см ($F_{10,7}$) относительно среднего F_0

$F_{10,7}$ = 65…275 Вт/м^{2}Гц

k_2 – сомножитель, учитывающий суточный эффект в распределении плотности («горб» в точке зенита)

k_3 – сомножитель, отражающий полугодовые вариации плотности (зима - лето)

k_4 – сомножитель, учитывающий корреляции между плотностью и геомагнитной возмущенностью

$\delta\rho$ – случайные вариации плотности

а) переменного характера

б) «вспышка» на Солнце

Высота над поверхностью земного эллипсоида

$$H = r - R_э\left(1 - \varepsilon \cdot \sin^2 i \cdot \sin^2 u\right)$$

где $r = H + R_З$, $R_З$ = 6371 км – средний радиус

$R_Э$ = экваториальный радиус, 6378,245 км

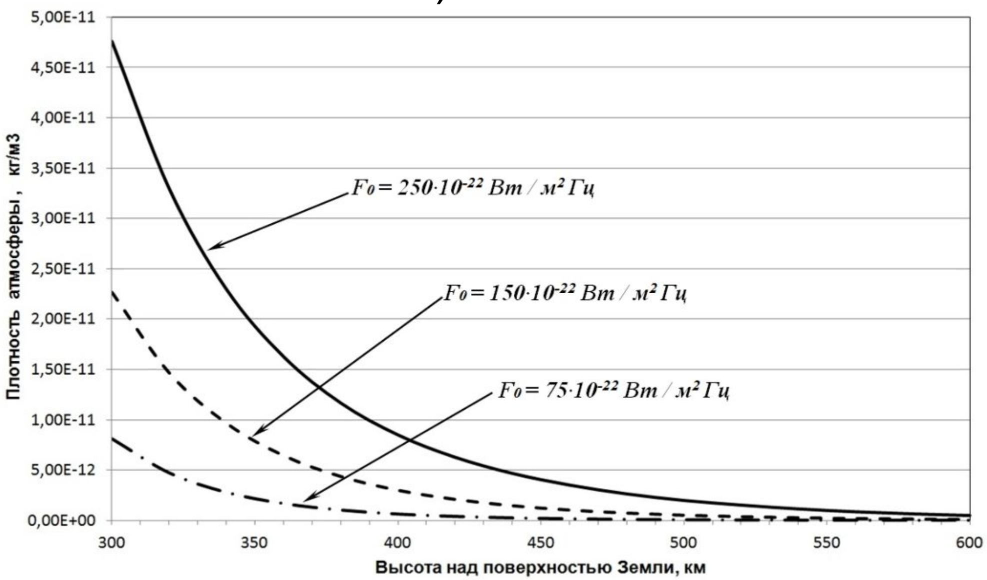
ε = 0,0034 – коэффициент сжатия земного эллипсоида

i – наклонение орбиты

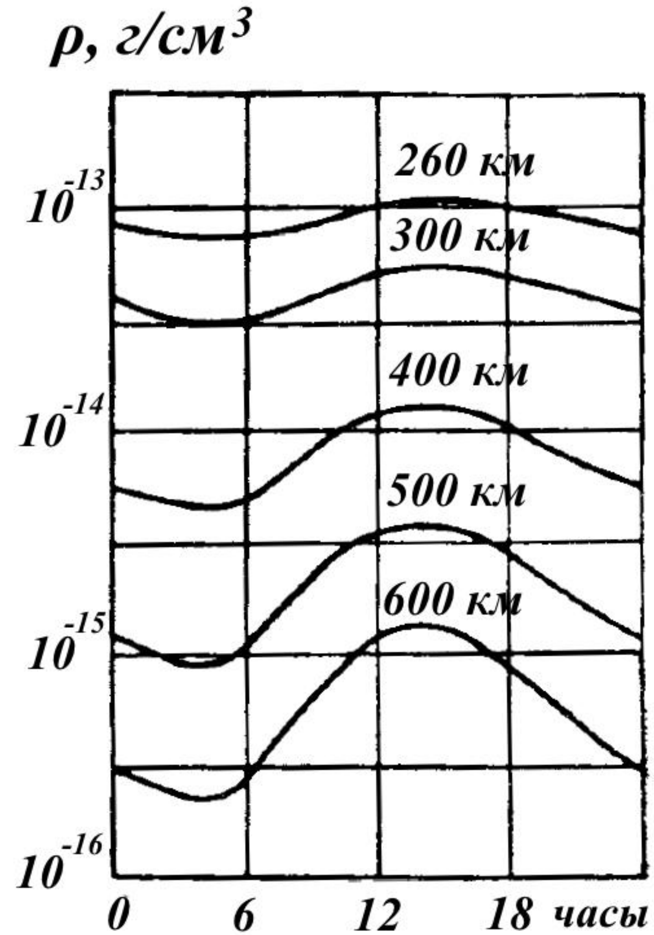
u – аргумент широты


H, км
360
350
340
0
180
360
аргумент широты u, град

а)


5,00E-11
4,50E-11
4,00E-11
3,50E-11
3,00E-11
2,50E-11
2,00E-11
1,50E-11
1,00E-11
5,00E-12
0,00E+00
Плотность атмосферы, кг/м3
$F_0 = 250 \cdot 10^{-22}$ Вт / м² Гц
$F_0 = 150 \cdot 10^{-22}$ Вт / м² Гц
$F_0 = 75 \cdot 10^{-22}$ Вт / м² Гц
300
350
400
450
500
550
600
Высота над поверхностью Земли, км

б)


ρ, г/см³
260 км
300 км
400 км
500 км
600 км
10^{-13}
10^{-14}
10^{-15}
10^{-16}
0
6
12
18
часы

в)

Рис. 1.16

Справочная таблица плотности, ρ кг/м^3
(Г.С. Нариманов, М.К. Тихонравов)

H, км	$F_{10,7}$ = 65 - 70		$F_{10,7}$ = 250 - 275	
	ночь	день	ночь	день
200	$1{,}69\times10^{-10}$	$2{,}20\times10^{-10}$	$3{,}76\times10^{-10}$	$3{,}98\times10^{-10}$
300	$5{,}72\times10^{-12}$	$15{,}1\times10^{-12}$	$4{,}35\times10^{-11}$	$6{,}63\times10^{-11}$
400	$4{,}43\times10^{-13}$	$21{,}6\times10^{-13}$	$8{,}8\times10^{-12}$	$18{,}9\times10^{-12}$
500	$4{,}87\times10^{-14}$	$40{,}6\times10^{-14}$	$2{,}3\times10^{-12}$	$6{,}65\times10^{-12}$

2. Выбор оптимальной даты старта из условия минимума суммарного времени нахождения КА в тени Земли

Особенности полета КА с ЭРДУ

- периодическое попадание КА в тень Земли

а) ЭРДУ выключается из-за отсутствия энергии

б) задействуются буферные аккумуляторные батареи для обеспечения работы бортовых систем. Включение ЭРДУ требует увеличения емкости (массы) АБ

Физическая картина взаимного положения Солнца, Земли и КА при межорбитальных перелетах

- плоскость орбиты КА постоянно изменяется вследствие

а) работы ЭРДУ
б) прецессии орбиты вследствие сжатия Земли (изменение Ω)
в) из-за большой (90 – 150 суток) продолжительности перелета Земля перемещается по эклиптике ($\omega_З \approx 1$ градус/сутки)

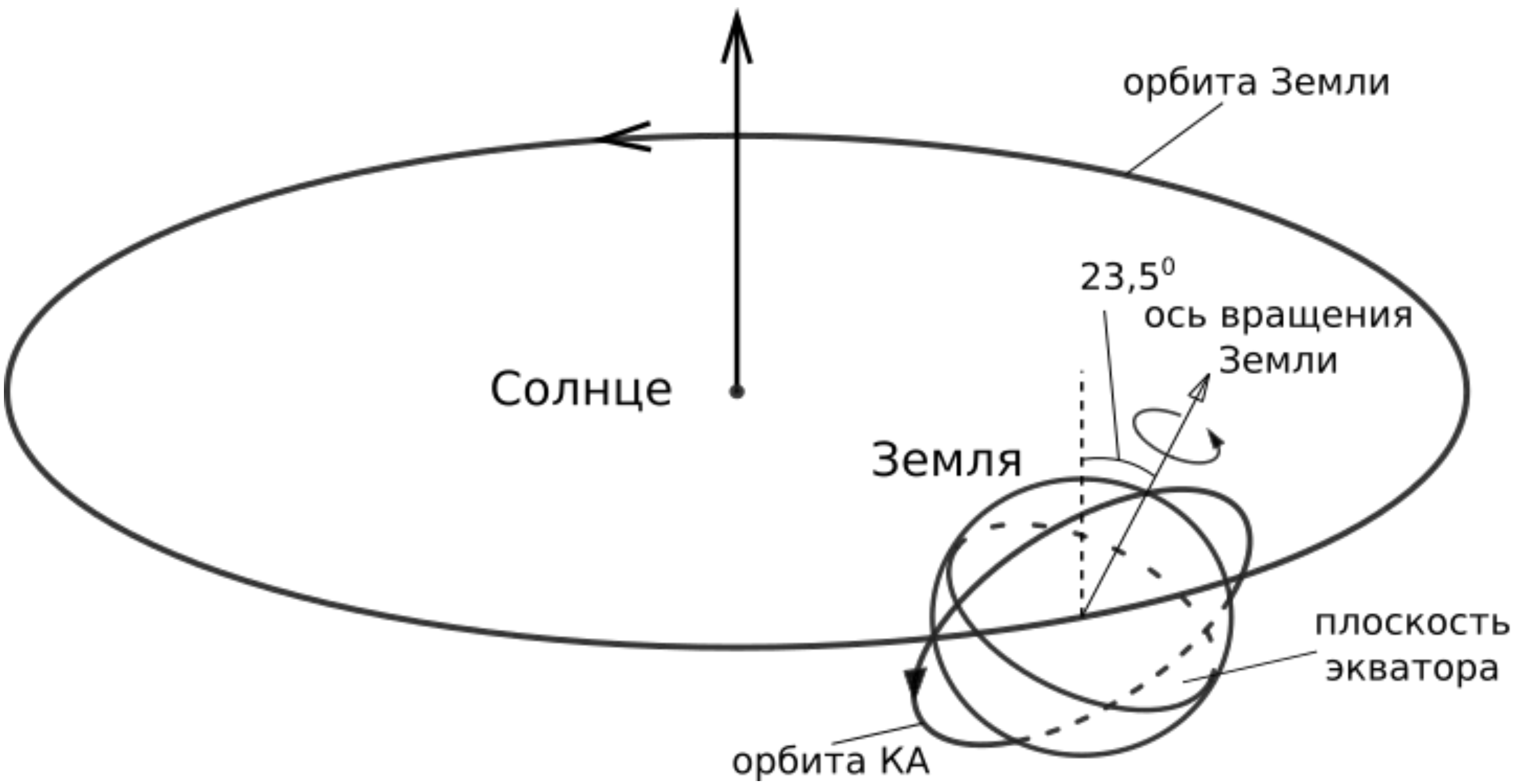


Рис. 1.17

Расположение плоскости орбиты КА относительно плоскости эклиптики

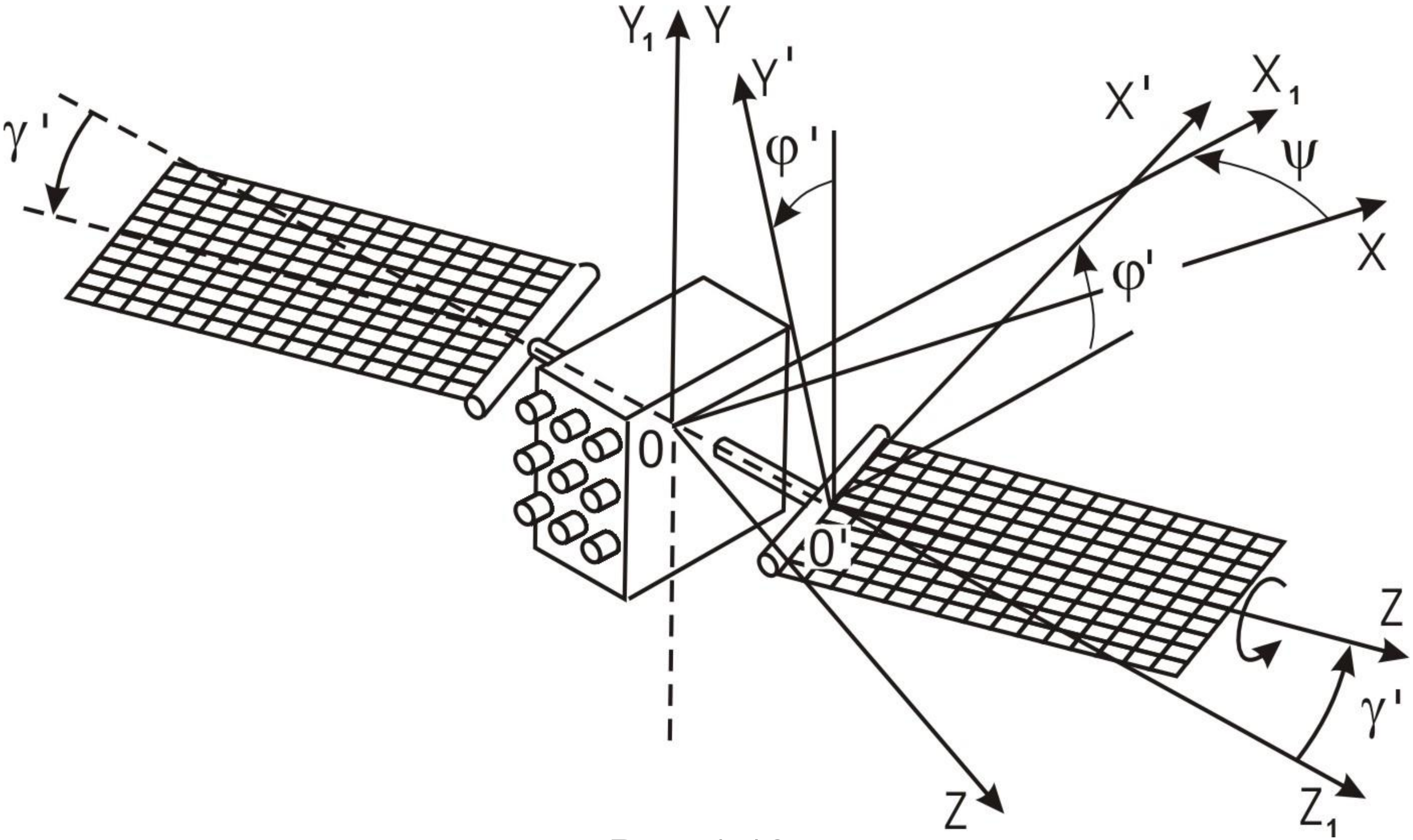
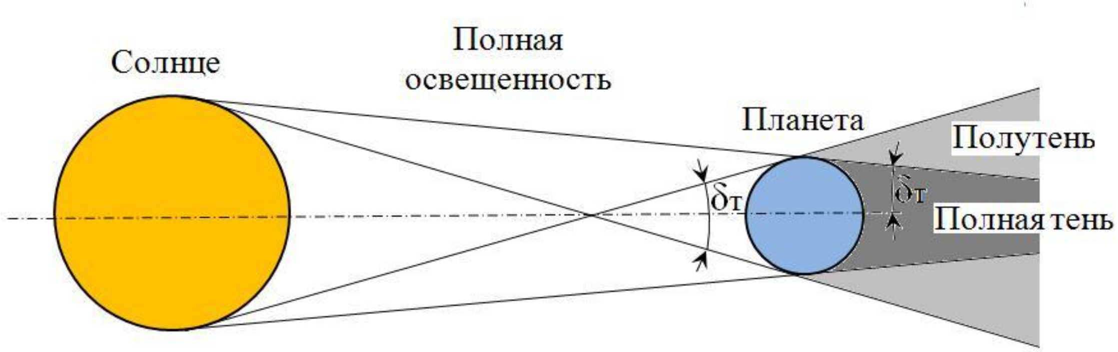


Рис. 1.18

Параметры углового положения космического аппарата и солнечных батарей



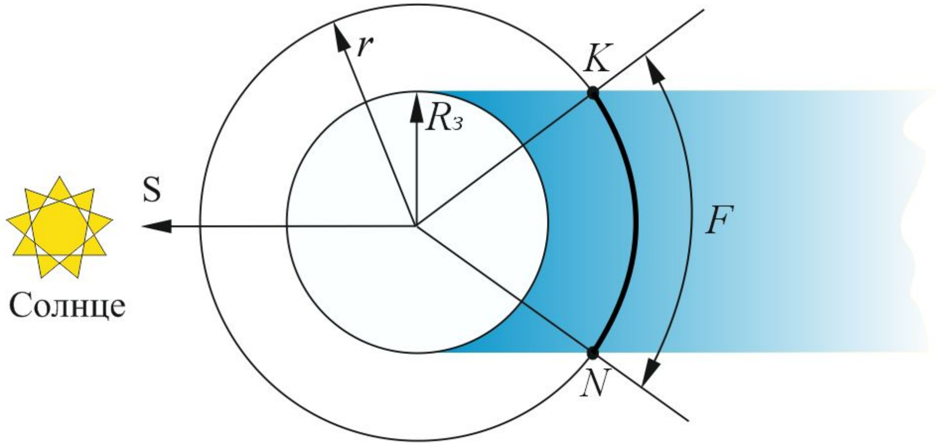


Рис. 1.19

К определению теневого участка на орбите

Протяженность теневого участка (околокруговая орбита)

$$F = \arcsin\sqrt{\frac{\left(\frac{R_э}{r}\right)^2 - \cos^2\delta}{\sin^2\delta}} \times \frac{sign\left[\left(\frac{R_э}{r}\right)^2 - \cos^2\delta\right] + 1}{2}$$

δ – угол между направлением на Солнце и нормалью к плоскости орбиты

$$\cos\delta = \cos i \sin\varepsilon_0 \sin\theta - \sin i \cos\varepsilon_0 \cos\Omega \sin\theta + \sin i \sin\Omega \cos\theta$$

ε_0 – угол наклона плоскости экватора к плоскости эклиптики, $\varepsilon_0 = 23{,}5^0$

θ – угол между направлением на точку весеннего равноденствия и линией Земля-Солнце

$$\theta \approx \theta_0 + \omega(t - t_0), \quad \theta_0 \approx 0{,}0172 \cdot (T_{CT} - 80)$$

Ω – долгота восходящего узла

T_{CT} – число суток с начала года до момента старта

ул. Московское шоссе, д.34, г.Самара, 443086, тел.: +7 (846) 335-18-26, факс: +7 (846) 335-18-36, сайт: www.ssau.ru, e-mail: ssau@ssau.ru

Прецессия орбиты (изменение угла Ω)

$$\frac{d\Omega}{dt} = -\frac{3}{2} J_{20} \left(\frac{R_э}{r}\right)^2 \cos i \qquad (i < 90^0;\ i > 90^0)$$

Солнечно-синхронная орбита

Синхронность эволюции плоскости орбиты (прецессия восходящего узла Ω) с относительным перемещением Солнца по небесной сфере.

Обеспечивается постоянная ориентация плоскости орбиты относительно Солнца.

КА появляется над районами с заданной широтой в одно и то же местное время. КА не заходит в тень Земли, освещенность солнечных батарей – постоянная.

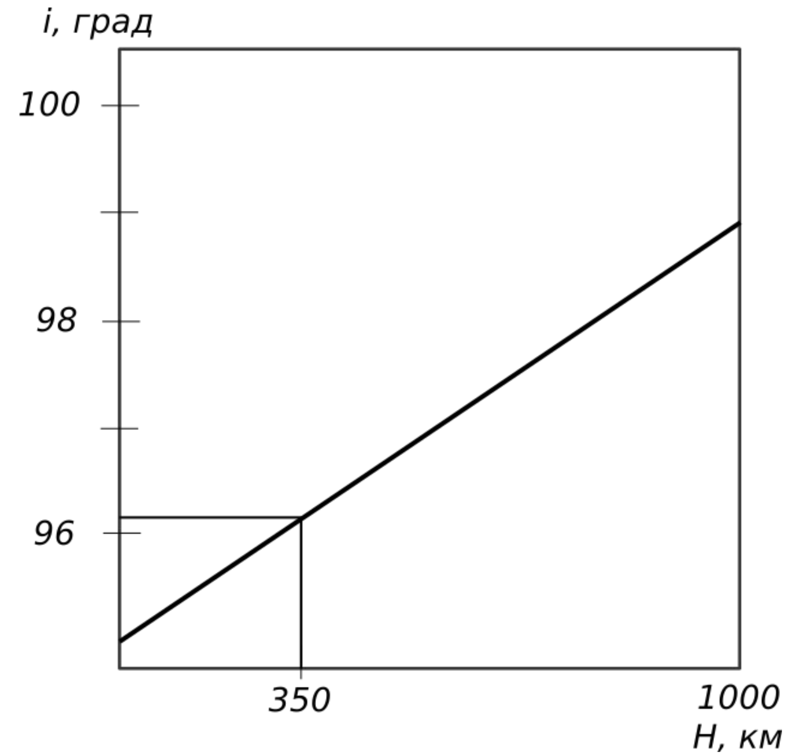


Рис. 1.20

Параметры ССО

Расчет суммарного времени затенения

$$\tau_c = \sum_{i=1}^{N} \left(t_{вых\,i} - t_{вх\,i} \right)$$

N – число витков траектории перелета

$$\tau_c = \frac{1}{2\pi} \int_0^{T_{пер}} F dt \approx \sum_{j=1}^{N} \frac{F_j}{2\pi} \Delta t$$

Параметры расчета: $T_{СТ}$, Ω_0

$T_{СТ}$ – число суток с начала года до момента старта с опорной орбиты

Параметры расчета перебираются с высокой дискретностью, формируется массив значений τ_c , значения обрабатываются специальной программой (сплайн – аппроксимация) и наносится на плоскость: $\Omega_0 – T_{СТ}$.

Оптимальные даты старта ($\tau_c \approx 0$) повторяются с периодичностью в 6 месяцев.

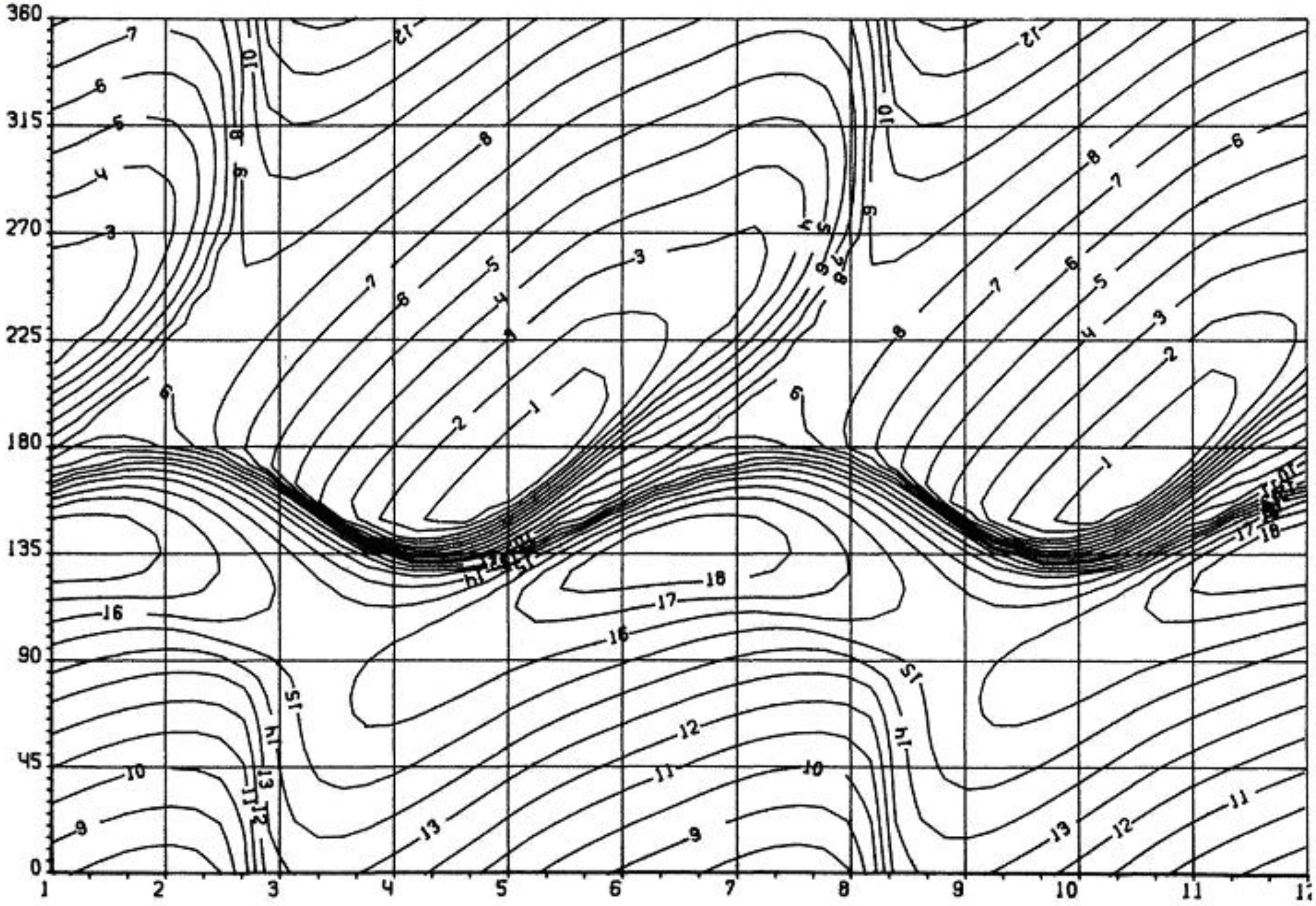


Рис. 1.21 К выбору оптимальных дат старта

$$a_0 = 1 \times 10^{-3} \text{ м/с}^2$$