Решение варианта пробного экзамена

$$4^{2x+1} = 64.$$

Решение.

$$4^{2x+1} = 64$$

$$4^{2x+1} = 4^3$$

$$2x + 1 = 3$$

$$2x = 3 - 1$$

$$2x = 2$$

$$x = 1$$

Ответ: $x = 1$

2. (1 балл) Найдите значение выражения

$$\frac{\log_8 \sqrt{20}}{\log_8 20}$$

Решение.

$$\frac{\log_8 \sqrt{20}}{\log_8 20} = \frac{\log_8 20^{\frac{1}{2}}}{\log_8 20} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \log_8 20}{\log_8 20} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Ответ: 0,5

3. (1 балл) Флакон шампуня стоит 140 рублей. Какое наибольшее число флаконов можно купить на 1000 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 25%?

Решение.

- Цена флакона – 140 руб. Скидка 25%. Вычислим новую цену:

140 руб. – 100 %

x руб. – (100-25) %

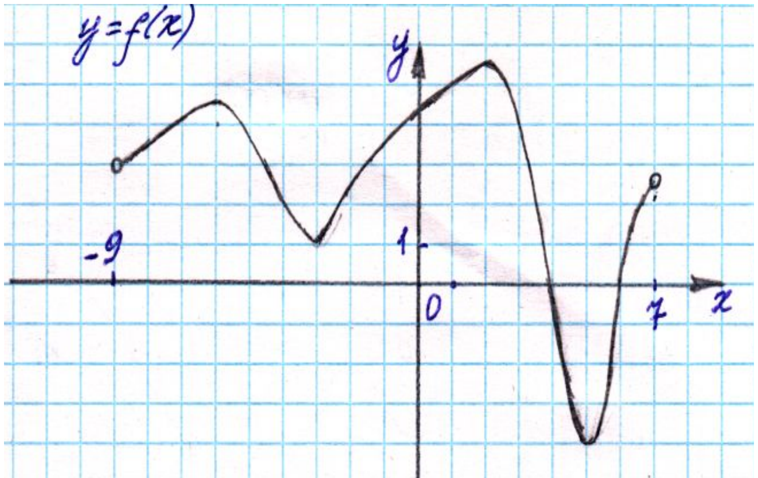
$$x = \frac{140 \text{ руб.} \cdot \ \ 75\ \%}{100\ \%} = 105 \text{ руб.}$$

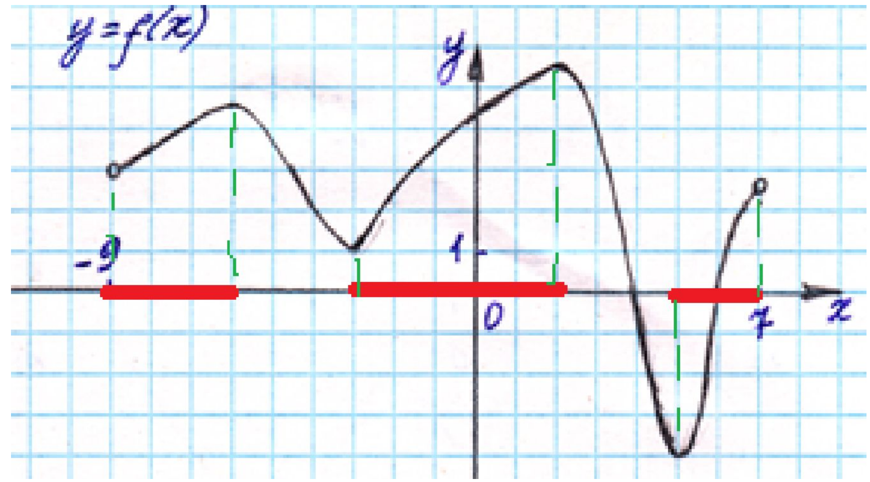
Есть 1000 руб.

Можно купить: $\frac{1000}{105} \approx 9{,}5$, следовательно, можно купить только 9 флаконов (берем с недостатком).

Ответ: можно купить 9 флаконов.

4. (1 балл) На рисунке (см. ниже) изображен график функции *y=f(x)*, определенной на интервале (-6; 8). Определите при каких значениях *x* производная функции положительна.



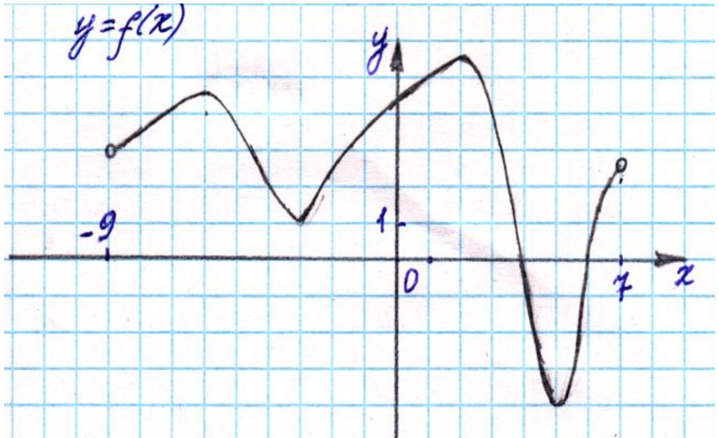


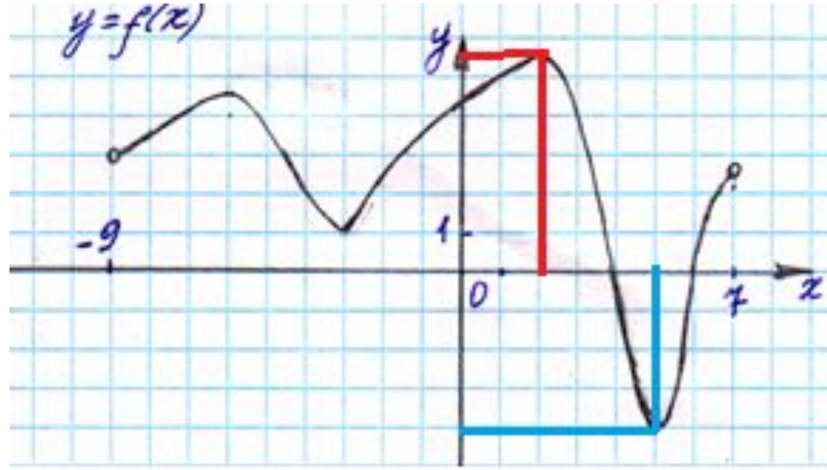
Решение.

Производная функции положительна на тех участках, на которых функция возрастает (график стремится вверх). На данном графике таких участков три.

Ответ: $f'(x) > 0$ при $x\epsilon(-9; -6) \cup (-3; 2) \cup (5; 7)$

5. (1 балл) Определите наименьшее и наибольшее значения функции.





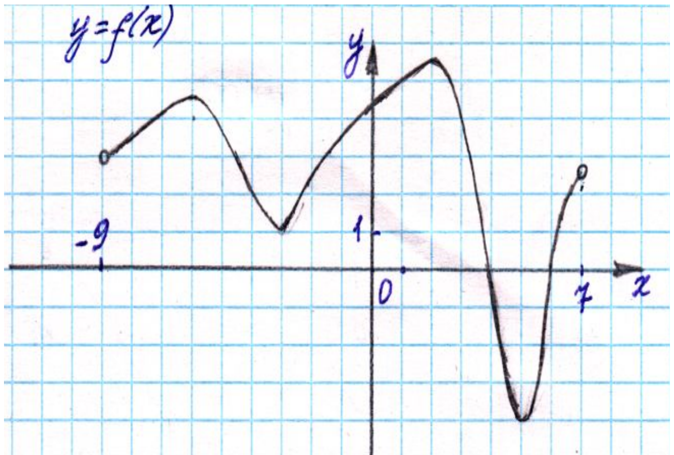
Решение:

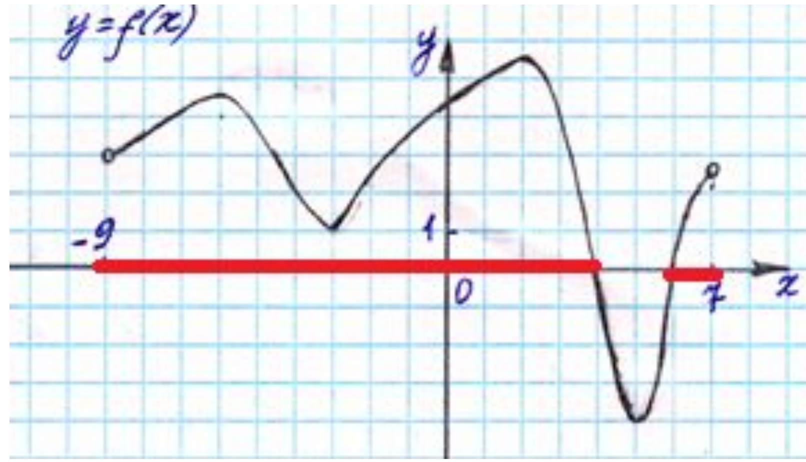
Находим самую высокую и самую низкую точку на заданном интервале и записываем ее икс и игрек.

Ответ: Наибольшее значение функции: $y(2) = 5{,}5$.
Наименьшее значение функции: $y(5) = -4$.

Или Ответ: (2; 5,5) – наибольшее, (5; -4) – наименьшее значение функции.

6. (1 балл) При каких значениях *x*, *f(x)* ≥ *0.*



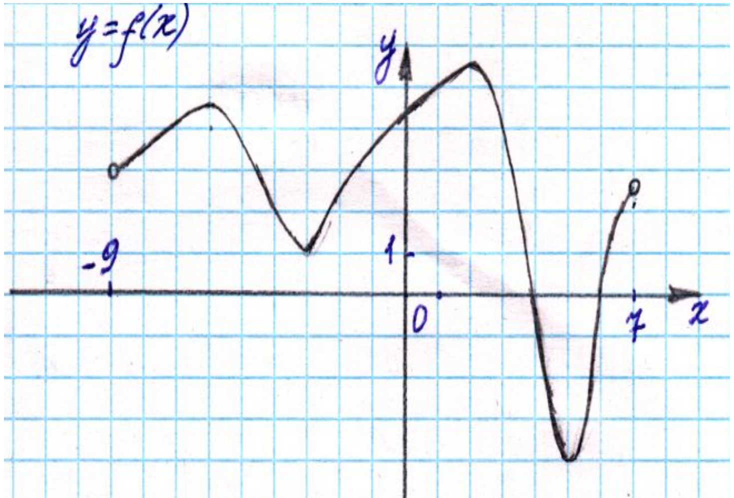


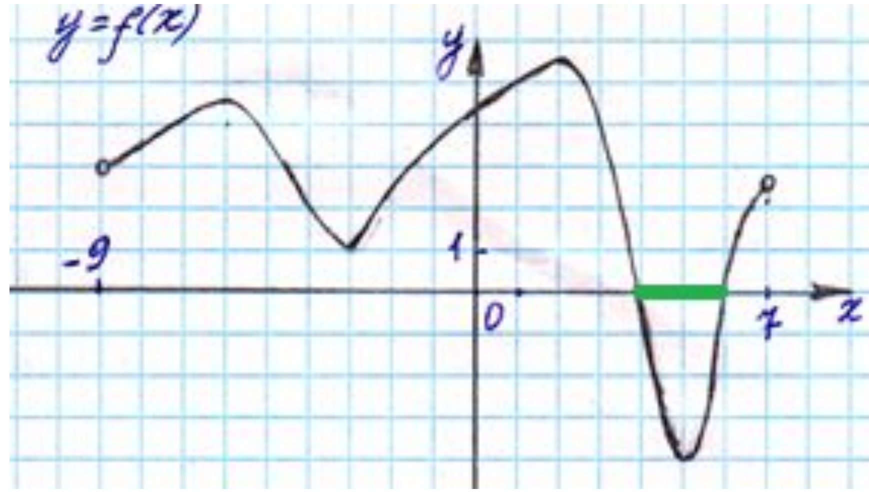
Решение.

Значение функции больше нуля на тех частях графика, где график лежит выше оси Ox. Те числа, которые лежат на оси берем в квадратные скобки, концы интервала берем в квадратных скобках, если точки закрашены и круглые скобки, если точки выколоты.

Ответ: при $x \epsilon (-9; 4] \cup [6; 7)$

7. (1 балл) При каких значениях *x*, *f(x)*≤*0*.





Решение.

Решение. Значение функции меньше нуля на тех частях графика, где график лежит ниже оси *Ox*.

Ответ: При $x \epsilon [4; 6]$

8. (1 балл) Найдите значение $\sin\alpha$, если известно, что $\cos\alpha = \frac{1}{4}$ и $\alpha \epsilon 1$ четверти.

Решение.

Так как α 1 четверти, то значит $sin\alpha > 0$. Поэтому в формуле $sin\alpha = \pm\sqrt{1 - cos^2\alpha}$ перед корнем нужно поставить знак «+»: $sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha}$. Подставим значение $cos\alpha = \frac{1}{4}$ в формулу и выполним вычисления: $sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{16}{16} - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{15}{16}} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{16}} = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: $sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

9. (1 балл) Решить уравнение $\cos\frac{4\pi x}{3}=\frac{1}{2}$

Решение.

$\cos\frac{4\pi x}{3}=\frac{1}{2}$. Запишем типовое решение для косинуса.
Значение $arccos\ \left(\frac{1}{2}\right)$ берем в таблице значений тригонометрических функций.
$\frac{4\pi x}{3}=\pm arccos\ \left(\frac{1}{2}\right)+2\pi n=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\epsilon Z$. Умножим обе части уравнения на 3, чтобы избавиться от знаменателя в левой части $4\pi x=\pm\frac{\pi}{3}\cdot 3+2\pi n\cdot 3=\pm\pi+6\pi n, n\epsilon Z$. Теперь разделим обе части уравнения на 4π, получим:

$$x=\pm\frac{\pi}{4\pi}+\frac{6\pi n}{4\pi}=\pm\frac{1}{4}+1{,}5n, n\epsilon Z$$

Ответ: $x=\pm\frac{1}{4}+1{,}5n, n\epsilon Z$

10. (1 балл) Решите уравнение $\mathbf{\log_5(5-5x) = 2\log_5 2}$

Решение.

$\log_5(5-5x) = 2\log_5 2$

$\log_5(5-5x) = \log_5 2^2$

$\log_5(5-5x) = \log_5 4$

$5 - 5x = 4$

$-5x = 4 - 5$

$-5x = -1$

$x = \frac{-1}{-5} = 0{,}2$

Ответ: $x = 0{,}2$

11 ***(1 балл)*** **Строительной фирме нужно приобрести 50 кубометров строительного бруса у одного из трех поставщиков. Какова наименьшая стоимость такой покупки с доставкой (в рублях)? Цены и условия доставки приведены в таблице.**

Поставщик	Цена бруса (руб. за 1 $м^3$)	Стоимость доставки	Дополнительные условия
А	3500	9900	
Б	4500	7900	При заказе на сумму больше 150000 руб. доставка бесплатно
В	3600	7900	При заказе на сумму больше 200000 руб. доставка бесплатно

Решение.

Стоимость=цена ·количество+стоимость доставки (или доставка бесплатна при определенных условиях)

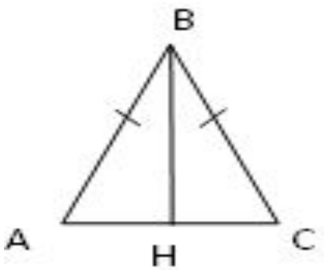
А) *3500·50+9900=175000+9900=184900 (руб.)*

Б) *4500·50=225000>150000, следовательно, доставка бесплатна. Итог 225000 (руб.)*

В) *3600·50=180000<200000, следовательно, доставка платно. Итог 180000+7900=187900 (руб.)*

Ответ: наименьшая стоимость покупки 184900 руб. у поставщика А

12. (1 балл) В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC боковая сторона AB равна 8, а $\cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. Найдите высоту, проведенную к основанию.

- 

Дано: $\Delta ABC, AB = BC, AB = 8, \cos\widehat{A} = \frac{\sqrt{7}}{4}, BH \perp AC$

Найти: BH

Решение.

ΔABH – прямоугольный, так как BH – высота. По определению косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.

$\cos\widehat{A} = \frac{AH}{AB} = \frac{AH}{8} = \frac{\sqrt{7}}{4}$, значит $AH = \frac{8\cdot\sqrt{7}}{4} = 2\sqrt{7}$.

По теореме Пифагора для прямоугольного ΔABH:

$AB^2 = AH^2 + BH^2$, значит $BH^2 = AB^2 - AH^2$

$BH^2 = 8^2 - \left(2\sqrt{7}\right)^2 = 64 - 28 = 36$, следовательно $BH = \sqrt{36} = 6$

Ответ: Высота равна 6.

13 (1 балл) Найдите значение выражения

$$\mathbf{3^{\sqrt{6}+10} \cdot 3^{-6-\sqrt{6}}}$$

- Решение

$$3^{\sqrt{6}+10} \cdot 3^{-6-\sqrt{6}} = 3^{\sqrt{6}+10+(-6-\sqrt{6})} =$$

$$= 3^{\sqrt{6}+10-6-\sqrt{6}} = 3^4 = 81$$

Ответ: 81

$$\boldsymbol{x = \frac{8x+36}{x+13}}.$$

Решение.

- $x = \frac{8x+36}{x+13}$

$\frac{x \cdot (x+13)}{x+13} = \frac{8x+36}{x+13}$

$\frac{x \cdot (x+13)}{x+13} - \frac{8x+36}{x+13} = 0$

$x \cdot (x+13) - (8x+36) = 0$, и $x + 13 \neq 0$

$x^2 + 13x - 8x - 36 = 0$

$x^2 + 5x - 36 = 0,\ D = (5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) = 25 + 144 = 169$

$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 13}{2}, x_1 = -9$ и $x_2 = 4.$

Проверка. $x_1 = -9$: $-9 = \frac{8 \cdot (-9)+36}{-9+13}$

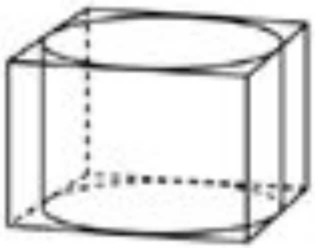
$-9 = \frac{-72+36}{4} = \frac{-36}{4} = -9$ верно.

$x_2 = 4$: $4 = \frac{8 \cdot 4+36}{4+13}$

$4 = \frac{32+36}{17} = \frac{68}{17} = 4$ верно.

Ответ: $x_1 = -9$ и $x_2 = 4$

15. ***(1балл)*** **Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания которого равен 2. Объем параллелепипеда равен 32. Найдите высоту цилиндра.**



Дано: Прямоугольный параллелепипед описан цилиндра, $r = 2$, $V_{п} = 32$

Найти: h

Решение.

Так как прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, то высота цилиндра равна высоте параллелепипеда и диаметр цилиндра равен стороне квадрата, который лежит в основании параллелепипеда. Радиус основания цилиндра равен 2, значит диаметр в два раза больше и равен 4. Значит сторона квадрата $a = 4$.

$V = abh = a^2h$. Нам надо найти высоту: $h = \frac{V}{a^2} = \frac{32}{4^2} = \frac{32}{16} = 2$

Ответ: высота цилиндра равна 2.

16. (1 балл) Тело движется по закону: $x(t) = t^2 - 4t + 5$. Определите, в какой момент времени скорость будет равна 2 м/с.

Решение.

Скорость – это производная от закона движения. Найдем производную, приравняем ее двум, решим полученное уравнение и найдем t

$$v(t) = x'(t)$$

$$x(t) = t^2 - 4t + 5$$

$$v(t) = \left(t^2 - 4t + 5\right)' = 2t - 4$$

$$2t - 4 = 2$$

$$2t = 2 + 4 = 6$$

$$t = \frac{6}{2} = 3$$

Ответ: в момент времени 3 с.

17. (1 балл) На экзамене 50 вопросов. Студент не выучил шесть из них. Найдите вероятность того, что студенту попадется выученный вопрос.

Решение.

Выучил	**44**
Не выучил	6
Всего	50

Событие А – попал выученный вопрос.

$m = 44$ (выученных вопросов)

$n = 50$ (всего вопросов)

$$P(\text{A}) = \frac{m}{n}$$

$$P(\text{A}) = \frac{44}{50} = 0{,}88$$

Ответ: 0,88.

$$\mathbf{\frac{1}{5^x} \geq 0,04}$$

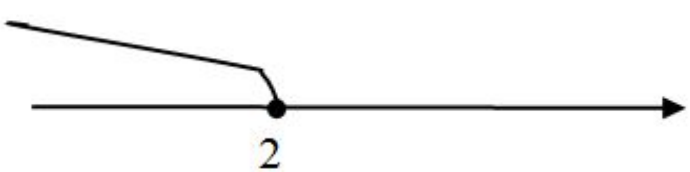
Решение.

$$\frac{1}{5^x} \geq 0{,}04$$

$$0{,}2^x \geq 0{,}2^2$$

$$a = 0{,}2 < 1, \text{знак меняем}$$

$$x \leq 2$$



Ответ: $x \epsilon (-\infty; 2]$

19. (1 балл) Найдите наибольшее значение функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на отрезке $[0; 5]$

Решение.

$y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

$y' = \left(2x^3 - 3x^2 - 12x + 1\right)' = 6x^2 - 6x - 12$

$6x^2 - 6x - 12 = 0$

$D = (-6)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-12) = 36 + 288 = 324$

$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{324}}{2 \cdot 6} = \frac{6 \pm 18}{12};\ x_1 = \frac{6+18}{12} = \frac{24}{12} = 2$ и $x_2 = \frac{6-18}{12} = \frac{-12}{12} = -1$

$x_2 = -1 \notin [0; 5],\ x_1 = 2 \in [0; 5].$

Найдем значения функции в концах интервала точках $x = 0$ и $x = 5$ и критической точке $x_1 = 2$, принадлежащей заданному интервалу (подставляем в первое уравнение)

$y(0) = 2 \cdot (0)^3 - 3 \cdot (0)^2 - 12 \cdot (0) + 1 = 1$

$y(5) = 2 \cdot (5)^3 - 3 \cdot (5)^2 - 12 \cdot (5) + 1 = 250 - 75 - 60 + 1 = 116$

$y(2) = 2 \cdot (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 1 = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$

Ответ: Наибольшее значение функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$ на интервале $[0; 5]$ – это $y(5) = 116$, а наименьшее значение – это $y(2) = -19$.

20. (3 балла) Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{\log_2 x + \log_2(y+1) = 1} \\ \mathbf{\log_3(3x+4) = \log_3(2x+5)} \end{cases}$$

Решение.

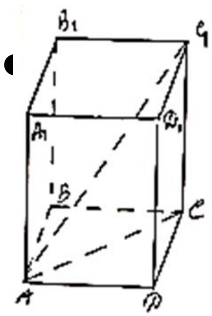
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2(y+1) = 1 \\ \log_3(3x+4) = \log_3(2x+5) \end{cases} \qquad \begin{cases} \log_2(x\cdot(y+1)) = \log_2 2 \\ \log_3(3x+4) = \log_3(2x+5) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\cdot(y+1) = 2 \\ 3x+4 = 2x+5 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\cdot(y+1) = 2 \\ 3x-2x = 5-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\cdot(y+1) = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$x\cdot(y+1) = 2$$
$$1\cdot(y+1) = 2$$
$$y = 2-1$$
$$y = 1$$

Ответ: $(1; 1)$

21. (3 балла) В прямоугольном параллелепипеде $ABCДA_1B_1C_1Д_1$ известны ребра: AC=$\sqrt{61}$, AD =5, AC_1=$\sqrt{142}$. Найдите объем параллелепипеда.



Дано: $ABCДA_1B_1C_1Д_1$ прямоугольный параллелепипед

AC=$\sqrt{61}$, AD =5, AC_1=$\sqrt{142}$

Найти: $V-?$

Решение.

$V = abh$

АВСД – прямоугольник, АС – диагональ прямоугольника, значит ΔACD – прямоугольный, тогда:

$AC^2 = AD^2 + DC^2$, следовательно, $DC^2 = AC^2 - AD^2$

$DC^2 = \left(\sqrt{61}\right)^2 - 5^2 = 61 - 25 = 36$

$DC = \sqrt{36} = 6$

$a = AD = 5$

$b = DC = 6$

AC_1 – диагональ прямоугольного параллелепипеда, значит ΔAC C_1 прямоугольный, тогда:

${AC_1}^2 = AC^2 + {CC_1}^2$, следовательно, ${CC_1}^2 = {AC_1}^2 - AC^2$

${CC_1}^2 = \left(\sqrt{142}\right)^2 - \left(\sqrt{61}\right)^2 = 142 - 61 = 81$

$CC_1 = \sqrt{81} = 9$

$h = CC_1 = 9$

$V = 5 \cdot 6 \cdot 9 = 270$

Ответ: $V = 270$ куб. ед.

22. (3 балла) Найдите решение уравнения:
$\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$. Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$

Решение.

- $\sin^2 x - 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0 \,\Big|: \cos^2 x \neq 0$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x} - \frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$tg^2 x - 2tgx - 3 = 0$, сделаем замену $tgx = t$

$t^2 - 2t - 3 = 0, \qquad D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16, t_{1,2} = \dfrac{2 \pm 4}{2\cdot 1}$

$t_1 = 3;\ t_2 = -1$

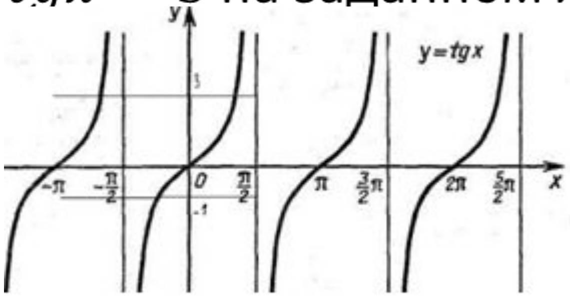
Решением уравнения $tgx = -1$ являются числа $x = arctg\,(-1) + \pi n,\ n\epsilon Z$

$x = -arctg\ 1 + \pi n, n\epsilon Z$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n\epsilon Z.$

Решением уравнение $tgx = 3$ являются числа вида $x = arctg\ 3 + \pi n, n\epsilon Z.$

Начертим график тангенса и на нем отметим линии $tgx = -1$ и $tgx = 3$ на заданном интервале $\left[-\boldsymbol{\pi}; \frac{\boldsymbol{\pi}}{2}\right]$



Мы видим, что верхняя линия 2 раза пересекает график, будет два решения, нижняя линия 1 раз пересекает график, будет одно решение.

Верхняя линия $tgx = 3$ и $x = arctg\,3 + \pi n, n \epsilon Z$

При $n = 0$ получим $x = arctg\,3 + \pi \cdot 0 = arctg\,3$

При $n = -1$ получим$x = arctg\,3 + \pi(-1) = arctg\,3 - \pi$

Нижняя линия $tgx = -1$ и $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \epsilon Z$

При $n = 0$ получим $x = -\frac{\pi}{4} + \pi \cdot (0) = -\frac{\pi}{4}$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4}; arctg\,3; arctg\,3 - \pi$