

Модели в механике. Система отсчета. Траектория, длина пути, вектор перемещения



Кинематика изучает движение тел, не рассматривая причины, которые это движение обуславливают.

Динамика изучает законы движения тел и причины, которые вызывают или изменяют это движение.

Статика изучает законы равновесия системы тел. Если известны законы движения тел, то из них можно установить и законы равновесия.

Физические модели

Материальная точка — тело, обладающее массой, размерами которого в данной задаче можно пренебречь.

Абсолютно твердым называют **тело**, которое ни при каких условиях не может деформироваться и при всех условиях расстояние между двумя точками (или точнее между двумя частицами) этого тела остается постоянным

Виды движения

Поступательное движение — это движение, при котором любая прямая, жестко связанная с движущимся телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

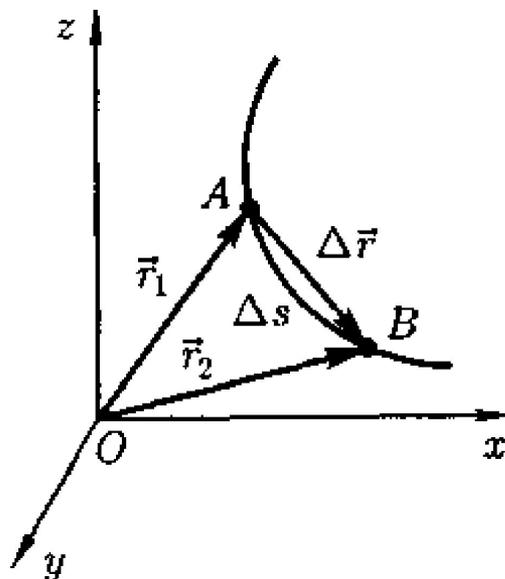
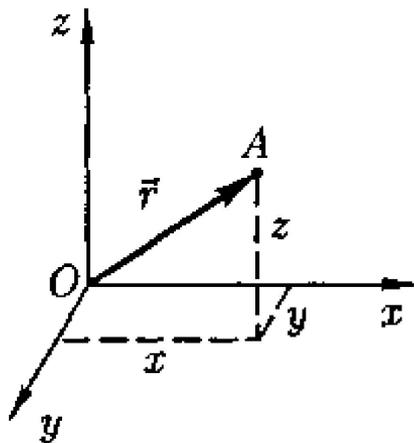
Вращательное движение — это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой **осью вращения**.

кинематические уравнения движения материальной точки.

$$x=x(t), y=y(t), z=z(t), \text{ или } r = r(t)$$

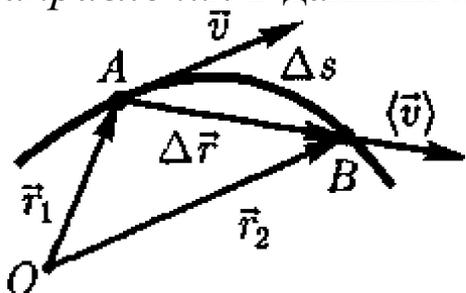
Траектория — линия, описываемая в пространстве движущейся точкой.

Вектор $\Delta r = r_2 - r_1$ проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени (приращение радиуса-вектора точки за рассматриваемый промежуток времени), называется **перемещением**.



СКОРОСТЬ

Векторная величина, которая определяется как *быстрота* движения, так и изменение его *направления* в данный момент времени.



Вектором средней скорости ($\langle \vec{v} \rangle$) называется отношение приращения Δr радиуса-вектора точки к промежутку времени Δt :

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость \vec{v} , есть векторная величина, определяемая первой производной радиуса-вектора движущейся точки по времени.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

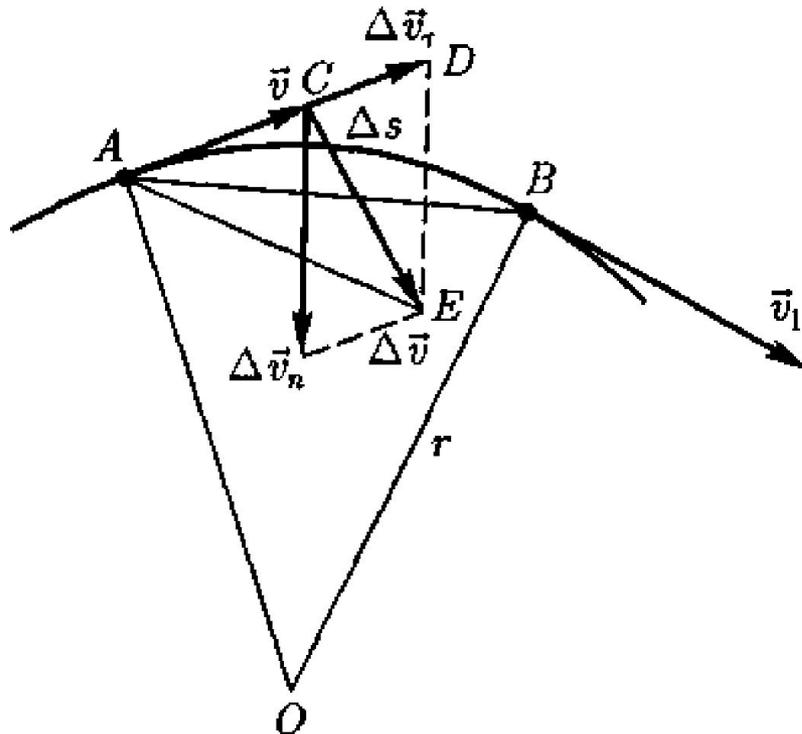
Модуль мгновенной скорости равен первой производной пути по времени: $v = ds/dt$.
 Если выражение $ds = vdt$ проинтегрировать по времени в пределах от t до $t + \Delta t$, то найдем длину пути, пройденного точкой за время Δt :

$$s = \int_t^{t+\Delta t} v dt.$$

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

Ускорение и его составляющие

Физической величиной, характеризующей быстроту изменения скорости по модулю и направлению, является **ускорение**.



Средним ускорением неравномерного движения в интервале от t до $t + \Delta t$ называется векторная величина, равная отношению изменения скорости Δv к интервалу времени Δt :
Мгновенным ускорением a (ускорением) материальной точки в момент времени t будет

п

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \langle \vec{a} \rangle = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Ускорение a есть векторная величина, определяемая первой производной скорости по времени.

Разложим вектор AD ; на две составляющие. Для этого из точки A по направлению скорости v отложим вектор AD , по модулю равный v_1 . Вектор CD , равный Δv_τ , определяет изменение скорости за время Δt по модулю: $\Delta v_\tau = v_1 - v_2$. Вторая составляющая Δv_n вектора характеризует изменение скорости за время Δt по направлению.

Тангенциальная составляющая ускорения равна первой производной по времени от модуля скорости

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_\tau}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

нормальная составляющая ускорения направлена по главной нормали к траектории к центру ее кривизны и определяется

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_n}{\Delta t} = \frac{v^2}{r}$$

Полное ускорение тела есть геометрическая сумма тангенциальной и нормальной составляющих

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Тангенциальная составляющая ускорения характеризует быстроту изменения модуля скорости (направлена по касательной к траектории), а нормальная составляющая ускорения — быстроту изменения направления скорости (направлена по главной нормали к центру кривизны траектории).

Составляющие a_τ и a_n перпендикулярны друг другу

Классификация механического движения

1. Прямолинейное равномерное движение: $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{0}$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$
2. Прямолинейное равнопеременное движение $\mathbf{a}_\tau = \mathbf{const} = \mathbf{a}$, $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, при $v = v_0$ получим $v = v_0 + at$, тогда длина пройденного пути определяется

$$s = \int_0^t v dt = \int_0^t (v_0 + at) dt = v_0 t + \frac{at^2}{2};$$

3. Прямолинейное движение с переменным ускорением

$$\mathbf{a}_\tau = f(t), \mathbf{a}_n = \mathbf{0}$$

4. Равномерное движение по окружности с постоянным радиусом R

$$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{0}, \mathbf{a}_n = \mathbf{const} = v^2/R$$

5. равномерное криволинейное движение

$$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{0}, \mathbf{a}_n \neq \mathbf{0}$$

6. криволинейное равнопеременное движение

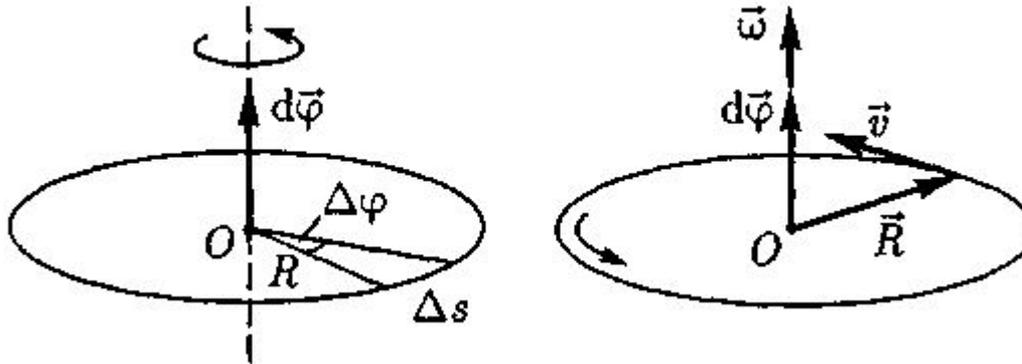
$$\mathbf{a}_\tau = \mathbf{const}, \mathbf{a}_n \neq \mathbf{0}$$

7. Криволинейное движение с переменным ускорением

$$\mathbf{a}_\tau = f(t), \mathbf{a}_n \neq \mathbf{0}$$

Угловая скорость и угловое ускорение

Угловой скоростью называется векторная величина, определяемая первой производной угла поворота тела по времени:



$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad \text{Вектор } \omega \text{ направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта, т.е. так же, как и вектор } \Delta \varphi$$

Линейная скорость точки определяется

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{R \Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R\omega, \quad v = \omega R.$$

Если $\omega = \text{const}$, то вращение равномерное и его можно характеризовать **периодом вращения** T — временем, за которое точка совершает один полный оборот, т. е. поворачивается на угол 2π . Так как промежутку времени $\Delta t = T$ соответствует

$$\Delta \varphi = 2\pi, \text{ то } \omega = \frac{2\pi}{T}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

$$\text{Частота вращения} \quad n = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

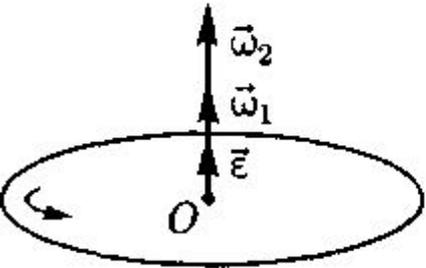
Откуда

$$\omega = 2\pi n.$$

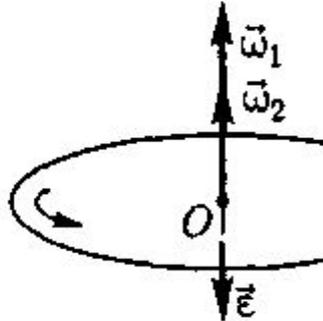
Угловое ускорение

векторная величина, определяемая первой производной угловой скорости по времени:

$$\vec{\epsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$



$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} > 0$$



$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} < 0$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости. При ускоренном движении вектор ϵ сонаправлен вектору ω , при замедленном — противоположен ему.

Тангенциальное ускорение

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, \quad v = \omega R \quad a_{\tau} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt} = R\epsilon.$$

Нормальное ускорение

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{\omega^2 R^2}{R} = \omega^2 R.$$

В случае равнопеременного движения точки по окружности ($\epsilon = \text{const}$)

$$\omega = \omega_0 \pm \epsilon t, \quad \varphi = \omega_0 t \pm \frac{\epsilon t^2}{2}, \quad \omega_0 \text{ — начальная угловая скорость}$$

ДИНАМИКА

Динамические характеристики поступательного движения (сила, масса, импульс).

Масса тела — физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая ее инерционные (*инертная масса*) и гравитационные (*гравитационная масса*) свойства (1кг).

Сила — это векторная величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры ($1\text{Н} = 1 \text{ кг}\cdot\text{м}/\text{с}^2$).

Векторная величина численно равная произведению массы материальной точки на ее скорость и имеющая направление скорости, называется *импульсом (количеством движения) этой материальной точки* $\mathbf{P} = m\mathbf{v}$ [кг·м/с]

I Закон Ньютона - Всякая материальная точка (тело) сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока *воздействие* со стороны других тел не заставит ее изменить это состояние, называется инертностью (закон инерции).

Первый закон Ньютона утверждает существование инерциальных систем отсчета.

II Закон Ньютона (основной закон динамики поступательного движения) - это закон об изменении механического движения материальной точки (тела) под действием приложенных к ней сил.

$$1) \quad a \sim F \quad (m = \text{const}).$$

$$2) \quad a \sim \frac{1}{m} \quad (F = \text{const}). \quad \vec{a} \sim \frac{k\vec{F}}{m}.$$

В системе СИ $k=1$ тогда получим $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$

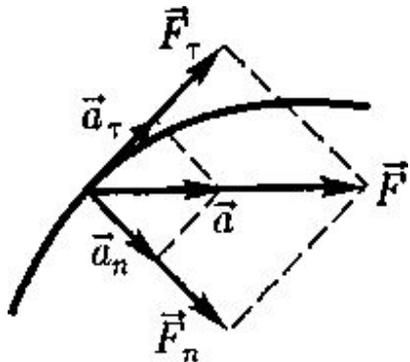
II Закон Ньютона или уравнение движения материальной точки в общем виде можно сформулировать как $Fdt = dP$. Изменение импульса силы (Fdt) равно изменению импульса тела (dP)

Если на материальную точку одновременно действуют несколько сил F_1, F_2, \dots, F_n то ее ускорение

$$\vec{a} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i, \quad \text{где } \vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m}.$$

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из этих сил сообщает материальной точке ускорение согласно второму закону Ньютона, как будто других сил не было (*принцип независимости действия сил*).

Силы и ускорения можно разлагать на составляющие, использование которых приводит к существенному упрощению решения задач.

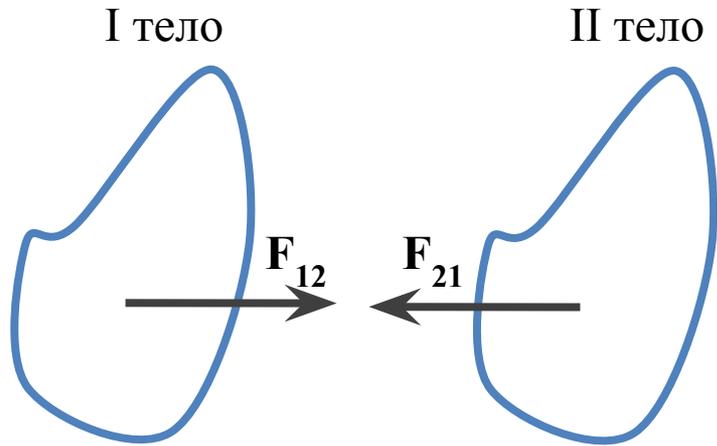


$$F_t = ma_t = m \frac{dv}{dt};$$

$$F_n = ma_n = \frac{mv^2}{R} = m\omega^2 R.$$

III ЗАКОН НЬЮТОНА

Всякое действие материальных точек (тел) друг на друга носит характер взаимодействия; Силы, с которыми действуют друг на друга материальные точки, всегда равны по модулю, противоположно направлены и действуют вдоль прямой, соединяющей эти точки:



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

Третий закон Ньютона позволяет осуществить переход от динамики *отдельной материальной точки* к динамике *системы материальных точек*.

Силы F_{12} и F_{21} приложены к разным материальным точкам.

Совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое, называется **механической системой**.

Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называются внутренними.

Силы, с которыми на материальные точки системы действуют внешние тела, называются внешними.

Механическая система тел, на которую не действуют внешние силы, называется **замкнутой (или изолированной)**.

Центр масс

Импульс системы может быть выражен через скорость ее центра масс. **Центром масс (или центром инерции)** системы материальных точек называется воображаемая точка C , положение которой характеризует распределение массы этой системы. Ее радиус-вектор равен

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{m},$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

Масса системы

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i}{m}.$$

Скорость центра масс определяется как

Учитывая, что $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$, а $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i$ есть

импульс \vec{p} системы, можно записать

$$\vec{p} = m \vec{v}_C,$$

Центр масс системы движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе. **Закон движения центра масс.**

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n,$$

Центр масс замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо остается неподвижным.

МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

Момент инерции

Момент инерции тела — мера инертности твердых тел при вращательном движении. Его роль такая же, что и массы при поступательном движении.

Моментом инерции системы (тела) относительно данной оси называется физическая величина, равная сумме произведений масс n материальных точек системы на квадраты их расстояния до рассматриваемой оси вращения:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2.$$

$$J = \int r^2 dm,$$

Теорема Штейнера: момент инерции тела J относительно произвольной оси равен моменту его инерции J_c относительно параллельной оси, проходящей через центр масс C тела, сложенному с произведением массы m тела на квадрат расстояния a между осями:

$$J = J_c + m \cdot a^2$$

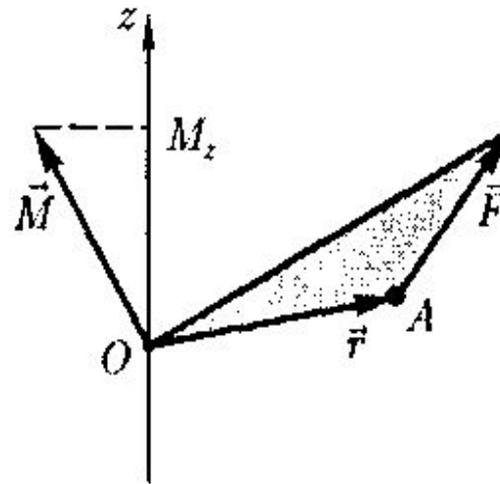
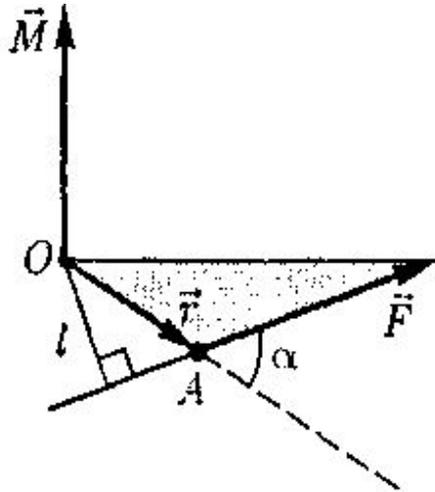
Момент силы. Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

Моментом силы относительно неподвижной точки O называется физическая величина \vec{M} , определяемая векторным произведением радиуса-вектора \vec{r} , проведенного из точки O в точку A приложения силы, на силу \vec{F} .

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \text{ по модулю } M = F \cdot r \cdot \sin\alpha$$

уравнение динамики вращательного движения тв. тела относительно неподвижной оси

$$M_z = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon.$$



Моментом импульса (количества движения) м. т. A относительно неподвижной точки O называется физ. величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора \vec{r} , на импульс $m\vec{v}$

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}] = [\vec{r} \times m\vec{v}]$$

Ур. Дин. Вр. Дв. тв.т. относительно неподвижной оси: производная момента импульса твердого тела относительно оси равна моменту сил относительно той же оси.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad \frac{dL_z}{dt} = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \varepsilon = M_z, \quad \frac{dL_z}{dt} = M_z.$$

Энергия, работа, мощность

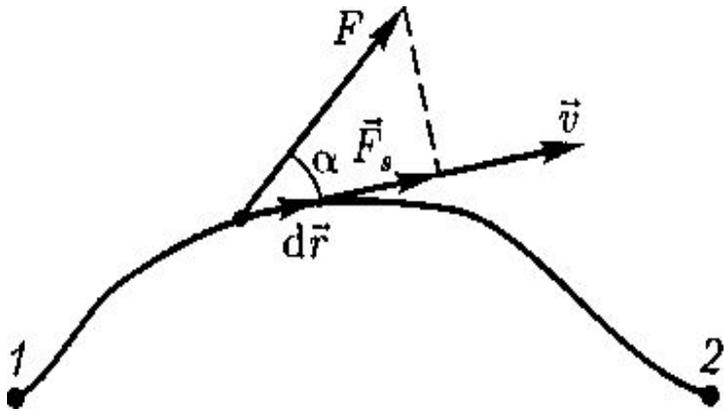
Энергия — универсальная мера различных форм движения и взаимодействия.

Работа силы — это количественная характеристика процесса обмена энергией между взаимодействующими телами.

Работа силы равна произведению проекции силы F_s на направление перемещения ($F_s = F \cos \alpha$), умноженной на перемещение точки приложения силы: $A = F_s S = F \cdot s \cdot \cos \alpha$

Элементарной работой силы \mathbf{F} на перемещении $d\mathbf{r}$ называется скалярная величина

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F \cdot \cos \alpha \cdot dS = F_s dS$$



Вычисление этой работы на участке траектории от точки 1 до точки 2 когда $F = \text{const}$

$$A = \int_1^2 F ds \cos \alpha = F \cos \alpha \int_1^2 ds = F s \cos \alpha,$$

Скорость совершения работы характеризуется мощностью

$$N = \frac{dA}{dt} \quad \text{или}$$

$$N = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \vec{v},$$

$$[A] = 1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot \text{м},$$

$$[N] = 1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$$

Кинетическая энергии

Кинетическая энергия механической системы — энергия механического движения этой системы. Элементарная работа dA совершаемой силой \mathbf{F} на возрастании скорости от 0 до v идет на увеличения кинетической энергии dT

$$dA = dT$$

Используя II закон Ньютона $F = m \frac{dv}{dt}$ и умножая на радиус - вектор $d\mathbf{r}$ получим

$$F d\mathbf{r} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} d\mathbf{r} = dA = m \mathbf{v} d\mathbf{v} = dT$$

Проинтегрировав от 0 до v получим

$$T = \int_0^v m v dv = \frac{mv^2}{2}. \quad T = \frac{mv^2}{2}.$$

Тело массой m двигающегося со скоростью v обладает **кинетической энергией**, которая является функцией состояния механического движения.

Кинетическая энергия механической системы равна сумме кинетических энергий тел, входящих в систему. Кинетическая энергия системы из n *материальных точек* равна

$$T = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Потенциальная энергия

Работа, совершаемая при перемещении тел под воздействием силовых полей не зависит от траектории перемещения, а зависит от начального и конечного положения тел. Такие поля называются потенциальными, а силы консервативными.

П.Э. – механическая энергия системы тел, определяется взаимным расположением тел и характером взаимодействия между ними.

Работа совершается за счет убыли П.Э. $dA = -d\Pi$.

Учитывая, что $dA = F \cdot dr$, можно вычислить П. Э. как

$$\Pi = -\int \vec{F} d\vec{r} + C,$$

Консервативные силы определяются

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}, \quad \text{или} \quad \vec{F} = -\text{grad } \Pi,$$

$$\text{где} \quad \text{grad } \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \vec{k} \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k}.$$

Полная механическая энергия системы — это энергия механического движения и взаимодействия, равна сумме кинетической и потенциальной энергий

$$E = T + \Pi$$

Закон сохранения механической энергии

Рассмотрим систему состоящей из n материальных точек. Согласно осн. 3-му Дин. (II Ньютона)

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}'_1 + \vec{F}_1 + f_1,$$

Умножая на $d\vec{r}$ и учитывая, что $d\vec{r}_i = \vec{v}_i dt$

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}'_2 + \vec{F}_2 + f_2,$$

$$m_1(\vec{v}_1 d\vec{v}_1) - (\vec{F}'_1 + \vec{F}_1) d\vec{r}_1 = f_1 d\vec{r}_1,$$

$$\dots$$

$$m_n \frac{d\vec{v}_n}{dt} = \vec{F}'_n + \vec{F}_n + f_n.$$

$$\sum_{i=1}^n m_i (v_i dv_i) - \sum_{i=1}^n (F'_i + F_i) dr_i = \sum_{i=1}^n f_i dr$$

Приращение **Кин. Эн.**

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_i d\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) = dT,$$

Эл. работа внеш. и внут. консервативных сил равна приращению **Пот. Эн.**

$$\sum_{i=1}^n (F'_i + F_i) dr_i = d\Pi$$

Полная эл. работа $dA = dT + d\Pi$, откуда

$$A_{12} = \int_1^2 d(T + \Pi)$$

Если внеш. неконсервативные силы отсутствуют тогда $d(T + \Pi) = 0$, $T + \Pi = \text{const}$ полная мех. эн. системы сохраняется. **Закон сохранения механической энергии.** Закон сохранения механической энергии связан с **однородностью времени** проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчета времени.

В системе, в которой действуют неконсервативные силы, **3-н Сохр. Мех. Эн.** не соблюдается – Мех. эн. превращается в другой вид энергии. **Энергия никогда не исчезает и не появляется вновь, она лишь превращается из одного вида в другой. Закон сохранения и превращения энергии.**

Работа и кинетическая энергия вращения

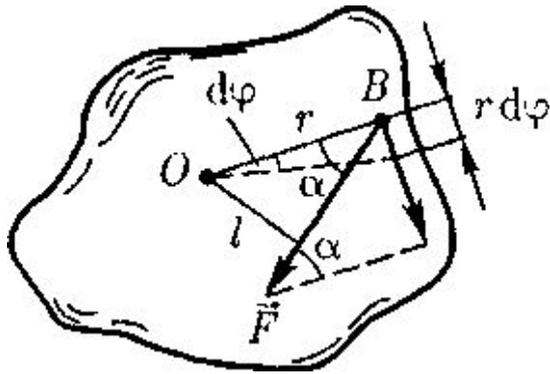
Работа, силы приложенной в некоторой точке абсолютного тв. тела тратится на поворот всего тела

$$dA = F \sin \alpha r d\varphi.$$

Учитывая, что момент силы $\mathbf{M} = [\mathbf{F} \times \mathbf{r}]$, а модуль $M = F \cdot r \cdot \sin \alpha$ получим $dA = \mathbf{M} \cdot d\boldsymbol{\varphi}$. Работа при вращении идет на увеличении кинетической энергии.

Для абсолютно тв. т. с n мат. точками кин. эн. равна

$$T_{\text{вр}} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \dots + \frac{m_n v_n^2}{2}, \quad \text{или} \quad T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_i^2}{2}.$$



Учитывая, что

$$\omega = \frac{v_1}{r_1} = \frac{v_2}{r_2} = \dots = \frac{v_n}{r_n}$$

Получим

$$T_{\text{вр}} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i \omega^2}{2} r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \frac{J_z \omega^2}{2},$$

Из осн. 3-на дин. вращ. движ. $M = \frac{dL}{dt}$ В замкнутой системе момент внешних сил равен $\mathbf{M} = 0$, следовательно $\mathbf{L} = \text{const}$

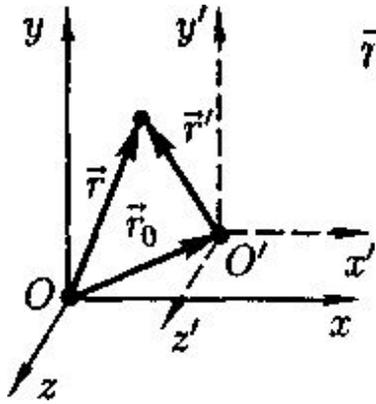
Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, т.е. не изменяется с течением времени — фундаментальный закон природы. Он связан со свойством симметрии пространства — его изотропностью, т. е. с инвариантностью физических законов относительно выбора направления осей координат системы отсчета.

Основные величины и уравнения, определяющие вращение тела вокруг неподвижной оси и его поступательное движение

Поступательное движение		Вращательное движение	
Масса	m	Момент инерции	J
Скорость	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость	$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\phi}}{dt}$
Ускорение	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение	$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила	\vec{F}	Момент силы	M_z или \vec{M}
Импульс	$\vec{p} = m\vec{v}$	Момент импульса	$L_z = J_z\omega$
Основное уравнение динамики	$\vec{F} = m\vec{a};$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики	$M_z = J_z\varepsilon;$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа	$dA = F_s ds$	Работа	$dA = M_z d\phi$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Кинетическая энергия	$\frac{J_z\omega^2}{2}$

ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ (ЧАСТНОЙ) ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Преобразования Галилея. Механический принцип относительности



$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{r}_0 = \vec{r}' + \vec{u}t. \quad \text{или} \quad x = x' + u_x t, \quad y = y' + u_y t, \\ z = z' + u_z t.$$

Преобразование Галилея, в частности, если система K'

движется со скоростью v вдоль оси x , тогда

$$x = x' + vt, \quad y = y', \quad z = z'. \quad \text{Учитывая, что } t=t', \text{ получим}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}, \quad \text{Правило сложения скоростей в клас. мех.}$$

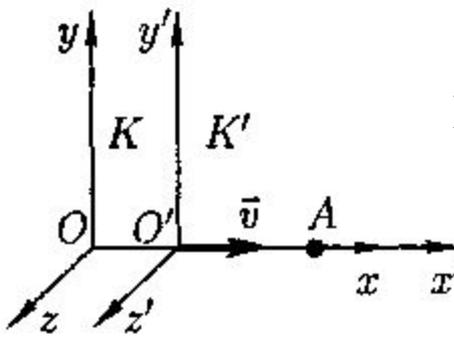
Ускорение в системе K $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{u})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}'.$

Если на тело не действуют другие силы, уравнения динамики при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой формулируются одинаково. **принцип относительности Галилея**

I. Принцип относительности: никакие опыты (механические, электрические, оптические), проведенные внутри данной инерциальной системы отсчета, не дают возможности обнаружить, покоится ли эта система или движется равномерно и прямолинейно; все законы природы инвариантны по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

II. Принцип инвариантности скорости света: скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источника света или наблюдателя и одинакова во всех инерциальных системах отсчета. Скорость света — фундаментальное свойство природы.

Преобразования Лоренца



Инерциальная система K' движется с постоянной скоростью $v = \text{const}$ относительно системы K . Световой импульс доходит от t . O до t . A ($x = ct$) и от O' до A $x' = ct'$, $x' - x = c(t' - t)$.

Т.к. $x \neq x' \rightarrow t \neq t'$ отсчет времени имеет относительный характер

Преобразования

Галилея

$$K \rightarrow K'$$

$$\begin{cases} x' = x - vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t, \end{cases}$$

$$K' \rightarrow K$$

$$\begin{cases} x = x' + vt, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = t', \end{cases}$$

Лоренца

$$K \rightarrow K'$$

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{cases}$$

$$K' \rightarrow K$$

$$\begin{cases} x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ y = y', \\ z = z', \\ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \end{cases}$$

$$\beta = \frac{v}{c}.$$

Из преобразований Лоренца следует, что как расстояние, так и промежуток времени между двумя событиями меняются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, а в преобразованиях Галилея эти величины считались абсолютными, не изменяющимися при переходе от системы к системе. Также как пространственные, так и временные преобразования не являются независимыми т.е. устанавливается взаимосвязь пространства и времени. Теория Эйнштейна рассматривает неразрывно связанные пространственные и временные координаты, образующие четырехмерное пространство-время.

Основной закон релятивистской динамики материальной точки

Из принципа относительности Эйнштейна, утверждающего инвариантность всех законов природы при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, следует условие инвариантности уравнений физических законов относительно преобразований Лоренца.

Основной закон динамики Ньютона оказывается также инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Основной закон релятивистской динамики материальной точки имеет вид

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \vec{v} \right), \text{ или } \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \text{ где } \vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad \text{релятивистский импульс материальной точки}$$

Элементарная работа силы на малом перемещении в релятивистской механике равна приращению кинетической энергии $dT = dA$.

$$dA = \frac{mv dv}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = d \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad \text{Тогда} \quad dT = d \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right).$$

Полная кинетическая энергия релятивистской частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

Статистический и термодинамический методы.

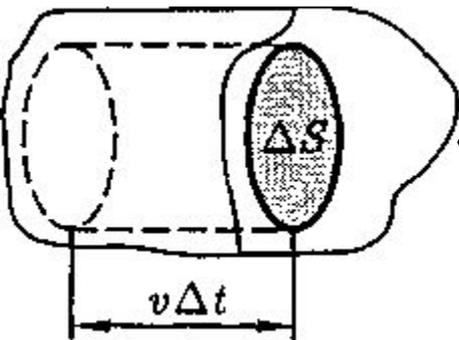
Состояние некоторой массы газа определяется тремя термодинамическими параметрами: давлением P , объемом V и температурой T . Между этими параметрами существует определенная связь $f(p, V, T) = 0$,

Уравнением состояния идеального газа, называемым также уравнением Клапейрона—Менделеева для массы m газа $pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT$, $k = \frac{R}{N_A} = 1,38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К.

$$p = \frac{RT}{V_m} = \frac{kN_A T}{V_m} = nkT, \quad \text{где} \quad \frac{N_A}{V_m} = n$$

$P = nkT$ давление идеального газа при данной температуре пропорционально концентрации его молекул

Для получения осн. Ур-я мол.-кин. Теории рассмотрим движ. Мол в объеме V . Расчеты показывают, что $p = \frac{1}{3} n m_0 \langle v_{кв} \rangle^2$, где



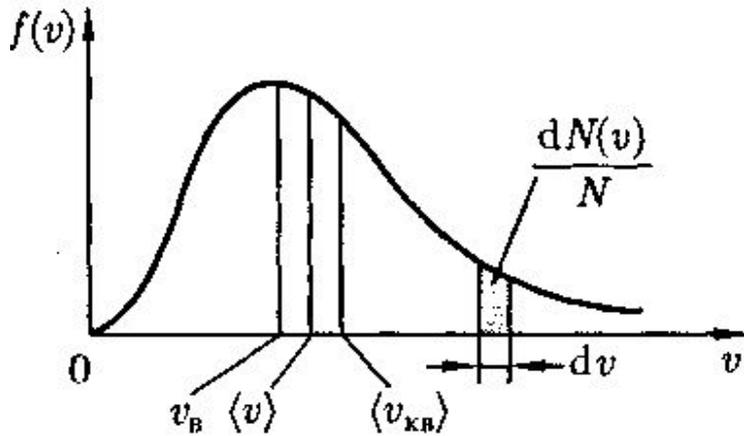
$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{m_0 N_A}} = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}$$

Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа пропорц. термод. темп-ре и зависит только от неё.

$$\langle E_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \langle v_{кв} \rangle^2}{2} = \frac{3}{2} kT$$

Термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.

Закон Максвелла о распределении молекул идеального газа по скоростям и энергиям теплового движения



Закон Максвелла Функция $f(v)$ определяет относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от v до $v+\Delta$.

$$\frac{dN(v)}{N} = f(v)dv,$$

вычисление $f(v)$ показывает распределение молекул ид. газа по скоростям

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2 e^{-\frac{m_0 v^2}{2kT}}$$

Скорость, при которой функция распределения молекул идеального газа по скоростям максимальна, называется **наиболее вероятной скоростью**

$$v_B = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$

Средняя арифметическая скорость молекулы (v) вычисляется

$$\langle v \rangle = \frac{1}{N} \int_0^{\infty} v dN(v) = \int_0^{\infty} v f(v) dv. \quad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \quad \langle v \rangle = 1,33v_B \quad \langle v_{kv} \rangle = 1,22v_B$$

Исходя из знач. скоростей мол. можно найти распределение молекул газа по значениям кинетической энергии

$$f(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \epsilon^{1/2} e^{-\frac{\epsilon}{kT}}.$$

Средняя кинетическая энергия молекулы идеального газа

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT$$

Барометрическая формула. Распределение Больцмана

Молекулы любого газа находятся в потенциальном поле тяготения Земли. Тяготение, с одной стороны, и тепловое движение молекул — с другой, приводят к некоторому стационарному состоянию газа, при котором давление газа с высотой убывает. предполагаем, что поле тяготения однородно, температура постоянна и масса всех молекул одинакова. Атмосферное давление на высоте h равно p , высоте $h + dh$ оно равно $P + dP$ при $dh > 0$ $dp < 0$, так как давление с высотой убывает). Разность давлений p и $p + dp$ равна $p - (p + dp) = \rho g dh, dP = -\rho g dh$ или учитывая осн. ур. мол. кин. теории можно получить

$$dp = -\frac{Mg}{RT} p dh, \text{ или } \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh.$$

С изменением высоты от h_1 до h_2 давление изменяется от p_1 до p_2

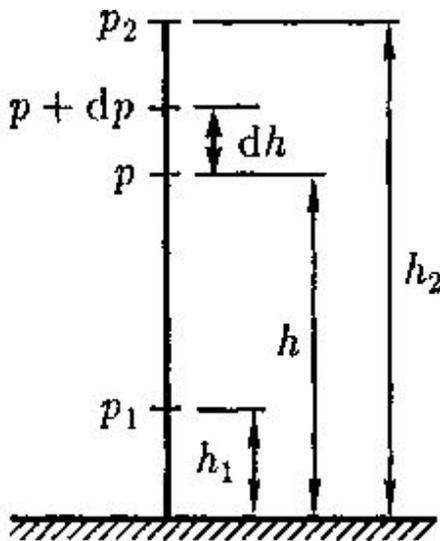
$$\int_{p_1}^{p_2} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{h_1}^{h_2} dh, \quad \ln \frac{p_2}{p_1} = -\frac{Mg}{RT} (h_2 - h_1)$$

$$p_2 = p_1 e^{-\frac{Mg(h_2 - h_1)}{RT}}. \quad \text{Барометрическая формула}$$

Учитывая, что $P = nkT$ получим $n = n_0 e^{-\frac{m_0 g h}{kT}},$ или

$$n = n_0 e^{-\frac{\Pi}{kT}}, \text{ где } \Pi = mgh \text{ потенциальная энергия молекулы в поле тяготения}$$

Распределением Больцмана для внешнего потенциального поля.



ЭЛЕКТРОСТАТИКА

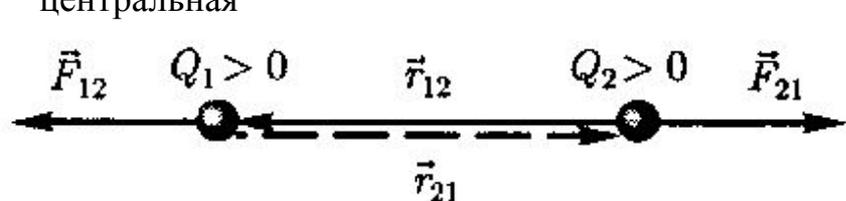
Закон сохранения электрического заряда.

Закон Кулона. Электростатическое поле. Напряженность электростатического поля

Алгебраическая сумма электрических зарядов любой замкнутой системы *остаётся неизменной, какие бы процессы ни происходили внутри этой системы. закон сохранения заряда*

Электрический заряд — величина *релятивистски инвариантная, т.е. не зависит от системы отсчета, следовательно, не зависит от того, движется этот заряд или покоится.*

Закон Кулона: сила взаимодействия F между двумя неподвижными точечными зарядами, находящимися в вакууме, пропорциональна зарядам q_1 и q_2 и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними: центральная



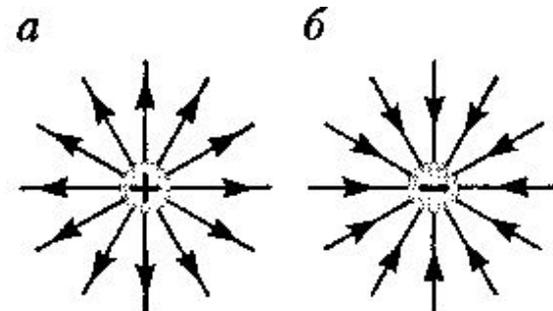
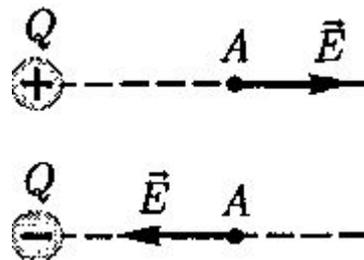
$$F_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

В пространстве, окружающем электрические заряды, существует **силовое поле** (эл. поле), посредством которого осуществляется взаимодействие заряженных тел.

Силовой характеристикой электростатического поля является **Напряженность** электростатического поля в данной точке есть физическая величина, определяемая силой, действующей на пробный единичный **+** заряд, помещенный в эту точку поля:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

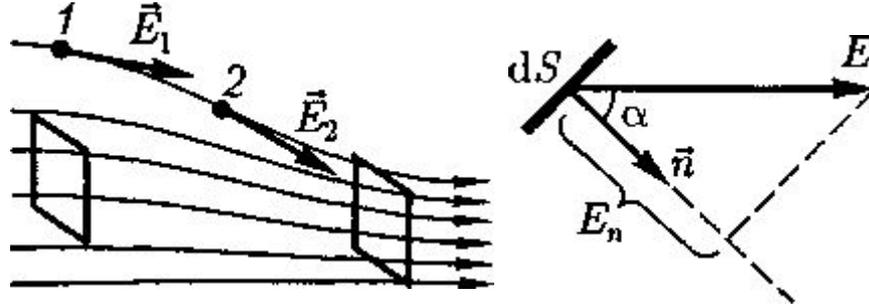
Если поле создается **+** зарядом, то вектор E *направлен вдоль радиуса-вектора от заряда во внешнее пространство*; если поле создается **-** зарядом, то вектор E *направлен к заряду*



Направление вектора E *совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд. Единица напряженности электростатического поля — ньютон на кулон (Н/Кл)*

ПОТОК ВЕКТОРА НАПРЯЖЕННОСТИ. ПРИНЦИП СУПЕРПОЗИЦИИ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ. ПОЛЕ ДИПОЛЯ

Число линий напряженности, пронизывающих элементарную площадку dS , нормаль n к которой образует угол α с вектором E , равно $\Phi = E \cdot dS \cdot \cos \alpha$. Для произвольной замкнутой поверхности S поток вектора E сквозь эту поверхность



$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \vec{E} d\vec{S},$$

Единица потока вектора напряженности электростатического поля ($\text{В} \cdot \text{м}$).

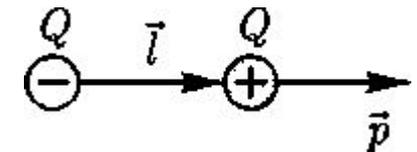
Сила взаимодействия двух точечных зарядов не изменяется в присутствии других зарядов. Результирующая сила F , действующая со стороны поля на пробный заряд Q_0 , равна векторной сумме сил F_i , приложенных к нему со стороны каждого из зарядов Q_i .

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i, \quad \text{Учитывая, что} \quad \mathbf{F} = q\mathbf{E} \quad \vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i.$$

Принцип суперпозиции электростатических полей, напряженность E результирующего поля, создаваемого системой зарядов, равна **геометрической сумме напряженностей полей**, создаваемых в данной точке каждым из зарядов в отдельности.

Электрический диполь — система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов $(+Q, -Q)$, расстояние l между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля.

Вектор, направленный по оси диполя от $-$ заряда к $+$ и равный расстоянию между ними, называется **плечом диполя l** . Вектор $P = |Q|l$ совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению заряда на плечо, называется **электрическим моментом диполя или дипольным моментом**. Результирующее поле диполя в произвольной точке определяется

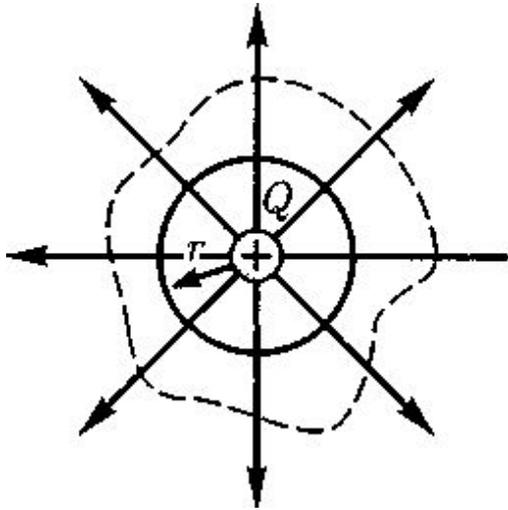


$$\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-,$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

Поток вектора напряженности для замкнутой поверхности любой формы, охватывающую точечный заряд Q равен

$$\Phi_E = \oint_S E_n dS = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$



Знак потока совпадает со знаком заряда Q . Для n зарядов согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i$ тогда поток определится

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \left(\sum_i \vec{E}_i \right) d\vec{S} = \sum_i \oint_S \vec{E}_i d\vec{S}.$$

Учитывая, что $\oint_S \vec{E}_i d\vec{S} = \frac{Q_i}{\epsilon_0}$ получим $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i.$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме: поток вектора напряженности электростатического поля в вакууме сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности зарядов, деленной на ϵ_0 . Если заряды распределены в объеме тогда плотность зарядов

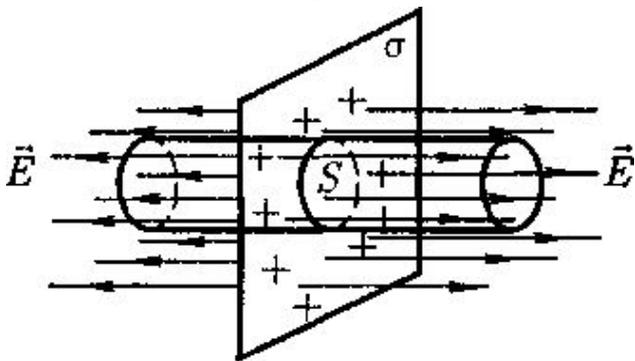
$$\rho = \frac{dQ}{dV} \quad \text{или} \quad \text{суммарный заряд} \quad Q = \int \rho dV$$

теорему Гаусса можно записать так $\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV.$

Применение т. Гаусса к расчету некоторых электростатических полей в вакууме

Вычисление напряженности поля системы электрических зарядов с помощью т. Гаусса

1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости. Бесконечная плоскость заряжена с постоянной *поверхностной плотностью* $+\sigma$

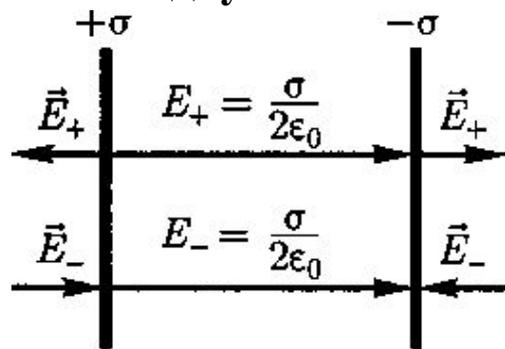


$$d\sigma = \frac{dQ}{dS}$$

Согласно теореме Гаусса, поле равномерно заряженно

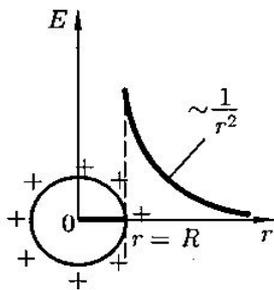
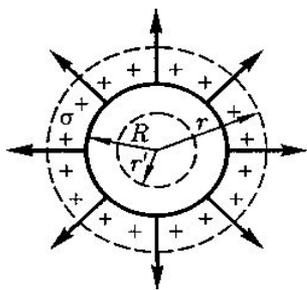
$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \text{ородно}$$

2. Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей



Результирующая напряженность поля в области между плоскостями описывается формулой, $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. а вне объема, ограниченного плоскостями, равна нулю.

3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности



Если $r > R$, то внутрь поверхности попадает весь заряд Q , создающий эл. поле, по теореме Гаусс

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R).$$

Если $r < R$, то замкнутая поверхность не содержит внутри зарядов, поэтому внутри равномерно заряженной сферической поверхности электростатическое поле отсутствует $E = 0$

4. Поле объемно заряженного шара.

Шар радиусом R с общим зарядом Q заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = \frac{dQ}{dV}$
Учитывая, что

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \text{получим} \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r' \quad (r' \leq R)$$

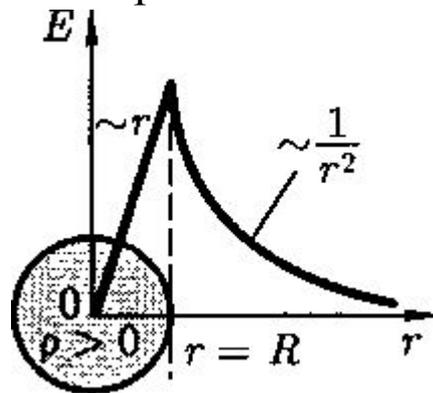
напряженность поля вне равномерно заряженного шара

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R).$$

а внутри него изменяется линейно с расстоянием r'

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} r' \quad (r' \leq R)$$

График зависимости E от r



5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра (нити).

напряженность поля вне равномерно заряженного бесконечного цилиндра определяется выражением

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\tau}{r} \quad (r \geq R).$$

внутри цилиндра поле отсутствует ($E = 0$).

где $\tau = \frac{dQ}{dl}$ линейная плотность, R — внутренний радиус цилиндра, r — расстояние до рассматриваемой точки.

Циркуляция вектора напряженности электростатического поля

в электростатическом поле точечного заряда Q из точки 1 в точку 2 вдоль произвольной траектории перемещается другой точечный заряд Q_0 , то сила, приложенная к заряду, совершает работу. Работа силы F на элементарном перемещении $d\vec{l}$ равна

$$dA = \vec{F} d\vec{l} = F dl \cos \alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r^2} dl \cos \alpha.$$

Так как $dl \cos \alpha = dr$, то

$$dA = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r^2} dr.$$

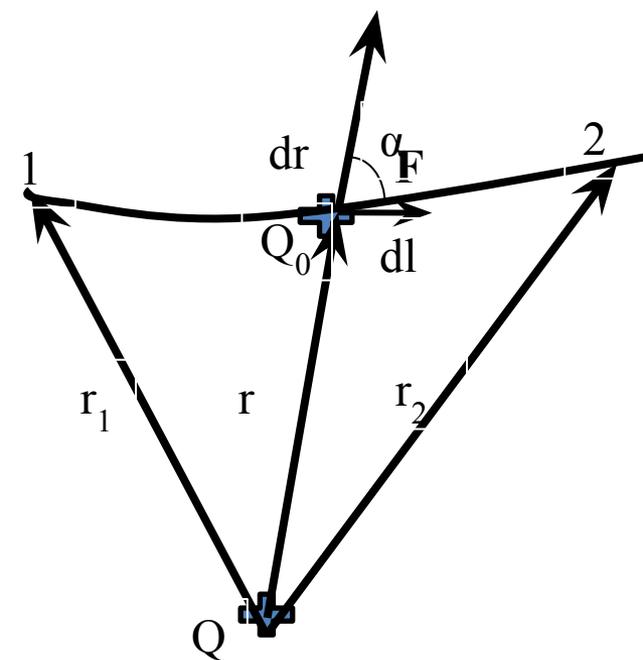
$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} dA = \frac{QQ_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{QQ_0}{r_1} - \frac{QQ_0}{r_2} \right)$$

Работа при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2 не зависит от траектории перемещения, а определяется только положениями начальной 1 и конечной 2 точек. Следовательно, электростатическое поле точечного заряда является **потенциальным**, а **электростатические силы — консервативными**. Работа, совершаемая при перемещении электрического заряда во внешнем электростатическом поле по любому замкнутому пути L , равна 0.

Учитывая работа сил по перемещению единичного \oplus заряда равна $E dl$, тогда можно записать

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_t dl = 0.$$

Выражает **циркуляцию вектора напряженности** эл.стат. поля, которая вдоль любого замкнутого контура равна нулю. Из этого следует, что линии напряженности электростатического поля не могут быть замкнутыми, они начинаются и кончаются на зарядах или же уходят в бесконечность.



Потенциал электростатического поля

Работу сил электростатического поля можно представить как разность потенциальных энергий, которыми обладает точечный заряд Q_0 в начальной и конечной точках поля заряда Q :

$$A_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_1} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r_2} = U_1 - U_2, \Rightarrow \text{потенциальная энергия заряда } Q_0 \text{ в поле заряда } Q \text{ равна}$$

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{QQ_0}{r} + C.$$

Для системы из n точечных зарядов

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = Q_0 \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{4\pi\epsilon_0 r_i}.$$

Отношение U к Q_0 не зависит от Q_0 является энергетической характеристикой электростатического поля, называемой потенциалом

$$\varphi = U/Q_0$$

Потенциал в какой-либо точке электростатического поля есть физическая величина, определяемая потенциальной энергией единичного положительного заряда, помещенного в эту точку.

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}.$$

Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2 может быть представлена как $A_{12} = U_1 - U_2 = Q_0(\varphi_1 - \varphi_2)$ равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках.

Работа сил поля при перемещении заряда Q_0 из точки 1 в точку 2 может быть записана также в виде

$$A_{12} = \int_1^2 Q_0 \vec{E} d\vec{l} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} dl = \int_1^2 E_l dl$$

При перемещении заряда из данной т. поля в ∞

$$\varphi = \frac{A_\infty}{Q_0}.$$

Т.о. **потенциал** — физическая величина, определяемая работой по перемещению единичного $+$ заряда при удалении его из данной точки поля на бесконечность.

Для n зарядов

$$\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{r_i}.$$

Для n зарядов

Напряженность как градиент потенциала. Эквипотенциальные поверхности

Элементарная работа по перемещению *единичного* точечного \oplus заряда из одной точки поля в другую вдоль оси x равна $dA = \vec{F} \cdot d\vec{x} = q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{x}$, с другой стороны *та же работа* $dA = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$ Приравняв получим

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

взаимосвязь между напряженностью электростатического поля — **силовой характеристикой поля**, и потенциалом — **энергетической характеристикой поля**.

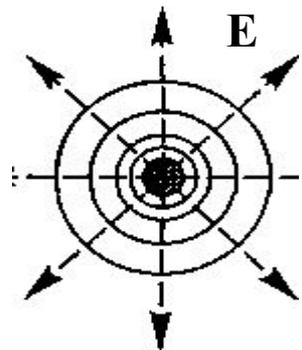
Для направлений Y Z полный вектор напряженности определяется как

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \right), \quad \text{или} \quad \vec{E} = -\text{grad} \varphi \dots \dots = -\nabla \varphi$$

Знак « \rightarrow » определяется тем, что вектор напряженности E поля направлен в сторону убывания потенциала.

Эквипотенциальные поверхности — поверхности, во всех точках которых потенциал φ имеет одно и то же значение. Линии напряженности всегда нормальны к эквипотенциальным поверхностям. Все точки эквипотенциальной поверхности имеют одинаковый потенциал, поэтому работа по перемещению заряда вдоль этой поверхности равна нулю, т. е. электростатические силы, действующие на заряд, всегда направлены по нормальям к эквипотенциальным поверхностям. Вектор E всегда нормален к эквипотенциальным поверхностям.

a



линии напряженности (штриховые линии) и сечений эквипотенциальных поверхностей (сплошные линии) полей \oplus точечного заряда

Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков . Поляризованность.

Напряженность поля в диэлектрике

1. Диэлектрики (N_2 , H_2 , O_2 , CO_2 , CH_4 , ...), молекулы которых имеют симметричное строение, т. е. центры «тяжести» \oplus и \ominus зарядов в отсутствие внешнего электрического поля совпадают и, следовательно, дипольный момент молекулы $\mathbf{p} = 0$. **неполярные диэлектрики.** Под действием внешнего электрического поля заряды неполярных молекул смещаются в противоположные стороны (\oplus по полю, \ominus против поля) и молекула приобретает дипольный момент.
2. Диэлектрики (H_2O , NH_3 , SO_2 , CO_2 ,...), молекулы которых имеют асимметричное строение, т.е. центры «тяжести» \oplus и \ominus зарядов не совпадают. При отсутствии внешнего электрического поля эти диэл. обладают дипольным моментом - **полярные диэлектрики.** При отсутствии внешнего поля, однако, дипольные моменты полярных молекул вследствие теплового движения ориентированы в пространстве хаотично и их результирующий момент $\mathbf{P} = 0$.
3. Диэлектрики ($NaCl$, KCl , KBr ,...) составляют вещества, молекулы которых имеют ионное строение. Ионные кристаллы представляют собой пространственные решетки с правильным чередованием ионов разных знаков. В этих кристаллах нельзя выделить отдельные молекулы, а рассматривать их можно как систему двух вдвинутых одна в другую ионных подрешеток. При наложении на ионный кристалл электрического поля происходит некоторая деформация кристаллической решетки или относительное смещение подрешеток, приводящее к возникновению дипольных моментов.

Возникновение электрического дипольного момента под действием внешнего эл. Поля является

Поляризацией диэлектрика .

I тип - электронная или деформационная поляризация ;

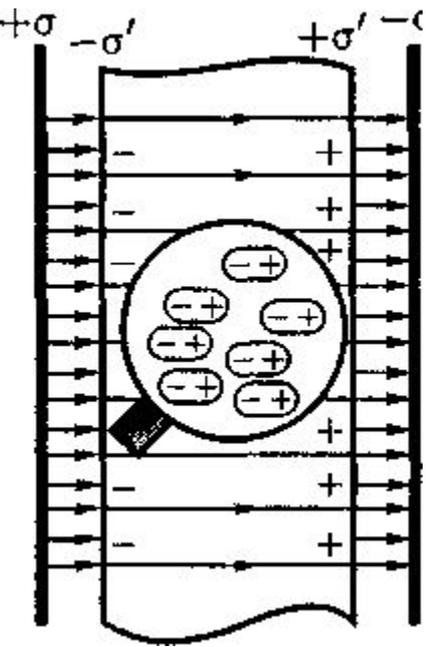
II тип - ориентационная или дипольная поляризация диэлектрика

III тип - ионная поляризация диэлектриков

Поляризованность – это дипольный момент единицы объема диэлектрика, которая линейно зависит от напряженности поля, κ - диэлектрическая восприимчивость вещества

$$P_v = \sum_i \vec{p}_i \quad \vec{P} = \frac{\vec{p}_v}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}, \quad P = \kappa \epsilon_0 E$$

Для установления количественных закономерностей поля в диэлектрике внесем в однородное внешнее электрическое поле пластинку из однородного диэлектрика (рис.). Под действием поля диэлектрик поляризуется, т. е. происходит смещение зарядов



В результате поляризации диэлектрика происходит уменьшение в нем поля по сравнению с первоначальным внешним полем. Вне диэлектрика $E = E_0$.

Результирующее поле внутри диэлектрика

$$E = E_0 - E'. \quad \text{гд} \quad E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \quad \text{поле, созданное двумя бесконечными заряженными плоскостями}$$

$$E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0}. \quad \text{гд} \quad \sigma' = P, \quad \text{Откуда} \quad E = E_0 - \chi E$$

Тогда напряженность результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon}$$

где $\epsilon = 1 + \chi$ диэлектрической проницаемостью среды, показывает, во

сколько раз поле ослабляется диэлектриком, и характеризует количественно свойство диэлектрика поляризоваться в электрическом поле

Электрическое смещение. Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Напряженность электростатического поля, зависит от свойств среды: в однородной изотропной среде напряженность поля E обратно пропорциональна ϵ . Вектор напряженности переходя через границу диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение, создавая тем самым неудобства при расчетах электростатических полей.

Поэтому поле характеризуется вектором электрического смещения $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$. $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$.

Вектором \mathbf{D} описывается электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами. Вектор \mathbf{D} характеризует электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами. Поле \mathbf{D} изображается с помощью линий электрического смещения, направление и густота которых определяются так же, как и для линий напряженности. Линии вектора \mathbf{E} могут начинаться и заканчиваться на любых зарядах — свободных и связанных, линии вектора \mathbf{D} — только на свободных зарядах.

Для произвольной замкнутой поверхности S поток вектора \mathbf{D} сквозь эту поверхность

$$\Phi_D = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS,$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике: Поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключенных внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_S D_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i$$

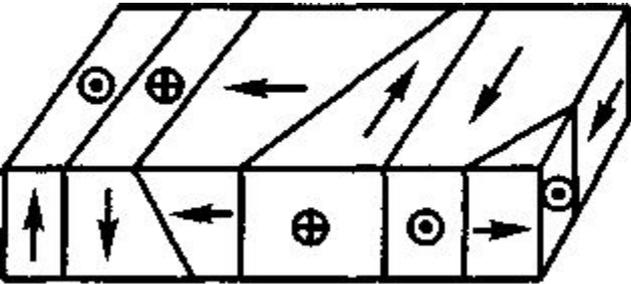
Для вакуума $D_n = \epsilon_0 E_n$ тогда
$$\oint_S \epsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i.$$

Теорему Гаусса для поля \mathbf{E} в общем виде можно записать

$$\oint_S \epsilon_0 \vec{E} d\vec{S} = \oint_S \epsilon_0 E_n dS = \sum_{i=1}^n Q_i + \sum_{i=1}^k Q_{i\text{св}},$$

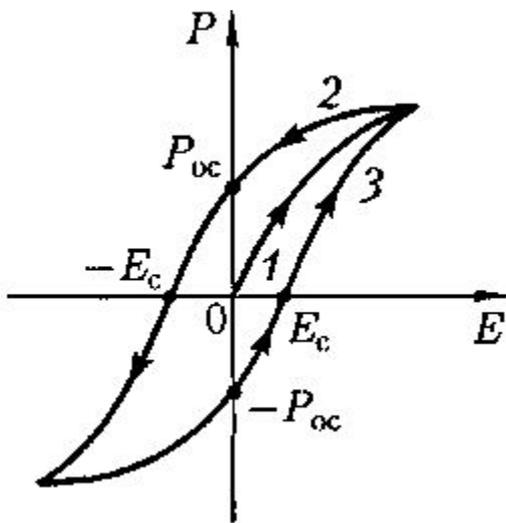
Сегнетоэлектрики

Сегнетоэлектрики — диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур *спонтанной поляризованностью* в отсутствие внешнего электрического поля, представляющие собой как бы мозаику из **доменов** областей с различными направлениями поляризованности.



Сегнетоэлектрики имеют anomalно большие значения диэлектрической проницаемости (для сегнетовой соли, $\epsilon_{\text{max}} \approx 10^4$).

Сегнетоэлектрические свойства сильно зависят от температуры. Для каждого сегнетоэлектрика имеется определенная температура, выше которой его необычные свойства исчезают и он становится обычным диэлектриком. Эта температура называется **точкой Кюри**. вблизи точки Кюри наблюдается также резкое возрастание теплоемкости вещества. В сегнетоэлектриках наблюдается явление **диэлектрического гистерезиса**. С увеличением напряженности E внешнего электрического поля поляризованность P растет, достигая насыщения (кривая 1). Уменьшение P с уменьшением E происходит по кривой 2, и при $E = 0$ сегнетоэлектрик сохраняет **остаточную поляризованность** $P_{\text{ос}}$, т.е. сегнетоэлектрик остается поляризованным в отсутствие внешнего электрического поля. Для компенсации остаточной поляризованности, надо приложить электрическое поле обратного направления $-E_c$. Величина E_c называется **коэрцитивной силой**.



Пьезоэлектрики кристаллические вещества, в которых при сжатии или растяжении в определенных направлениях возникает поляризованность в отсутствие внешнего электрического поля (прямой пьезоэффект).

Обратный пьезоэффект — появление механической деформации под действием электрического поля.

У некоторых пьезоэлектриков решетка положительных ионов в состоянии термодинамического равновесия смещена относительно решетки отрицательных ионов, в результате чего они оказываются поляризованными даже без внешнего электрического поля. Такие кристаллы называются **пироэлектриками**.

Проводники в электростатическом поле

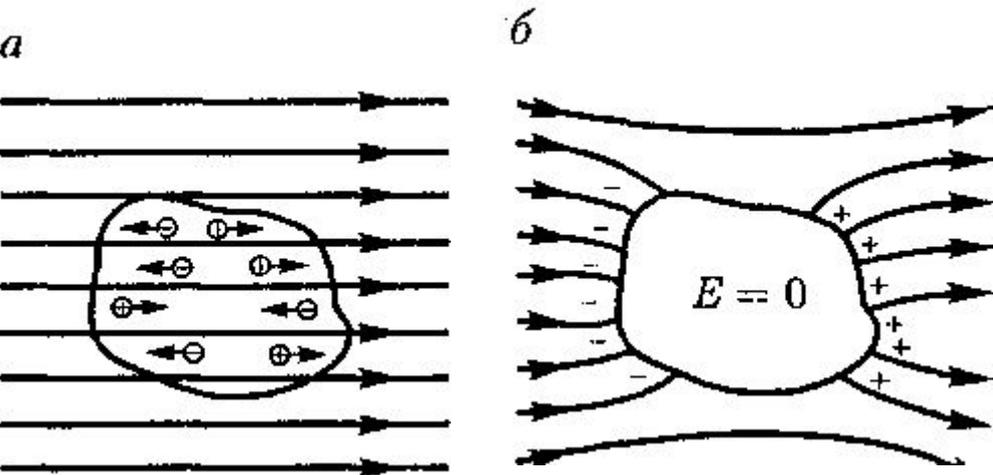
Если поместить проводник во внешнее электростатическое поле или его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться. Перемещение зарядов продолжается до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в нуль.

$$\vec{E} = 0.$$

Отсутствие поля внутри проводника означает, что потенциал во всех точках внутри проводника постоянен ($\varphi = \text{const}$), т.е. поверхность проводника в электростатическом поле является **эквипотенциальной**. Отсюда следует, что вектор напряженности поля на внешней поверхности проводника направлен по нормали к каждой точке его поверхности.

Согласно т. Гаусса заряд Q , находящийся внутри проводника в некотором объеме, ограниченном произвольной замкнутой поверхностью, определяется

$$Q = \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \oint_S D_n dS = 0,$$



Если во внешнее электростатическое поле внести нейтральный проводник, то свободные заряды (электроны, ионы) будут перемещаться: **+** — по полю, **-** — против поля. На одном конце проводника будет скапливаться избыток **+** заряда, на другом — избыток **-**. Эти заряды называются **индуцированными**. Процесс будет происходить до тех пор, пока напряженность поля внутри проводника не станет равной нулю, а линии напряженности вне проводника — перпендикулярными его поверхности

Нейтральный проводник, внесенный в электростатическое поле, разрывает часть линий напряженности; они заканчиваются на **-** индуцированных зарядах и вновь начинаются на **+**. Индуцированные заряды распределяются на внешней поверхности проводника. Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется **электростатической индукцией**.

Електроємкость уединенного проводника. Конденсаторы.

Уединенный проводник -проводник, который удален от других проводников, тел и зарядов. Его потенциал, пропорционален заряду проводника.

$$Q = C\varphi.$$

$$C = \frac{Q}{\varphi}$$

Електроємкость уединенного проводника определяется зарядом, сообщением которого проводнику изменяет его потенциал на единицу, зависит только от формы и размеров проводника.

Учитывая, что

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}.$$

получим $C = 4\pi\epsilon\epsilon_0 R [1\Phi].$

Устройства, обладающие способностью при малых размерах и небольших потенциалах накапливать значительные по величине заряды, называются конденсаторами.

Типы конденсаторов:

1. Плоские

$$C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}.$$

2. Цилиндрические

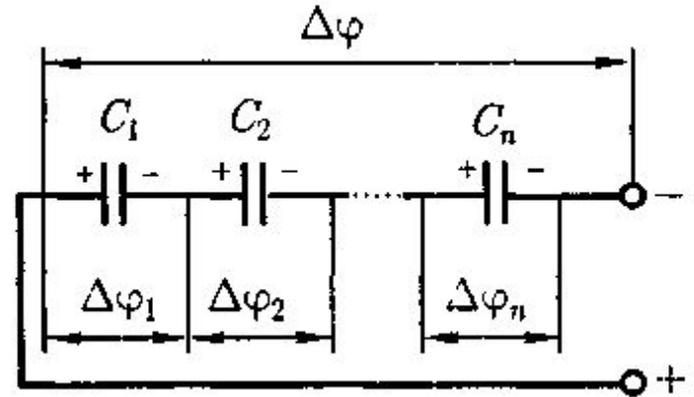
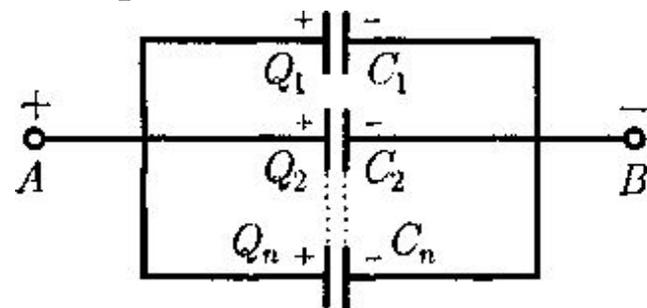
$$C = \frac{2\pi\epsilon_0\epsilon l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$$

3. Сферические

$$C = 4\pi\epsilon_0\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

Параллельное

Последовательное



$$C = \frac{Q}{\varphi_A - \varphi_B} = C_1 + C_2 + \dots + C_n = \sum_{i=1}^n C_i$$

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Энергия системы зарядов, уединенного проводника и конденсатора. Энергия электростатического поля

1. Энергия системы неподвижных точечных зарядов.

Электростатические силы взаимодействия консервативны следовательно, система из двух зарядов обладает потенциальной энергией равной

$$W_1 = Q_1\varphi_{12}, \quad W_2 = Q_2\varphi_{21},$$

где $\varphi_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{r}$ и $\varphi_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r}$, т.к. $W_1 = W_2 = W \rightarrow$

$$W_1 = Q_1\varphi_{12} = Q_2\varphi_{21} = \frac{1}{2} (Q_1\varphi_{12} + Q_2\varphi_{21}). \quad \text{для } n \text{ зарядов получим } W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n Q_i\varphi_i,$$

2. Энергия заряженного уединенного проводника.

Элементарная работа, совершаемая по перемещению заряда из бесконечности на уединенный проводник определяется $dA = \varphi \cdot dQ = C \cdot \varphi \cdot d\varphi$

Полная работа вычисляется как

$$A = \int_0^{\varphi} C\varphi d\varphi = \frac{C\varphi^2}{2}.$$

Энергия заряженного проводника равна той работе, которую необходимо совершить, чтобы зарядить этот проводник:

$$W = \frac{C\varphi^2}{2} = \frac{Q\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

3. Энергия заряженного конденсатора.

При разности потенциалов между обкладками конденсатора $\Delta\varphi$ и емкости C энергия конденсатора определяется как

$$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2} = \frac{Q\Delta\varphi}{2} = \frac{Q^2}{2C},$$

4. Энергия электростатического поля.

Учитывая емкость плоского конденсатора $C = \frac{\epsilon_0\epsilon S}{d}$ и разность потенциалов ($\Delta\varphi = Ed$), можно

получить энергию эл. стат. поля в виде $W = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} Sd = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} V,$

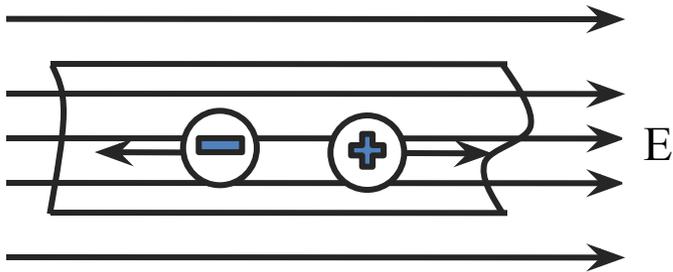
Объемная плотность энергии электростатического поля $w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$

Это выражение справедливо только для *изотропного диэлектрика*, для которого выполняется соотношение

$$\vec{P} = \chi\epsilon_0 \vec{E}$$

Электрический ток, сила и плотность тока

Электрическим током называется упорядоченное движение электрических зарядов. За направление тока принимают направление движения *положительных* зарядов.



Количественной мерой электрического тока служит *сила тока* I — *скалярная* физическая величина, определяемая электрическим зарядом, проходящим через поперечное сечение проводника в единицу времени:

$$I = \frac{dQ}{dt}, \quad I = \frac{Q}{t},$$

Физическая величина, определяемая силой тока, проходящего через единицу площади поперечного сечения проводника, перпендикулярного направлению тока, называется *плотностью тока*:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad \text{Учитывая, что } dQ = ne(v)Sdt \quad \text{и} \quad I = \frac{dQ}{dt} = ne\langle v \rangle S, \quad \vec{j} = ne\langle \vec{v} \rangle.$$

Плотность тока — *вектор* направление которого *совпадает* с направлением упорядоченного движения зарядов **+**

Сила тока сквозь произвольную поверхность S определяется как *поток* вектора j

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S},$$

Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение

Если в цепи на носители тока действуют только силы электростатического поля, то происходит перемещение от точек с большим потенциалом к точкам с меньшим потенциалом. Это приводит к выравниванию потенциалов во всех точках цепи и к исчезновению электрического поля. Поэтому для существования постоянного тока необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счет работы сил *не электростатического происхождения*. Такие устройства называются **источниками тока**. Силы не электростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока, называются **сторонними**. Физическая величина, определяемая работой, совершаемой сторонними силами при перемещении единичного заряда, называется **электродвижущей силой (ЭДС)**, действующей в цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{Q_0}.$$

Работа сторонних сил по перемещению заряда Q_0 на замкнутом участке цепи $A = \oint F_{cm} dl = Q_0 \oint E_{cm} dl$ или

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_{ct} d\vec{l},$$

ЭДС, действующая в замкнутой цепи, может быть определена как циркуляция вектора напряженности поля сторонних сил. Помимо сторонних сил действуют также силы электростатического поля $F_e = Q_0 E$. Результирующая сила, действующая в цепи на заряд Q_0 , равна

$$F = F_{cm} + F_e = Q_0 (E_{cm} + E)$$

Работа, совершаемая результирующей силой над зарядом Q_0 на участке 1 — 2, равна

$$A_{12} = Q_0 \int_1^2 \vec{E}_{ct} d\vec{l} + Q_0 \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}. \text{ или } A_{12} = Q_0 E_{12} + Q_0 (\varphi_1 - \varphi_2)$$

Напряжением U на участке 1—2 называется физическая величина, определяемая работой, совершаемой суммарным полем электростатических и сторонних сил при перемещении единичного **+** заряда на данном участке цепи.

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_{12}.$$

Закон Ома. Сопротивление проводников

Сила тока I , текущего по однородному металлическому проводнику (т.е. проводнику, в котором не действуют сторонние силы), прямо пропорциональна приложенному напряжению U на концах проводника и обратно пропорционально его сопротивлению R .

$$I = \frac{U}{R}, \quad \text{Закон Ома для участка цепи}$$

Сопротивление проводников зависит от его размеров и формы, а также от материала проводника $R = \rho \frac{l}{S}$

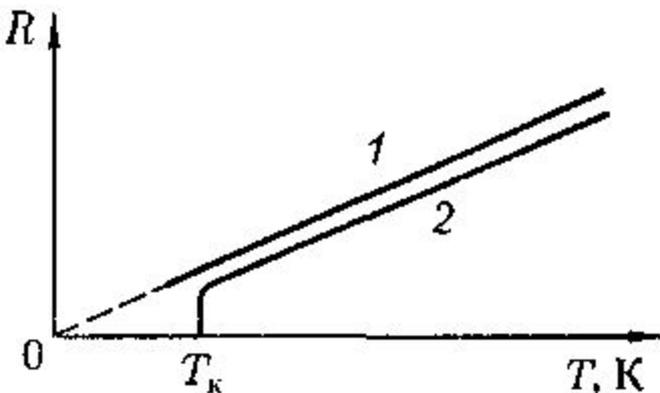
Закон Ома в дифференциальной форме $\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \frac{U}{l}$, $\gamma = \frac{1}{\rho}$ *удельная электрическая проводимость вещества проводника*

Учитывая, что $j = \frac{I}{S}$ и $E = \frac{U}{l}$ получим $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. *закон Ома в дифференциальной форме*

Удельное сопротивление, и сопротивление проводника с температурой описывается линейным законом:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad R = R_0(1 + \alpha t),$$

α — *температурный коэффициент сопротивления*, для чистых металлов близкий к $1/273\text{K}^{-1}$, тогда $R = \alpha R_0 T$



Зависимость сопротивления от температуры при низких температурах (0,14 — 20 К), называемых **критическими**, характерных для каждого вещества, скачкообразно уменьшается до нуля т.е. металл становится абсолютным проводником. Это явление, называется **сверхпроводимостью**.

Работа и мощность тока. Закон Джоуля—Ленца

Если к проводнику приложено напряжение U , тогда силы электростатического поля и сторонние силы совершают работу $dA = U \cdot dq = I \cdot U \cdot dt$, используя 3-н Ома получим $dA = I^2 \cdot R \cdot dt = (U^2/R) \cdot dt$

Мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}$$

Если ток проходит по *неподвижному металлическому проводнику*, то вся работа идет на его нагревание и, по закону сохранения энергии, $dQ = dA$

Учитывая значения dA получим $dQ = I^2 \cdot R \cdot dt = (U^2/R) \cdot dt$ Закон Джоуля – Ленца

Рассмотрим проводник как элементарный цилиндрический объем $dV = dSdl$ с сопротивлением $R = \rho \frac{l}{S}$

Согласно 3-ну Дж.-Ленца за время dt в этом объеме выделится теплота $dQ = I^2 R dt = \rho j^2 dV dt$

Количество теплоты, выделяющееся за единицу времени в единице объема, называется *удельной тепловой мощностью тока*

$$w = \rho j^2$$

Используя дифференциальную форму закона Ома $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, получим $w = jE = \gamma E^2$

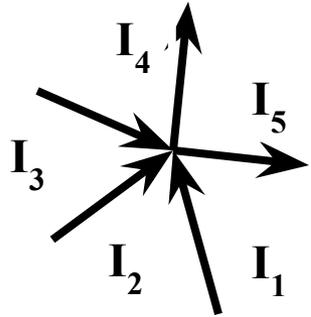
обобщенные выражения *закона Джоуля —Ленца в дифференциальной форме*

Правила Кирхгофа для разветвленных цепей

Любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трех проводников с током, называется **узлом**. При этом ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла, — отрицательным.

Расчет эл.-тех. Цепей упрощается с применением двух правил Кирхгофа:

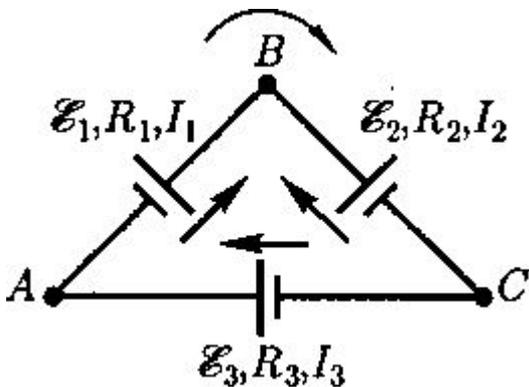
1. Алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю: $\sum_k I_k = 0$



$$I_1 + I_2 + I_3 - I_4 - I_5 = 0$$

Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения электрического заряда. В случае установившегося постоянного тока ни в одной точке проводника и ни на одном его участке не должны накапливаться электрические заряды. В противном случае токи не могли бы оставаться постоянными

2. В любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов I_i на сопротивления R_i соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС E_i встречающихся в этом контуре.

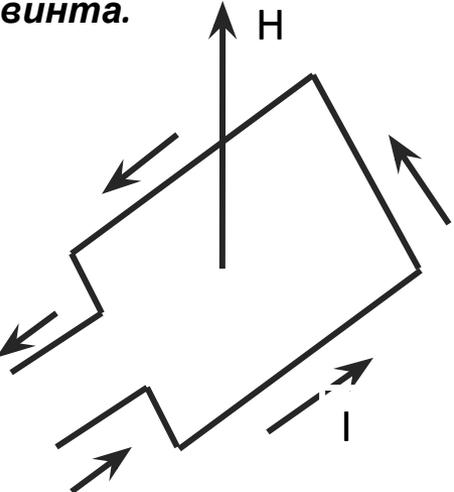


$$\sum_i I_i R_i = \sum_i E_i$$

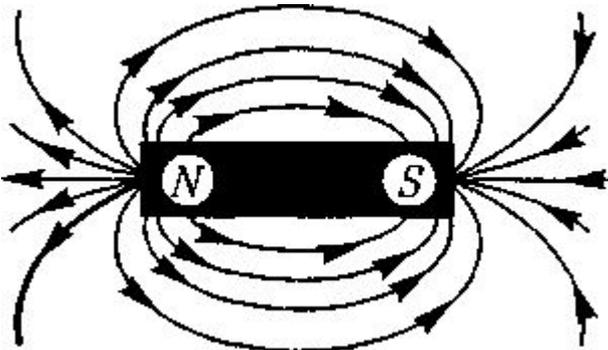
Магнитное поле и его характеристики. Закон Био—Савара—Лапласа и его применение к расчету магнитного поля.

В пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое *магнитное поле*.

Магнитное поле действует *только на движущиеся в нем электрические заряды*. Характер воздействия магнитного поля на ток различен в зависимости от формы проводника, по которому течет ток, от расположения проводника и от направления тока. При исследовании магнитного поля пользуются *замкнутым плоским контуром с током (рамка с током)*, *линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле*. Ориентация контура в пространстве определяется направлением нормали к контуру. **Правило правого винта.**



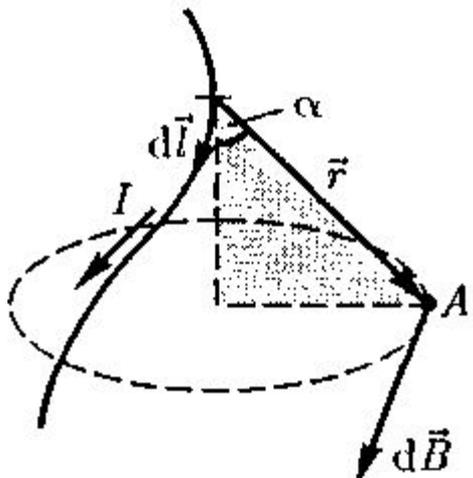
Количественная характеристика магнитного поля ***V***— ***вектор магнитной индукции***.



Магнитное поле является силовым полем изображают с помощью **линий магнитной индукции** — линий, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора ***V***. Линии магнитной индукции всегда *замкнуты и охватывают проводники с током*. Магнитное поле описывается **вектором напряженности *H***. Для однородной изотропной среды вектор магнитной индукции связан с вектором напряженности

$$\vec{V} = \mu\mu_0 \vec{H}$$

$\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{Н/А}^2$ - магнитная постоянная, μ - безразмерная величина — *магнитная проницаемость среды*



Для проводника с током *I*, элемент *dl* которого создает в некоторой точке *A* индукцию поля *dB*, записывается в виде, его модуль

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I[dl, r]}{r^3}$$

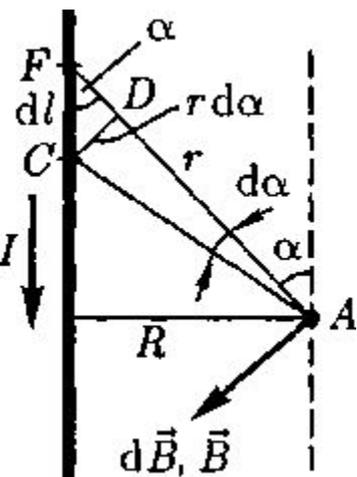
$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dl \sin \alpha}{r^2},$$

принцип суперпозиции: вектор магнитной индукции результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равен векторной сумме магнитных индукций складываемых полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом в отдельности:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$$

Расчет маг. Поля с помощью закона Б.-С.-Л.

1. Магнитное поле прямого тока



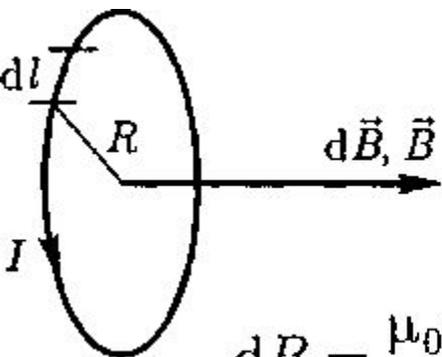
$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R} \sin \alpha d\alpha.$$

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}, \quad dl = \frac{r d\alpha}{\sin \alpha}$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{I}{R} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}.$$

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I}{R}.$$

2. Магнитное поле в центре кругового проводника с током



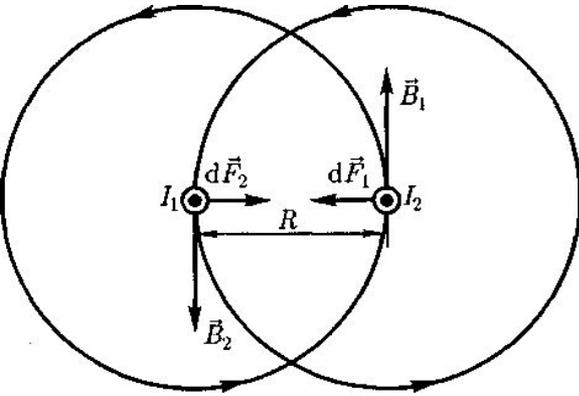
Все элементы кругового проводника с током создают в центре магнитные поля одинакового направления — вдоль нормали от витка. Поэтому сложение векторов $d\vec{B}$ можно заменить сложением их модулей. Так как все элементы проводника перпендикулярны радиусу-вектору ($\sin \alpha = 1$) и расстояние всех элементов проводника до центра кругового тока одинаково и равно R ,

$$dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} dl. \quad B = \int dB = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} \int dl = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} 2\pi R = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

Закон Ампера. Взаимодействие параллельных токов

Сила $d\mathbf{F}$, с которой магнитное поле действует на элемент проводника $d\mathbf{l}$ с током, находящегося в магнитном поле, равна $d\vec{F} = I[d\vec{l}, \vec{B}]$. Направление вектора $d\mathbf{F}$ определяется согласно **правила левой руки**.

Модуль силы $dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin\alpha$



Модуль силы dF_1 , с которой магн. поле первого проводника действует на

второй равен $dF_1 = I_2 B_1 dl$ где $B_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1}{R}$.

Тогда $dF_1 = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl$.

Аналогично $dF_2 = I_1 B_2 dl = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl$

Т.к. $dF_1 = dF_2$, Получим $dF = \frac{\mu \mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R} dl$

Два параллельных тока одинакового направления притягиваются друг к другу с силой $d\mathbf{F}$, если токи имеют противоположные направления, то, между ними действует сила отталкивания.

Магнитная постоянная. Единицы магнитной индукции и напряженности магнитного поля

Для двух проводников с токами в вакууме сила взаимодействия на единицу длины равна если $I_1 = I_2 = I = 1 \text{ А}$ и $\frac{dF}{dl} = 10^{-7} \text{ Н/м}$ получим $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{R}$$

Единица индуктивности — **генри**

Из закона Ампера $B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}$ можно получить единицу магнитной индукции — *тесла (Тл)*:

1 Тл — магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику течет ток 1 А. $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н}/(\text{А}\cdot\text{м})$.

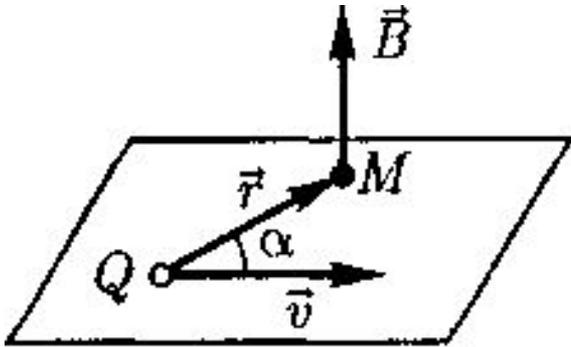
Единица напряженности магнитного поля — **ампер на метр (А/м)**: *1 А/м* — напряженность такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Тл}$.

$$\text{В вакууме} \quad H = \frac{B}{\mu_0}$$

Магнитное поле движущегося заряда

Любой движущийся в вакууме или среде заряд создает вокруг себя магнитное поле, вектор индукции которого определяется

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\vec{v} \vec{r}]}{r^3}, \quad B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Qv}{r^2} \sin \alpha,$$



Формула справедлива лишь для малых скоростей ($v \ll c$) движущихся зарядов, когда электрическое поле свободно движущегося заряда можно считать электростатическим, т. е. создаваемым неподвижным зарядом, находящимся в той точке, где в данный момент времени расположен движущийся заряд.

Вектор \mathbf{B} направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены векторы \mathbf{v} и \mathbf{r} , его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от \mathbf{v} к \mathbf{r} . Вектор \mathbf{B} представляет собой псевдовектор.

Действие магнитного поля на движущийся заряд

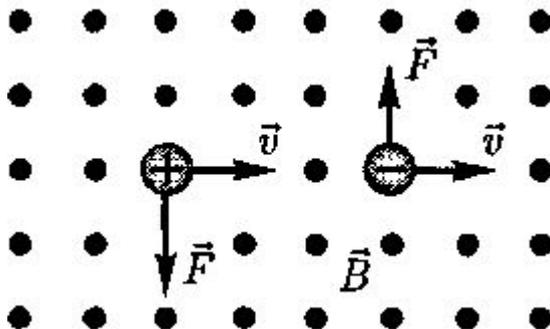
Магнитное поле действует не только на проводники с током, но и на отдельные заряды, движущиеся в магнитном поле. Сила, действующая на электрический заряд Q , движущийся в магнитном поле со скоростью \mathbf{v} , называется силой Лоренца и выражается формулой

$$\vec{F} = Q[\vec{v} \vec{B}],$$

Направление силы - *правила левой руки*

$$F = QvB \sin \alpha,$$

Магнитное поле не действует на покоящийся электрический заряд, действует только на движущиеся в нем заряды



Сила Лоренца всегда перпендикулярна скорости движения заряженной частицы, поэтому она изменяет только направление этой скорости, не меняя ее модуля. Сила Лоренца работы не совершает. Если на заряд действует и эл. Поле, тогда результ. Сила определяется как

$$\vec{F} = Q\vec{E} + Q[\vec{v} \vec{B}]. \quad \text{формула Лоренца}$$

Движение заряженных частиц в магнитном поле

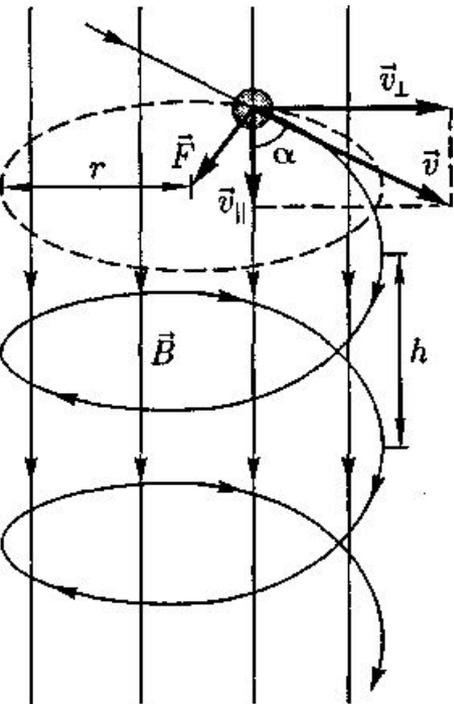
Из з-на Лоренца следует $F = QvB \sin \alpha$, где α – угол м/у \mathbf{v} и \mathbf{B}

1. Если заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью \mathbf{v} вдоль линий магнитной индукции \mathbf{B} , то угол α между векторами \mathbf{v} и \mathbf{B} равен 0 или π . Тогда сила Лоренца равна нулю, т.е. магнитное поле на частицу не действует и она движется равномерно и прямолинейно.
2. Заряженная частица движется в магнитном поле со скоростью \mathbf{v} , перпендикулярной вектору \mathbf{B} , то сила Лоренца $\mathbf{F} = Q [\mathbf{v}\mathbf{B}]$ постоянна по модулю и нормальна к траектории частицы. Эта сила создает центростремительное ускорение, т.е. частица будет двигаться по окружности, радиус r которой определяется из условия.

$$QvB = \frac{mv^2}{r}, \quad \text{и} \quad r = \frac{mv}{QB}$$

Период вращения частицы, т. е. время T , за которое она совершает один полный оборот определяется

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \quad \text{или} \quad T = \frac{2\pi m}{BQ}$$



период вращения частицы в однородном магнитном поле определяется величиной, обратной удельному заряду частицы, и магнитной индукцией поля, не зависит от ее скорости (при $v \ll c$).

3. Если скорость \mathbf{v} заряженной частицы направлена под углом α к вектору \mathbf{B} то ее движение можно представить как наложение двух движений: 1) равномерного прямолинейного движения вдоль поля, 2) равномерного движения по окружности в плоскости, перпендикулярной полю. Траектория заряженной частицы - спираль, ось которой параллельна магнитному полю. Шаг винтовой линии определяется как

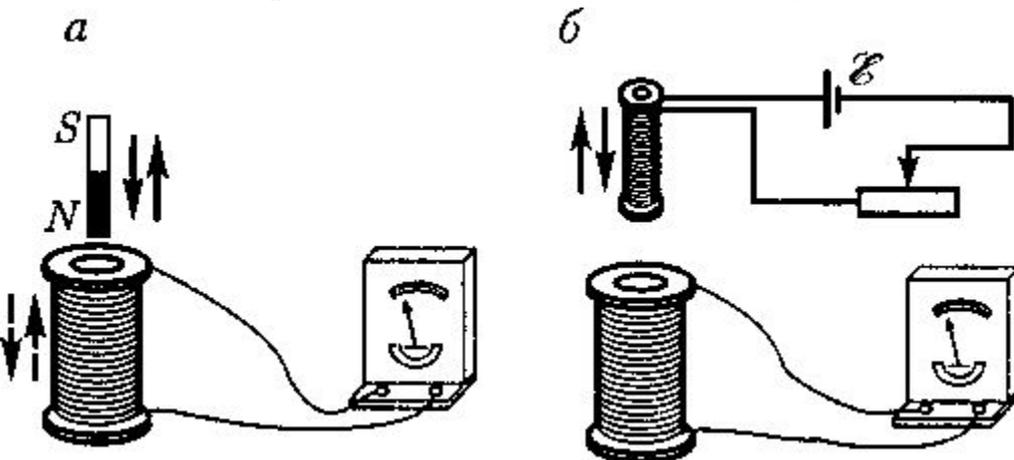
$$h = \frac{2\pi mv \cos \alpha}{BQ}$$

Если вектора \mathbf{B} неоднородного магнитного поля, индукция которого возрастает в направлении движения частицы, то r и h уменьшаются с увеличением \mathbf{B} .

На этом основана фокусировка заряженных частиц в магнитном поле.

Явление электромагнитной индукции (опыты Фарадея)

Электрические токи создают вокруг себя магнитное поле. Возникновение эл. Тока в контуре с помощью магнитного поля была получена в 1831 г. английским физиком М. Фарадеем (*явление электромагнитной индукции*). В замкнутом проводящем контуре при изменении потока магнитной индукции, охватываемого этим контуром, возникает электрический *ток, называемого индукционного*.



Опыты I и II Фарадея

Выводы: индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции. Значение индукционного тока не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь скоростью его изменения

Возникновение индукционного тока указывает на наличие в цепи *электродвижущей силы электромагнитной индукции*. Значение индукционного тока, а следовательно, и ЭДС электромагнитной индукции E_i определяются только скоростью изменения магнитного потока.

$\mathcal{E}_i \sim \frac{d\Phi}{dt}$, С учетом направления $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

Циркуляция вектора \mathbf{E}_B эл. поля по любому неподвижному контуру L проводника представляет собой ЭДС электромагнитной индукции:

$$E_i = \oint_L \mathbf{E}_B \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Правило Ленца: *индукционный ток* в контуре имеет всегда такое направление, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающему этот индукционный ток

Согласно закону сохранения энергии, работа источника тока за время dt ($\mathbf{E}_i \cdot \mathbf{I} dt$) расходуется на джоулеву теплоту ($I^2 R dt$) и работу по перемещению проводника в магнитном поле ($\mathbf{I} d\Phi$):

$$\mathcal{E} I dt = I^2 R dt + I d\Phi,$$

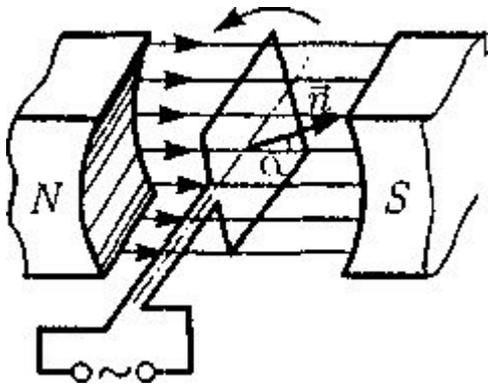
Тогда
$$I = \frac{\mathcal{E} - \frac{d\Phi}{dt}}{R},$$

ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром.

Вращение рамки в магнитном поле.

Рассмотрим вращение рамки в однородном магнитном поле ($B = const$) равномерно с угловой скоростью $\omega = const$.
Магнитный поток, сцепленный с рамкой площадью S , в любой момент времени t равен

$$\Phi = B_n S = BS \cos \alpha = BS \cos \omega t,$$



При вращении рамки в ней будет возникать переменная ЭДС индукции

$$E_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t \quad \mathcal{E}_{\max} = BS\omega. \quad \mathcal{E}_i = \mathcal{E}_{\max} \sin \omega t.$$

Если в однородном магнитном поле равномерно вращается рамка, то в ней возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону. Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим.

Индуктивность контура. Самоиндукция

Электрический ток, текущий в замкнутом контуре, создает вокруг себя магнитное поле, индукция которого пропорциональна току. Сцепленный с контуром магнитный поток Φ поэтому пропорционален току в контуре

$$\Phi = LI, \quad \text{где } L [1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/А} = 1 \text{ В} \cdot \text{с/А}] \text{—индуктивностью контура.}$$

При изменении силы тока в контуре будет изменяться также и сцепленный с ним магнитный поток; следовательно, в контуре будет индуцироваться ЭДС. Возникновение ЭДС индукции в проводящем контуре при изменении в нем силы тока называется *самоиндукцией*.

Индуктивность бесконечно длинного соленоида $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$, Индуктивность контура зависит только от геометрической формы контура, его размеров и магнитной проницаемости той среды, в которой он находится

Применяя 3-н Фарадея получим

$$\mathcal{E}_s = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(LI) = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}\right).$$

Если контур не деформируется самоиндукция направлена навстречу току и замедляет его возрастание $\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt}$,

Энергия магнитного поля

Энергия магнитного поля равна работе, которая затрачивается током на создание этого поля. Рассмотрим контур индуктивностью L , по которому течет ток I . С данным контуром сцеплен магнитный поток изменение, которого равно $d\Phi = LdI$, тогда работа по созданию магн. потока определяется

$$A = \int_0^I LI dI = \frac{LI^2}{2}. \quad \text{Следовательно, энергия магнитного поля, связанного с контуром равна. Она локализована в пространстве.} \quad W = \frac{LI^2}{2}.$$

Поскольку $L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}$, и $NI = \frac{Bl}{\mu_0 \mu N}$ тогда $W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} V = \frac{BH}{2} V$

Магнитное поле соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объеме соленоида и распределена в нем с постоянной *объемной плотностью*

$$w = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

В таблице представлена аналогия электрических и магнитных полей

Электрическое поле	Формулы и обозначения	Магнитное поле	Формулы и обозначения
Точечный заряд	Q	Элемент проводника с током	Idl
Взаимодействие точечных зарядов	$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{ Q_1Q_2 }{r^2}$	Взаимодействие токов	$F = \frac{\mu_0\mu}{4\pi} \frac{2I_1I_2}{r^2} dl$
Электрическая постоянная	ϵ_0	Магнитная постоянная	μ_0
Силовая характеристика электрического поля	$E = \frac{F}{Q_0}$	Силовая характеристика магнитного поля	$B = \frac{M_{max}}{p_m}$
Однородное электрическое поле	$\vec{E} = \text{const}$	Однородное магнитное поле	$\vec{B} = \text{const}$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$	Принцип суперпозиции	$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$
Линии напряженности вектора \vec{E}	—	Линии магнитной индукции	—
Поляризованность	$P = \frac{\vec{p}_v}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}$	Намагниченность	$\vec{j} = \frac{\vec{p}_m}{V} = \frac{\sum \vec{p}_a}{V}$
Емкость уединенного проводника	$C = \frac{Q}{\varphi}$	Индуктивность катушки	$L = \frac{\Phi}{I}$
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}$	Энергия катушки с током	$W = \frac{LI^2}{2}$
Диэлектрическая проницаемость	ϵ	Магнитная проницаемость	μ
Объемная плотность энергии	$w = \frac{W}{V} = \frac{\epsilon_0\epsilon E^2}{2} = \frac{ED}{2}$	Объемная плотность энергии	$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}$
Поток вектора \vec{E} сквозь поверхность S	$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS$	Поток вектора \vec{B} сквозь поверхность S	$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS$
Циркуляция вектора \vec{E}	$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = \oint_L E_t dl$	Циркуляция вектора \vec{B}	$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_t dl$

ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАКСВЕЛЛА ДЛЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Максвелл высказал гипотезу, что всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре.

Изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое поле \vec{E}_B , циркуляция которого, определяется

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{Bt} dl = -\frac{d\Phi}{dt},$$

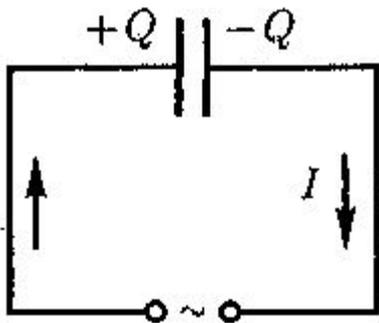
Учитывая, что $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$ получим

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S}. \quad \text{Или} \quad \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S},$$

Известно, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля \vec{E}_Q вдоль любого замкнутого контура равна нулю:

$$\oint_L \vec{E}_Q d\vec{l} = \oint_L E_{Qt} dl = 0.$$

Циркуляция вектора \vec{E}_B в отличие от циркуляции вектора \vec{E}_Q не равна нулю. Следовательно, электрическое поле \vec{E}_B возбуждаемое магнитным полем, как и само магнитное поле является вихревым.



Ток смещения

Согласно Максвеллу, если всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то и всякое изменение электрического поля вызывает появление в окружающем пространстве вихревого магнитного поля. Переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, как если бы между обкладками конденсатора существовал ток смещения, равный току в подводящих проводах.

$$I = I$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Ток проводимости вблизи обкладок конденсатора

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS = \int_S \frac{d\sigma}{dt} dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS$$

Для общего случая

$$I = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}.$$

С другой стороны $I_{см} = \int_S \vec{j}_{см} dS$ тогда плотность тока смещения определяется как $\vec{j}_{см} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$

Ток смещения (в вакууме или веществе) создает в окружающем пространстве магнитное поле.

В диэлектриках ток смещения состоит из двух слагаемых $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ *плотность тока смещения в вакууме и плотность тока поляризации*

$$\vec{j}_{см} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Плотность тока смещения не связанная с движением зарядов, а обусловленная *только* изменением электрического поля во времени, также возбуждает магнитное поле, является *принципиально новым утверждением* Максвелла.

Максвелл ввел понятие *полного тока*, равного сумме токов проводимости и смещения. *Плотность полного тока*

$$\vec{j}_{полн} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Обобщенная теорема о циркуляции вектора Н имеет виде

$$\oint_L \vec{H} dl = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) dS$$

Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

В основе теории Максвелла лежат рассмотренные выше четыре уравнения:

1. Электрическое поле может быть как потенциальным (E_Q) так и вихревым (E_B), поэтому напряженность суммарного поля $E = E_Q + E_B$. Так как циркуляция вектора E_Q равна нулю, а циркуляция вектора E_B не равно 0, то циркуляция вектора напряженности суммируется:

$$\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Источниками электрического поля могут быть не только электрические заряды, но и изменяющиеся во времени магнитные поля.

2. Обобщенная теорема о циркуляции вектора H

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}.$$

Магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися зарядами, либо переменными электрическими полями.

3. Теорема Гаусса для поля D

$$\oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q. \quad \text{или} \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV.$$

4. Теорема Гаусса для поля B

$$\int_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Полная система уравнений Максвелла в интегральной форме.

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = \int_V \rho dV;$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S}; \quad \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0.$$

Из уравнений Максвелла вытекает, что источниками электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами, либо переменными электрическими полями. Уравнения Максвелла не симметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но отсутствуют магнитные.

Для стационарных полей ($E = \text{const}$ и $B = \text{const}$) ур. Максвелла примут вид

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0; \quad \oint_S \vec{D} d\vec{S} = Q;$$

Полную систему ур. Максвелла в дифференциальной форме

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{D} = \rho;$$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I; \quad \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0,$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \quad \text{div } \vec{B} = 0.$$

Из ур. Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т.е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом — они образуют единое **электромагнитное поле**.

МЕХАНИЧЕСКИЕ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

Гармонические колебания и их характеристики

Колебаниями называются движения или процессы, которые характеризуются определенной повторяемостью во времени.

Колебания называются **свободными (или собственными)**, если они совершаются за счет первоначально сообщенной энергии при последующем отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

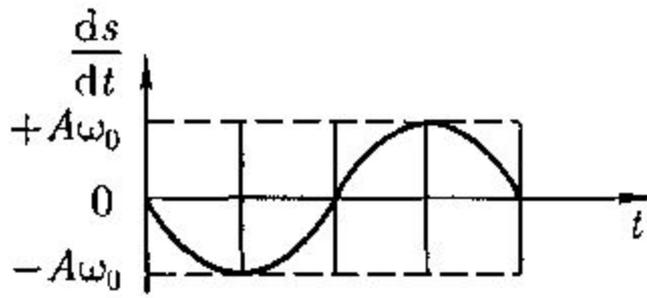
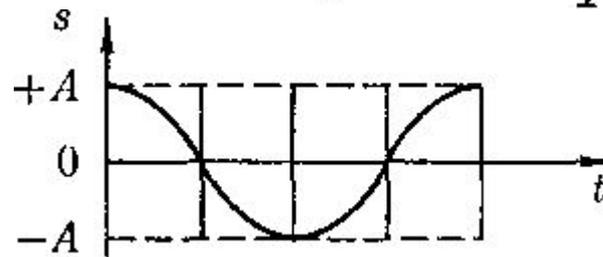
Простейшим типом колебаний являются *гармонические колебания* — колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса).

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

Периодом колебания называется промежуток времени T , за который фаза колебания получает приращение 2π

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi, \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad \nu = \frac{1}{T}, \quad \omega_0 = 2\pi\nu.$$

Графическое представление кол. Процесса.



Скорость изменения кол. процесса определяется

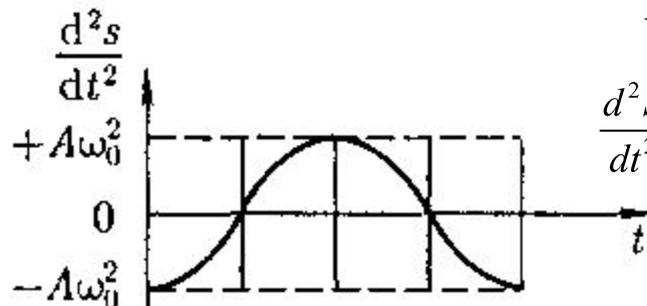
$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2})$$

Ускорение кол. процесса определяется

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

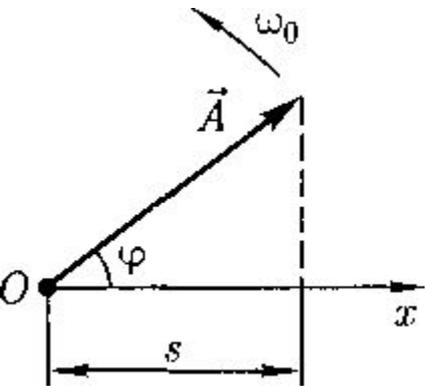
Дифф. ур. гармонических колебаний

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0,$$



ПРОДОЛЖЕНИЕ

Гармонические колебания изображаются графически *методом вращающегося вектора амплитуды, или методом векторных диаграмм*. Также кол. процесс можно представить в комплексной форме согласно формуле Эйлера, для комплексных чисел



$$e^{i\alpha} = \cos \alpha + i \sin \alpha,$$

Уравнение гармонического колебания можно записать **в комплексной форме**

$$\tilde{s} = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}.$$

Вещественная $\operatorname{Re}(\tilde{s}) = A \cos(\omega_0 t + \varphi) = s$ выражения
представляет собой гармоническое колебание

Механические гармонические колебания

Рассмотрим М.Т., которая совершает прямолинейные гармонические колебания вдоль оси координат x около положения равновесия. Тогда зависимость координаты x от времени t задается уравнением, $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$, где $s = x$:

Скорость v и ускорение a , колеблющейся точки соответственно равны

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi)$$

Сила $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, действующая на колеблющуюся м.т. массой m равна

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Сила пропорциональна смещению м. т. из положения равновесия и направлена в противоположную сторону (к положению равновесия).

Кинетическая энергия м. т., совершающей прямолинейные гармонические колебания, равна

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

Потенциальная энергия м.т., совершающей гармонические колебания под действием упругой силы \mathbf{F} , равна

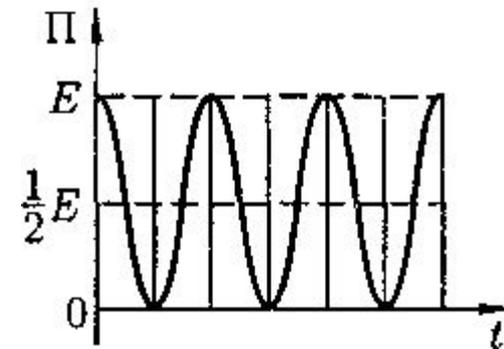
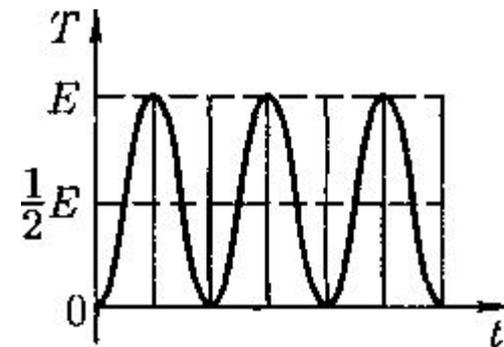
$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} \cos^2(\omega_0 t + \varphi) = \frac{mA^2\omega_0^2}{4} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]$$

Полная мех. энергия

$$E = T + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Графическая зависимость T , Π и E от времени. T и Π изменяются с частотой $2\omega_0$, т. е. с частотой, которая в два раза превышает частоту гармонического колебания.

$$\langle T \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} E.$$



Гармонический осциллятор. Пружинный, физический и математический маятники

Гармоническим осциллятором называется система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида

$$\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0.$$

Виды гармонического осциллятора : 1. пружинный маятник, 2. физический и математический маятники, 3. колебательный контур

1. **Пружинный маятник** груз массой m , подвешенный на абсолютно упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$, где k — жесткость пружины. Уравнение движения маятника в отсутствие сил трения

$$m\ddot{x} = -kx, \text{ или } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

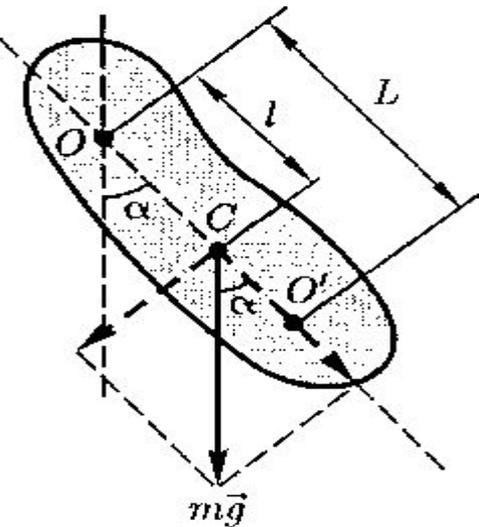
и периодом

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad c$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Потенциальная энергия пружинного маятника

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$



2. **Физический маятник** — это абсолютно твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку O , не совпадающую с центром масс C тела.

Если маятник отклонен из положения равновесия на некоторый угол α , то в соответствии с уравнением динамики вращательного движения твердого тела в отсутствие сил трения вращающий момент \mathbf{M} можно записать в виде

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -mgl \sin \alpha \approx -mgl\alpha$$

Вращающий момент стремится вернуть маятник в положение равновесия, поэтому момент \mathbf{M} и угловое смещение α имеют противоположные знаки.

ПРОДОЛЖЕНИЕ

При малых колебаниях маятника $\sin\alpha \approx \alpha$ уравнение гарм. колеб. примет вид

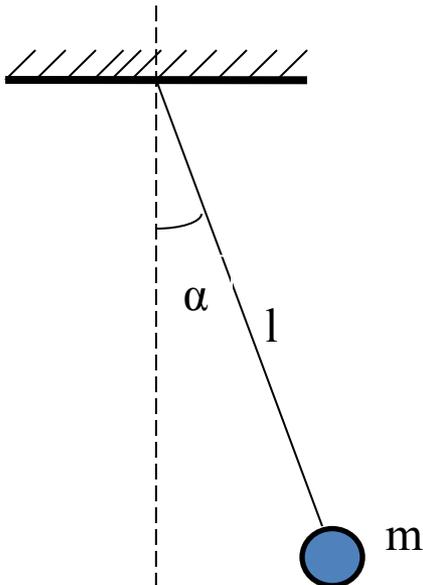
$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0, \text{ или } \ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Примем $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$, получим $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$, решение $\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$

Период колеб. $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$ где L – приведенная длина физ. маятника

3. Математический маятник- это *идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m , подвешенной на нерастяжимой невесомой нити и колеблющаяся под действием силы тяжести.*

Момент инерции математического маятника $J = ml^2$, l длина маятника, период маятника

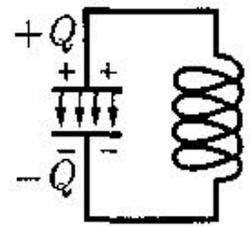


$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Приведенная длина физического маятника — это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Свободные гармонические колебания в колебательном контуре

Электро-магнитные колебания, при которых электрические величины периодически изменяются и которые сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется **колебательный контур** — цепь, состоящая из включенных последовательно катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R .



$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

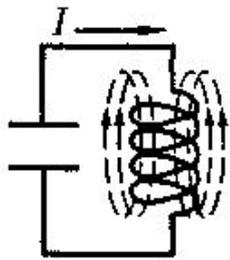


$$E = \Pi_{\max}$$

Согласно закону Ома, для контура, содержащего катушку индуктивностью L , конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R ,

$$IR + U_C = \mathcal{E}_s, \text{ Учитывая, что } U_C = \frac{Q}{C} \quad E_s = -L \frac{dI}{dt}$$

б



$$W = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$$



$$E = T_{\max}$$

Получим
$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0.$$

Или
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{LC} Q = 0$$

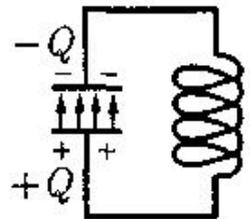
Если $R=0$ тогда свободные кол.
$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{1}{LC} Q = 0 \quad Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Решением

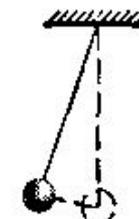
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad T = 2\pi\sqrt{LC}. \text{ Ф-ла Томсона.}$$

$$I = -Q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}) \quad U_C = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

в

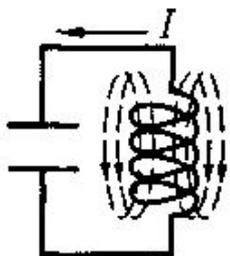


$$W = \frac{Q^2}{2C}$$

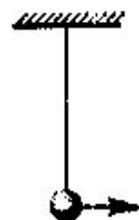


$$E = \Pi_{\max}$$

г



$$W = \frac{L\dot{Q}^2}{2}$$



$$E = T_{\max}$$

Колебания тока I опережают по фазе колебания заряда Q на $\pi/2$, т.е., когда ток достигает максимального значения, заряд (а также и напряжение) обращается в нуль, и наоборот.

Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Биения

Колеблющееся тело может участвовать в нескольких колебательных процессах, тогда необходимо найти результирующее колебание, т.е. колебания необходимо сложить. Сложим гармонические колебания одного направления и одинаковой частоты:

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2), \end{cases}$$

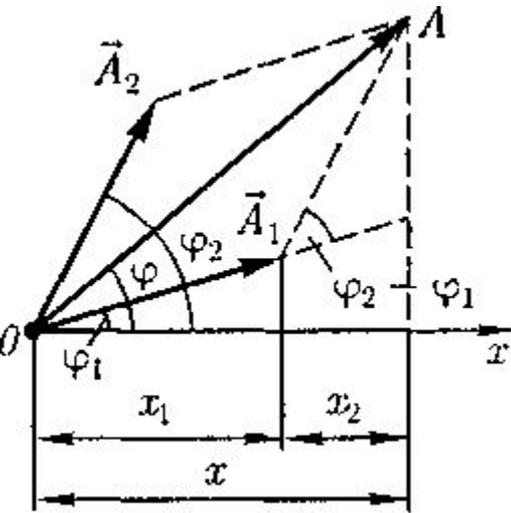
Методом векторной диаграммы выполним сложение двух кол. -й одинаковой частоты ω_0

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

Амплитуда и фаза результирующих колебаний определяются как

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



Тело, участвуя в двух гармонических колебаниях одного направления и одинаковой частоты, совершает также гармоническое колебание в том же направлении и с той же частотой, что и складываемые колебания.

Частные случаи: 1) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) тогда $A = A_1 + A_2$ амплитуда результирующего колебания A равна сумме амплитуд складываемых колебаний; 2) $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) тогда амплитуда результирующего колебания равна разности амплитуд складываемых колебаний $A = A_1 - A_2$.

Рассмотрим случай, когда два складываемых гармонических колебания одинакового направления мало отличаются по частоте. В результате сложения получаются колебания с периодически изменяющейся амплитудой. Периодические изменения амплитуды колебания, возникающие при сложении двух гармонических колебаний с близкими частотами, называются **биениями**.

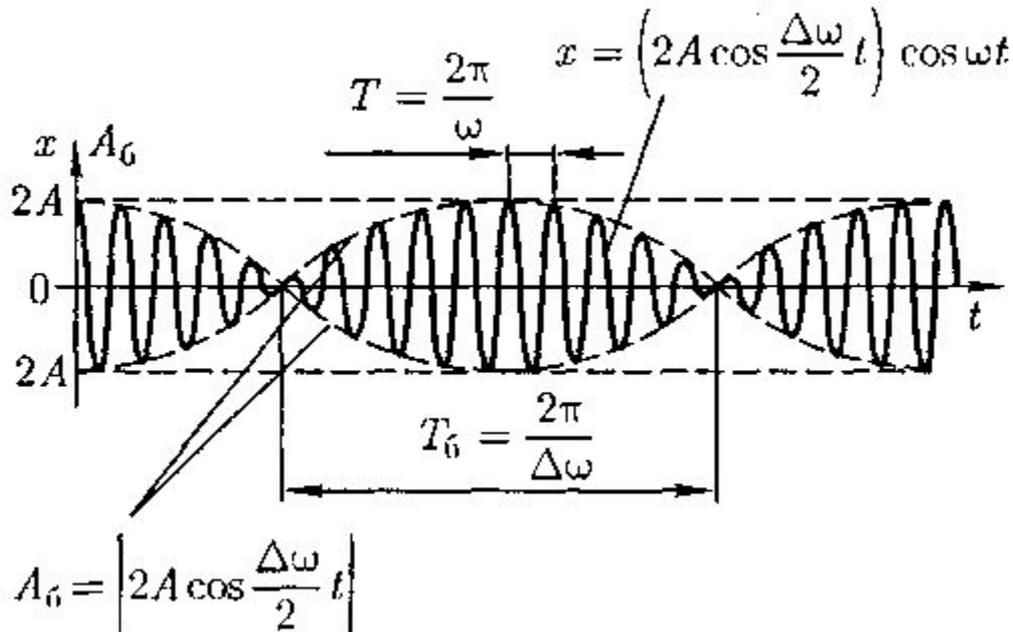
$\Delta\omega \ll \omega$ после сложения получим $x = (2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t) \cos \omega t$
Результирующее колебание можно рассматривать как гармоническое с частотой ω и амплитудой

$$\begin{cases} x_1 = A \cos \omega t, \\ x_2 = A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{cases}$$

$$A_{\text{б}} = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|, \quad T_{\text{б}} = \frac{2\pi}{\Delta\omega}.$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

График зависимости $X(t)$ показан на рис/, где сплошные линии это график результирующего колебания, а огибающие их штриховые — график медленно меняющейся по уравнению амплитуды.



Любые сложные периодические колебания $s = f(t)$ можно представить в виде суперпозиции одновременно совершающихся гармонических колебаний с различными амплитудами, различными начальными фазами, а также частотами, кратными циклической частоте ω_0 .

$$s = f(t) = \frac{A_0}{2} + A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \varphi_2) + \dots \dots + A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n).$$

$\omega_0, 2\omega_0, \dots, n\omega_0$ гармоника колебания

Сложение взаимно перпендикулярных колебаний

Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω , происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y

$$\begin{cases} x = A \cos \omega t \\ y = B \cos(\omega t + \alpha) \end{cases}$$

Уравнение траектории результирующего колебания находится исключением из выражений параметра t . получим **уравнение эллипса, оси которого ориентированы относительно координатных осей произвольно:**

$$\frac{x^2}{A^2} - \frac{2xy}{AB} \cos \alpha + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2 \alpha.$$

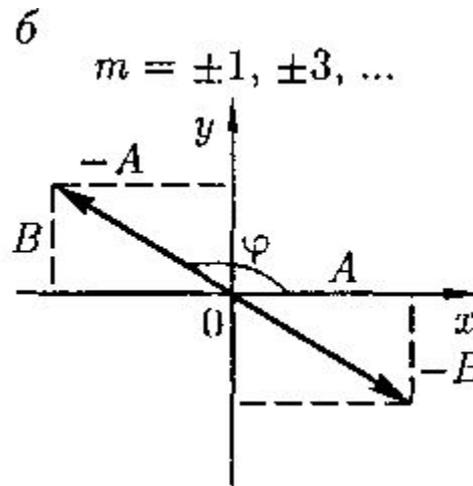
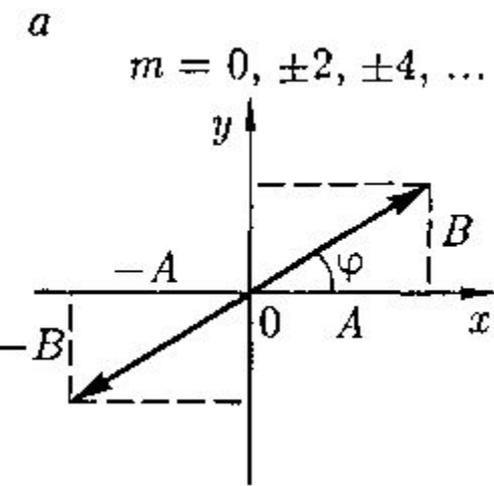
Ур-е эллипса, поэтому траектория результирующего колебания имеет форму эллипса, и такие колебания называются **эллиптически поляризованными.**

Ориентация эллипса и размеры его осей зависят от амплитуд складываемых колебаний и разности фаз α . Рассмотрим некоторые частные случаи, представляющие физический интерес:

1) $\alpha = 2m \frac{\pi}{2}$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) Эллипс вырождается в отрезок прямой

$$y = \pm \frac{B}{A} x,$$

Графически



Результирующее колебание является гармоническим колебанием с частотой ω и амплитудой, $\sqrt{A^2 + B^2}$

совершающимся вдоль прямой, составляющей с осью x угол

$$\varphi = \arctg \left(\frac{B}{A} \cos m\pi \right).$$

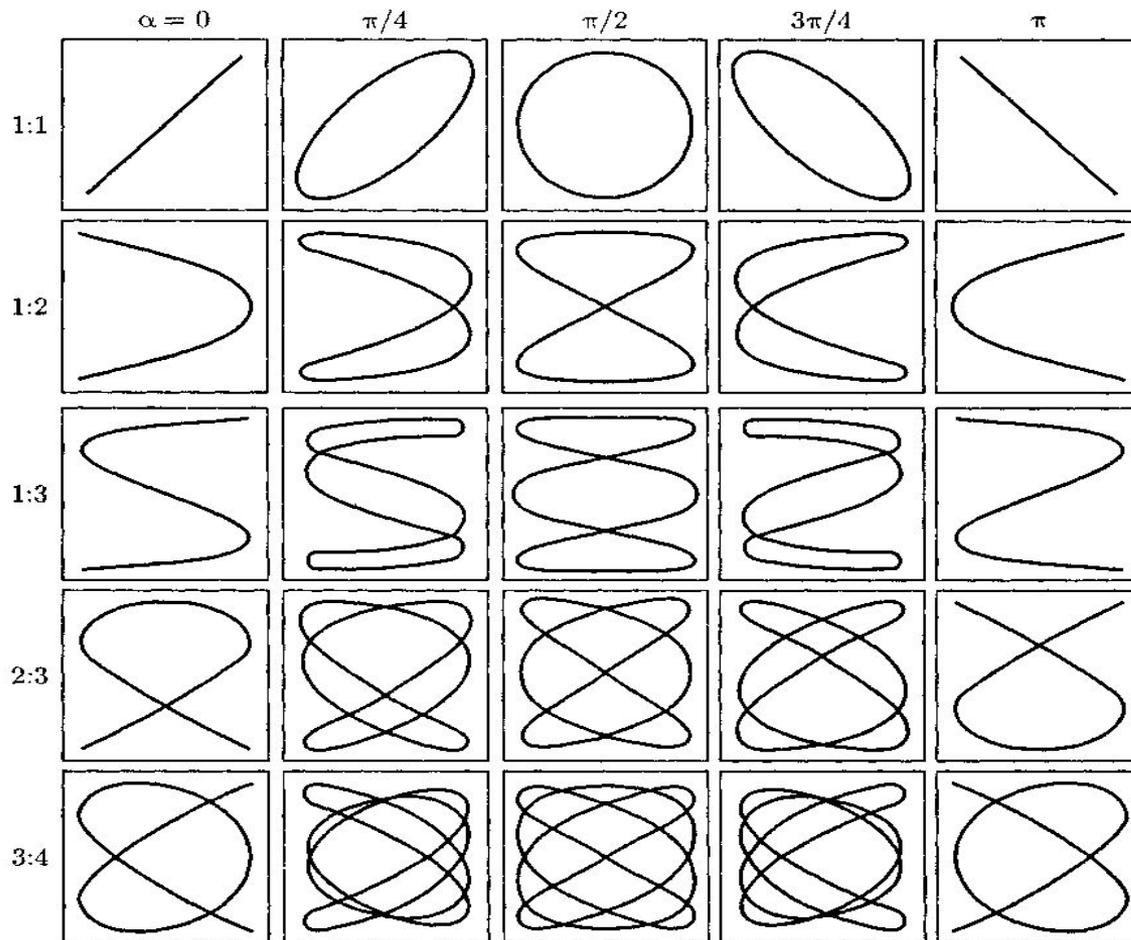
линейно поляризованные колебания

ПРОДОЛЖЕНИЕ

2) $\alpha = (2m + 1)\frac{\pi}{2} (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ Ур-е кол. примет вид $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$. Ур-е эллипса, оси которого

совпадают с осями координат. Если $A = B$, то эллипс вырождается в окружность. Такие колебания называются циркулярно поляризованными колебаниями или колебаниями, поляризованными по кругу.

Если частоты складываемых взаимно перпендикулярных колебаний различны, то замкнутая траектория результ. колебания довольно сложна. Замкнутые траектории, прочерчиваемые точкой, совершающей одновременно два взаимно перпендикулярных колебания, называются *фигурами Лиссажу*



Вид этих кривых зависит от соотношения амплитуд, частот и разности фаз складываемых колебаний.

На рис. представлены фигуры Лиссажу для различных соотношений частот и разностей фаз.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний (механических и электромагнитных) и его решение. Автоколебания

Рассмотрим свободные *затухающие колебания* — колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются.

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы задается в виде

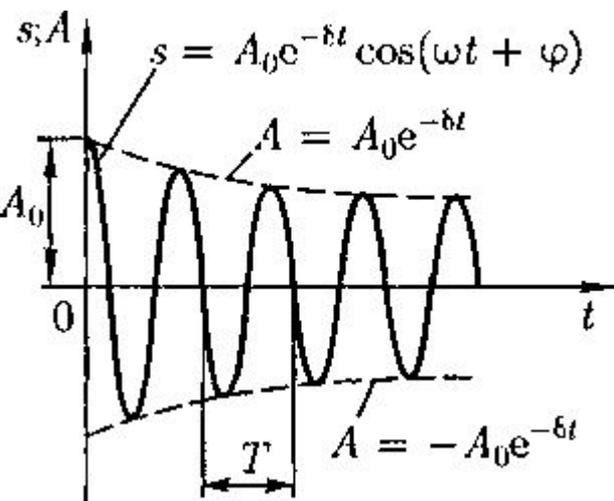
$$\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$$

δ — коэфф. Затухания. Решением ур-я для малых затуханий представляется в виде $s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$

амплитуда затухающих колебаний

$$A = A_0 e^{-\delta t}$$

График зависимости затух. Кол.-й. Период и амплитуда не остаются постоянными.



$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \quad \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T} \quad \text{Декремент затухания}$$

$$\theta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e} \quad \text{Логарифмический декремент затухания. Не - число кол. -й, совершаемых за время уменьшения амплитуды в e раз}$$

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N_e = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta} \quad \text{Добротность кол.-й системы.}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

1. Свободные затухающие колебания пружинного маятника.

Для пружинного маятника массой m , совершающего малые колебания под действием упругой силы $F = -kx$, сила трения пропорциональна скорости, т. е.

$$F_{\text{тр}} = -rv = -r\dot{x}, \quad r \text{ — коэффициент сопротивления};$$

знак «-» указывает на противоположные направления силы трения и скорости. При данных условиях закон движения маятника будет иметь вид

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}.$$

Учитывая, что $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ принимая $\delta = \frac{r}{2m}$ составим диф. Ур-е затух. Кол-й $\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$

Решением $x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$, где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$

2. Свободные затухающие колебания в электрическом колебательном контуре

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний заряда в контуре (при $R \neq 0$) имеет вид

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0.$$

Принимая коэф. Затух. $\delta = \frac{R}{2L}$, Получим $\ddot{Q} + 2\delta \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0.$

Решением $Q = Q_m e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$ частота $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ меньше собственной частоты контура ω_0

Добротность контура $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$

Сопоставление затухающих колебаний пружинного маятника и колебаний в электрическом колебательном контуре

Колебания			
механические		электромагнитные	
Дифференциальное уравнение	$\ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$ $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$	Дифференциальное уравнение	$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0$ $\ddot{Q} + 2\delta \dot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$
Масса	m	Индуктивность катушки	L
Коэффициент сопротивления	r	Сопротивление	R
Коэффициент жесткости	k	Обратная величина емкости	$\frac{1}{C}$
Смещение	x	Заряд	Q
Скорость	v	Сила тока	I
Потенциальная энергия	$\frac{kx^2}{2}$	Энергия электрического поля конденсатора	$\frac{Q^2}{2C}$
Кинетическая энергия	$\frac{mv^2}{2}$	Энергия магнитного поля катушки	$\frac{LI^2}{2}$
Собственная частота пружинного маятника	$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$	Собственная частота колебательного контура	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
Циклическая частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}$	Циклическая частота затухающих колебаний	$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$
Коэффициент затухания	$\delta = \frac{r}{2m}$	Коэффициент затухания	$\delta = \frac{R}{2L}$
Добротность пружинного маятника	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{\sqrt{km}}{r}$	Добротность колебательного контура	$Q = \frac{\omega_0}{2\delta} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (механических и электромагнитных) и его решение

Чтобы в реальной системе для получения незатухающих колебаний, надо компенсировать потери энергии в колебательной системе с помощью периодически действующего фактора $X(t)$, изменяющего по гармоническому закону:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t.$$

Для мех. системы роль $X(t)$ играет внешняя вынуждающая сила $F = F_0 \cos \omega t$. тогда диф. ур.-е для пружинного маятника запишется в виде

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t. \quad \text{преобразуя получим:}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\delta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F \cos \omega t$$

Аналогично можно составить диф. Ур.-е для эл. Маг. Кол., если вынуждающая ЭДС или переменное напряжение изменяется как

$$U = U_m \cos \omega t. \quad \frac{d^2 Q}{dt^2} + 2\delta \frac{dQ}{dt} + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t$$

Линейное неоднородное Диф. Ур.-е вынужденных колебаний. Решение этих уравнений ищется как сумма общего решения однородного уравнения и *частного* решения неоднородного уравнения.



$$s_1 = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega_1 t - \varphi_1) \quad s = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}} \cos(\omega t - \arctg \frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2})$$

S_1 – общее решение однородного ур.-я

S – частное решение неоднородного ур.-я

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Для эл.-маг. кол.-я можно получить кол.-е тока $I = -\omega Q_m \sin(\omega t - \alpha) = I_m \cos(\omega t - \alpha + \frac{\pi}{2})$ где

$$I_m = \omega Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Тогда ток в цепи определяется как

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{где} \quad \varphi = \arctg \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

Если $\varphi \approx 0$ и $\omega L \approx \frac{1}{\omega C}$ ток отстает по фазе от напряжения, если $\varphi \approx 0$ и $\omega L \approx \frac{1}{\omega C}$ тогда ток опережает напряжение.

Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс

Рассмотрим зависимость амплитуды A вынужденных колебаний от частоты ω . Из формулы $A = \frac{x_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}$

следует, что амплитуда A имеет максимум при минимальном значении подкоренного выражения. Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв его нулю, получим условие, определяющее резонансную частоту

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

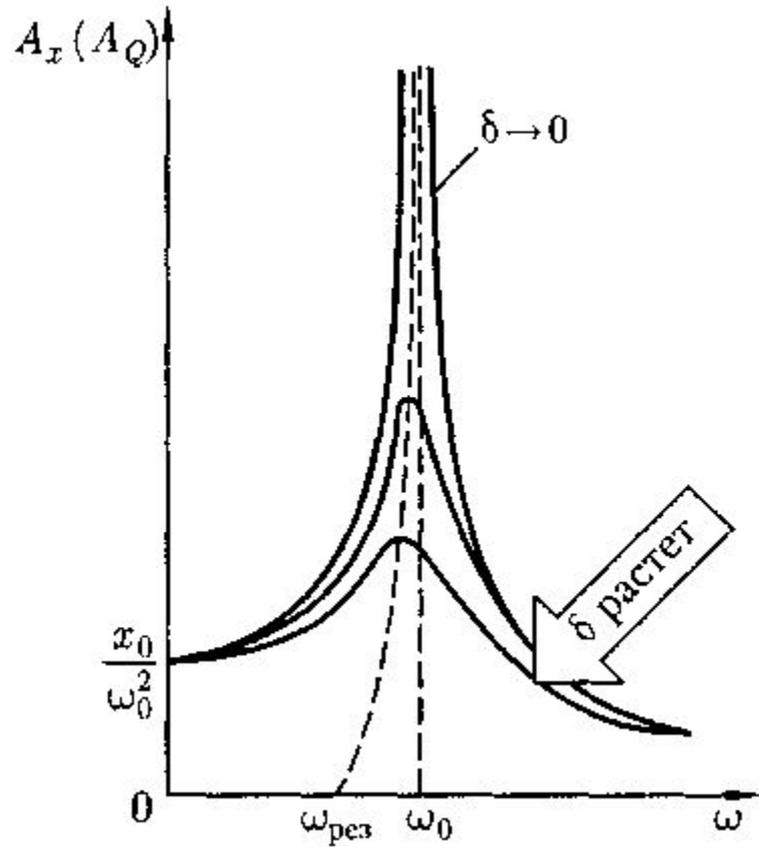
Явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте, равной или близкой собственной частоте колебательной системы, называется **резонансом**.

При $\delta^2 \approx \omega_0^2$ резонансная частота совпадает с $\omega_{рез} = \omega_0$ тогда амплитуда

$$A = \frac{x_0}{2\delta \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Зависимости амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях δ чем меньше δ , тем выше и правее лежит максимум данной кривой. *резонансные кривые.*

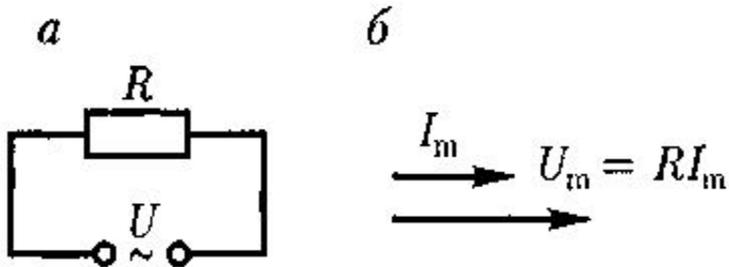


Переменный ток

Рассмотрим последовательно процессы, происходящие на участке цепи, содержащем резистор, катушку индуктивности и конденсатор, к концам которого приложено переменное напряжение

$$U = U_m \cos \omega t$$

1. Переменный ток, текущий через резистор сопротивлением R . Согласно 3-на Ома для уч-ка цепи



$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t = I_m \cos \omega t,$$

Сдвиг фаз м/у током и напряжения равен нулю

2. Переменный ток, текущий через катушку индуктивностью L . Если в цепи приложено переменное напряжение, ЭДС то в ней потечет переменный ток, в результате чего возникнет

$$U = U_m \cos \omega t$$

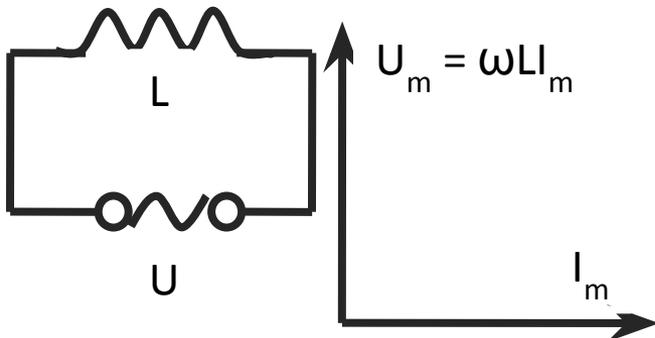
самоиндукции.

$$\mathcal{E}_s = -L \frac{dI}{dt},$$

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\text{или } L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t$$

Тогда закон Ома для рассматриваемого участка цепи имеет вид



Вычисленные значения тока и напряжения имеют вид

$$I = I_m \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$U_L = \omega LI_m \cos \omega t$$

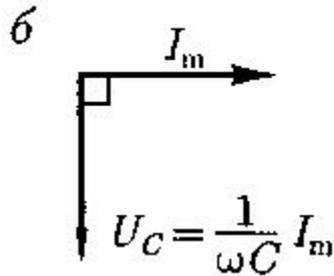
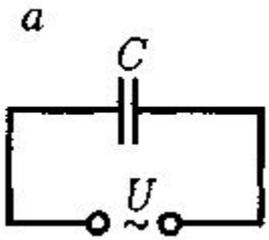
Падение напряжения U_L опережает по фазе ток I текущий через катушку, на $\pi/2$, что и показано на векторной диаграмме

ПРОДОЛЖЕНИЕ

3. Переменный ток, текущий через конденсатор емкостью C

Если переменное напряжение приложено к конденсатору, то он все время перезаряжается, и в цепи течет переменный ток. Так как все внешнее напряжение приложено к конденсатору, а сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь, то

$$\frac{Q}{C} = U_C = U_m \cos \omega t.$$



Сила тока

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Падение напряжения на конденсаторе

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t.$$

Где $R_C = \frac{1}{\omega C}$ емкостное сопротивление

Из сравнения тока и падения напряжения вытекает, что падение напряжения U_C отстает по фазе от текущего через конденсатор тока I на $\pi/2$

4. Цепь переменного тока, содержащая последовательно включенные резистор, катушку индуктивности и конденсатор.

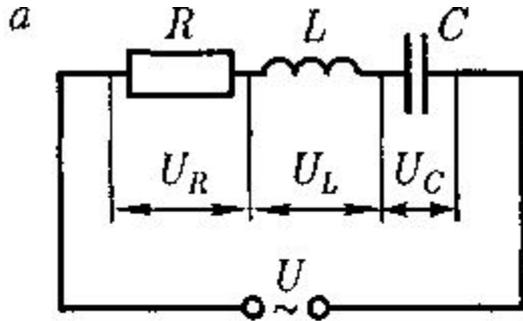
Согласно 3-на Кирхгофа алгебраическая сумма падений напряжений на резисторе (U_R), катушке (U_L) и конденсаторе (U_C) равна Э.Д.С в контуре. Амплитуда U_m приложенного напряжения должна быть равна векторной сумме амплитуд этих падений напряжений.

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Из рисунка следует, что угол φ определяет разность фаз между напряжением и силой тока.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

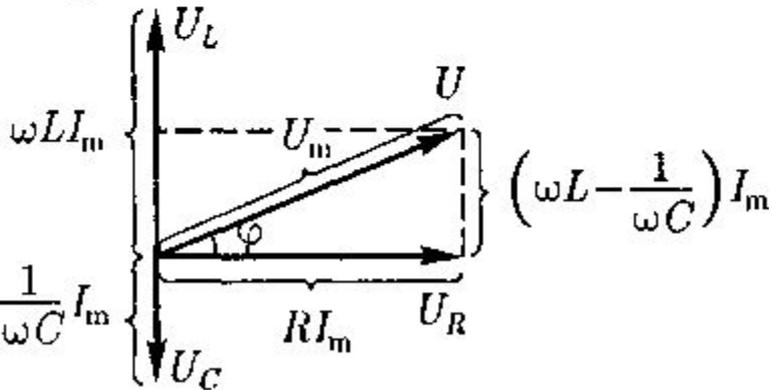


Если напряжение в цепи изменяется по закону $U = U_m \cos \omega t$ то в цепи течет ток

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi)$$

Полное сопротивление $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$

б



Реактивное сопротивление

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

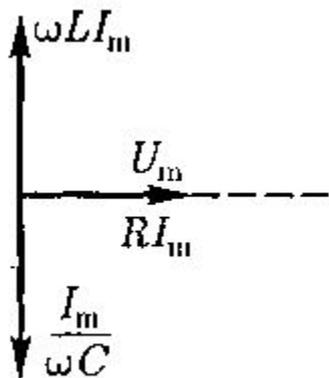
Резонанс напряжений

Если в цепи переменного тока, содержащей последовательно включенные конденсатор, катушку индуктивности и резистор $R_L = R_C$ или $\omega L = \frac{1}{\omega C}$ то сдвиг фаз φ между током и напряжением обращается в нуль ($\varphi = 0$),

т.е. изменения тока и напряжения происходят синфазно. Тогда частота

Векторная диаграмма

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



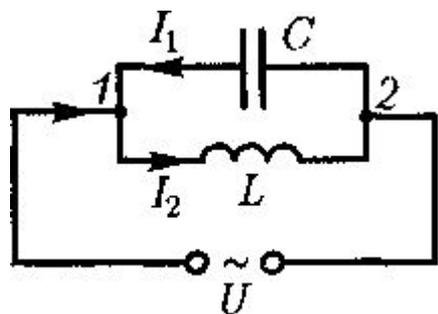
Полное сопротивление $Z = R$ равно активному сопротивлению— минимальное, ток в цепи максимальный, а падения напряжений на конденсаторе (U_C) и катушке индуктивности (U_L) одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется **резонансом напряжений**, а частота —**резонансной частотой**.

Резонанс токов

Цепь переменного тока, содержащую параллельно включенные конденсатор емкостью C и катушку индуктивностью L . Амплитуда силы тока во внешней (неразветвленной) цепи резко уменьшается и равна нулю при активном сопротивлении $R = 0$.

$$I_m = |I_{m1} - I_{m2}| = U_m \left| \omega C - \frac{1}{\omega L} \right|$$

Если $\omega = \omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, то $I_{m1} = I_{m2}$ резонанс токов



Мощность, выделяемая в цепи переменного тока

Мгновенное значение мощности переменного тока равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока: $P(t) = U(t)I(t)$, где $U(t) = U_m \cos \omega t$ $I(t) = I_m \cos(\omega t - \varphi)$

После преобразования и учитывая, что $\langle \cos^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$, и $\langle \sin \omega t \cos \omega t \rangle = 0$, получим

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m U_m \cos \varphi. \quad \text{где} \quad I = \frac{I_m}{\sqrt{2}}, \quad U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad \text{действующие значения тока и напряжения.}$$

Тогда среднее значения мощности $\langle P \rangle = IU \cos \varphi$, множитель $\cos \varphi$ называется коэфф. мощности.

Мощность, выделяемая в цепи переменного тока, зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между ними. Если в цепи реактивное сопротивление отсутствует, то $\cos \varphi = 1$ и $P = UI$. Если цепь содержит только реактивное сопротивление ($R = 0$), то $\cos \varphi = 0$ и средняя мощность равна нулю, какими бы большими ни были ток и напряжение.

УПРУГИЕ ВОЛНЫ. Волновые процессы. Продольные и поперечные волны

Процесс распространения колебаний в сплошной среде называется *волновым процессом (или волной)*. Вместе с волной от частицы к частице среды передаются лишь состояние колебательного движения и его энергия. Поэтому *основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества*.

Типы волн: 1) *волны на поверхности жидкости*, 2) *упругие* и 3) *электромагнитные волны*.

Упругими (или механическими) волнами называются механические возмущения, распространяющиеся в упругой среде. Упругие волны бывают **продольные** и **поперечные**. В **продольных волнах** частицы среды колеблются в направлении распространения волны, в **поперечных** — в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны. Продольные волны могут возбуждаться в средах, в которых возникают упругие силы *при деформации сжатия и растяжения*, т. е. в *твердых, жидких и газообразных телах*. Поперечные волны могут возбуждаться в среде, в которой возникают упругие силы при деформации сдвига, т.е. в *твердых телах*; в жидкостях и газах возникают только продольные волны, а в твердых телах — как продольные, так и поперечные.

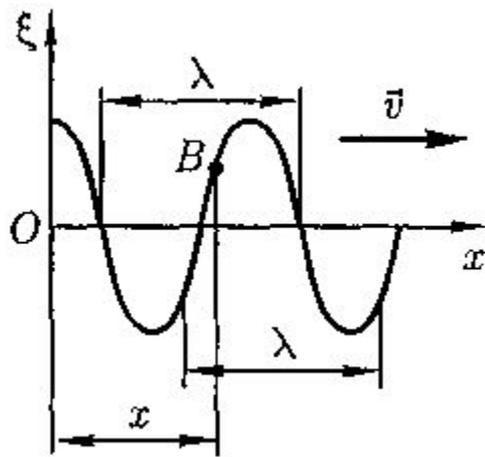


График функции $\xi(x,t)$ напоминает график гармонического колебания, однако они различны по существу. График волны дает зависимость смещения всех частиц среды от расстояния до источника колебаний в данный момент времени, а график колебаний — зависимость смещения данной частицы от времени.

Расстояние между ближайшими частицами, колеблющимися в одинаковой фазе, называется **длиной волны λ** .

$$\lambda = vT, \quad T = 1/\nu \quad \nu - \text{частота колебания}$$

Геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t , называется **волновым фронтом**. Геометрическое место точек, колеблющихся в одинаковой фазе, называется **волновой поверхностью**. Волновых поверхностей можно провести бесчисленное множество, а волновой фронт в каждый момент времени — один. Волновые поверхности могут быть любой формы, а в простейшем случае они представляют собой совокупность плоскостей, параллельных друг другу, или совокупность концентрических сфер. Соответственно *волна* называется **плоской или сферической**.

Уравнение бегущей волны. Фазовая скорость. Волновое уравнение

Бегущими волнами называются волны, которые переносят в пространстве энергию. Основная характеристика - **вектор плотности потока энергии**. Его направление совпадает с направлением переноса энергии, а его модуль равен энергии, переносимой волной за единицу времени через единичную площадку, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны.

Рассмотрим некоторую частицу **B** среды, находящуюся от источника колебаний **O** на расстоянии x . Если колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, описываются функцией $\xi(x=0, t) = A \cos \omega t$, то частица **B** среды колеблется по тому же закону, но ее колебания будут отставать по времени от колебаний источника на τ , так как для прохождения волной расстояния x требуется время $\tau = x/v$, где v — скорость распространения волны. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x , имеет вид

$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{v} \right); \quad \text{уравнение бегущей волны.}$$

В общем случае уравнение плоской волны

$$\xi(x, t) = A \cos \left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right]$$

Фаза плоской волны $\left[\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right]$ если фаза постоянна, тогда $\frac{dx}{dt} = v$ фазовая скорость

Волновое число $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{vT} = \frac{\omega}{v}$

$v = \frac{\omega}{k}$

Тогда

$$\xi(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

или

$$\xi(x, t) = A e^{i(\omega t - kx + \varphi_0)}$$

Ур.-е сферической волны

$$\xi(r, t) = \frac{A_0}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где r — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды. В случае сферической волны даже в среде, не поглощающей энергию, амплитуда колебаний не остается постоянной, а убывает с расстоянием по закону $1/r$.

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Если фазовая скорость волны в среде зависит от их частоты, то это явление называют *дисперсией волн, а среда - диспергирующей средой*.

В однородной изотропной среде **волновое уравнение** представляется в виде

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \text{или} \quad \Delta \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad \Delta - \text{оператор Лапласа}$$

Решением волнового уравнения является уравнение любой волны. Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , волновое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Принцип суперпозиции. Групповая скорость

Принцип суперпозиции волн - при распространении в линейной среде нескольких волн каждая из них распространяется так, как будто другие волны отсутствуют, а результирующее смещение частицы среды в любой момент времени равно геометрической сумме смещений, которые получают частицы, участвуя в каждом из слагающих волновых процессов.

Волновым пакетом называется суперпозиция волн, мало отличающихся друг от друга по частоте.

Рассмотрим простейшую группу волн, получающуюся в результате наложения двух распространяющихся вдоль оси x гармонических волн с одинаковыми амплитудами, близкими частотами и волновыми числами, причем $d\omega \ll \omega$ и $dk \ll k$, тогда $\xi = A_0 \cos(\omega t - kx) + A_0 \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] = 2A_0 \cos[(t d\omega - x dk)/2] \cos(\omega t - kx)$

Амплитуда волны $A = \left| 2A_0 \cos \frac{t d\omega - x dk}{2} \right|$ медленно меняющаяся функция от времени t и от координаты x

ПРОДОЛЖЕНИЕ

За скорость распространения этой негармонической волны (волнового пакета) принимают скорость перемещения максимума амплитуды волны, рассматривая тем самым максимум в качестве центра волнового пакета. При условии, что $\mathbf{td\omega} - \mathbf{xdk} = \text{const}$, Γ групповую скорость.

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{d\omega}{dk}.$$

Связь м/у групповой
скоростями

$$u = \frac{d\omega}{dk}$$

и фазовой

$$\frac{dx}{dt} = v.$$

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

Из формулы вытекает, что \mathbf{u} может быть как меньше, так и больше \mathbf{v} . В недиспергирующей среде групповая скорость совпадает с фазовой.

$$\frac{dv}{d\lambda} = 0 \text{ и}$$

Групповая скорость $\mathbf{u} \ll \mathbf{c}$, в то время как для фазовой скорости ограничений не существует.

Интерференция волн

Волны являются **когерентными**, если разность их фаз остается постоянной во времени. Когерентными могут быть волны, имеющие одинаковую частоту.

При наложении в пространстве двух(или нескольких) когерентных волн в разных его точках получается усиление или ослабление результирующей волны в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Это явление называется **интерференцией волн**.

Рассмотрим наложение двух когерентных сферических волн

$$\xi_1 = \frac{A_0}{r_1} \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1);$$

$$\xi_2 = \frac{A_0}{r_2} \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2),$$

Амплитуда результирующей волны равна $A^2 = A_0^2 \left\{ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{2}{r_2 r_1} \cos[k(r_1 - r_2) - (\varphi_2 - \varphi_1)] \right\}$

Так как для когерентных источников разность начальных фаз $(\varphi_2 - \varphi_1) = const$, то результат наложения двух волн в различных точках зависит от величины $\mathbf{A} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, называемой **разностью хода волн**.

В точках где $k(r_1 - r_2) - (\varphi_2 - \varphi_1) = \pm 2\pi m$ наблюдается интерференционный максимум, амплитуда

результирующего колебания равна $A = \frac{A_0}{r_1} + \frac{A_0}{r_2}$

В точках где $k(r_1 - r_2) - (\varphi_2 - \varphi_1) = \pm(2m + 1)\pi$ наблюдается интерференционный минимум, амплитуда

результирующего колебания равна $A = \left| \frac{A_0}{r_1} - \frac{A_0}{r_2} \right|$ m – порядок интерференционного максимума или минимума

Стоячие волны

Стоячие волны — это волны, образующиеся при наложении двух бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу с одинаковыми частотами и амплитудами.

Рассмотрим две плоские волны распространяющиеся навстречу друг другу вдоль оси x .

$$\begin{cases} \xi_1 = A \cos(\omega t - kx), \\ \xi_2 = A \cos(\omega t + kx) \end{cases}$$

Сложив эти ур.-я получим ур.-е стоячей волны в виде

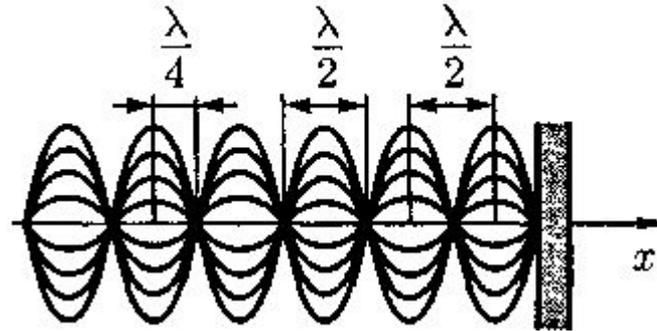
$$\xi = \xi_1 + \xi_2 = 2A \cos kx \cos \omega t = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t$$

Амплитуда стоячей волны $A_{cm} = \left| 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \right|$ зависит от координаты x рассматриваемой точки. В точках,

где $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$ амплитуда достигает максимума (пучности), в точках $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ амплитуда обращается в нуль (узлы). Координаты пучностей и узлов определяются как

$$x_{п} = \pm m \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots);$$

$$x_{узл} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$



В направлении распространения бегущей волны переносится энергия колебательного движения. В случае же стоячей волны переноса энергии нет, так как падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях. Поэтому полная энергия результирующей стоячей волны в пределах между узловыми точками остается постоянной. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической; энергии в потенциальную и обратно.

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Согласно волновой теории, свет представляет собой упругую волну, распространяющуюся в среде. Волновая теория основывается на **принципе Гюйгенса**: каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн дает положение волнового фронта в следующий момент времени.

Волновым фронтом называется геометрическое место точек, до которых доходят колебания к моменту времени t .

Необходимым условием интерференции волн является их **когерентность, т.е. согласованное** протекание во времени и пространстве нескольких колебательных или волновых процессов, а также монохроматичность волны одной определенной и строго постоянной частоты.

Временная когерентность волны характеризует сохранение взаимной когерентности при временном отставании одного из таких лучей по отношению к другому.

Пространственная когерентность волны характеризует наличие взаимной когерентности двух световых пучков, взятых из различных точек сечения волны.

Рассмотрим две монохроматические и когерентные волны, которые накладываются друг на друга в пространстве образуют волну с интенсивностью

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

В точках пространства, где $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) > 0$, интенсивность $I > I_1 + I_2$, где $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) < 0$ интенсивность $I < I_1 + I_2$. Следовательно, при наложении двух (или нескольких) когерентных световых волн происходит пространственное перераспределение светового потока, в результате чего в одних местах возникают максимумы, а в других — минимумы интенсивности. Это явление называется **интерференцией света**.

Для получения когерентных световых волн применяют метод разделения волны, излучаемой одним источником, на две части, которые после прохождения разных *оптических путей накладываются друг на друга*, и наблюдается интерференционная картина. После разделения одной волны на две, далее они проходят в разных средах с показателями преломления n_1 и n_2 разные пути s_1 и s_2 . В точке наложения первая волна возбуждит колебание $I_1 \cos \omega(t - s_1/v_1)$, вторая - $I_2 \cos \omega(t - s_2/v_2)$, где $v_1 = c/n_1$, $v_2 = c/n_2$ Фазовые скорости волны в первой и во второй средах.

Разность фаз колебаний, возбуждаемых волнами в этой точке, равна

$$\delta = \omega \left(\frac{s_2}{v_2} - \frac{s_1}{v_1} \right) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (s_2 n_2 - s_1 n_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} (L_2 - L_1) = \frac{2\pi}{\lambda_0} \Delta$$

Произведение геометрической длины s пути световой волны в данной среде на показатель n преломления этой среды называется **оптической длиной пути L** , а $\Delta = L_2 - L_1$ оптической разностью хода.

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Если оптическая разность хода равна целому числу длин волн в вакууме $\Delta = \pm m\lambda_0$ ($m = 0, 1, 2, \dots$),

то $\delta = \pm 2\pi m$, и колебания, возбуждаемые в данной точке *обеими волнами*, будут происходить в одинаковой фазе, это является *условием интерференционного максимума*.

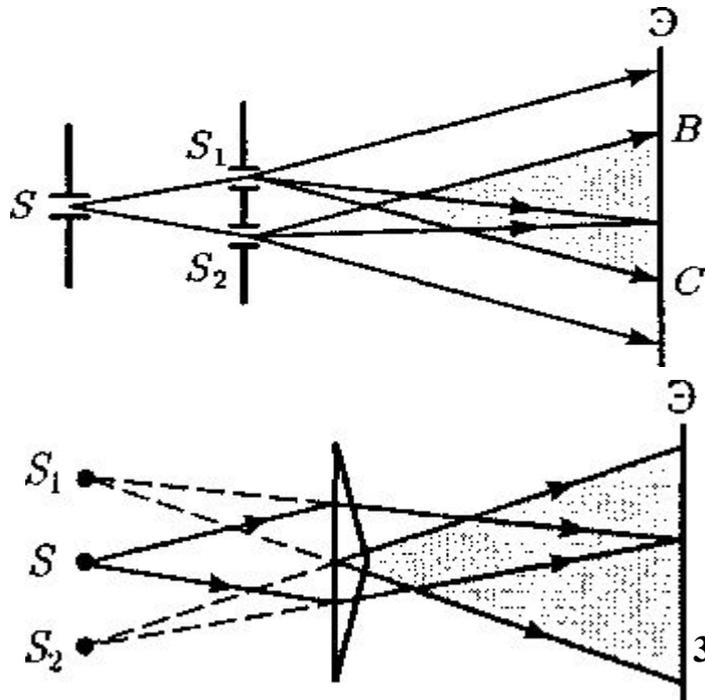
Если оптическая разность хода $\Delta = \pm(2m + 1)\frac{\lambda_0}{2}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$),

то $\delta = \pm(2m + 1)\pi$, и колебания, возбуждаемые в точке *M* *обеими волнами*, будут происходить в противофазе. Это является *условием интерференционного минимума*.

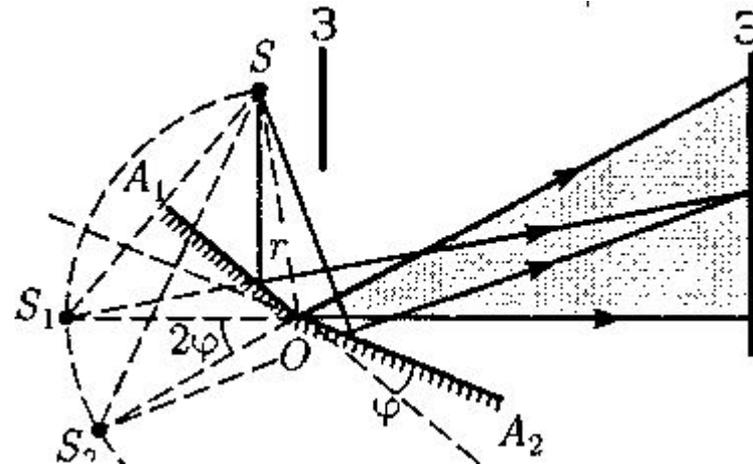
Способы наблюдения интерференции света

Метод получения когерентных пучков *делением волнового фронта* заключается в том, что исходящий из источника пучок делится на два пучка.

1. Метод Юнга.



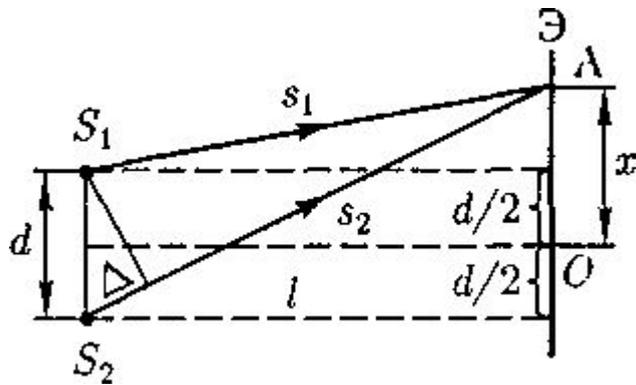
2. Зеркала Френеля.



3. Бипризма Френеля.

Расчет интерференционной картины от двух источников.

Рассмотрим две узкие параллельные щели S_1 и S_2 , расположенные на расстоянии d друг от друга и являющиеся когерентными источниками света. Интерференция наблюдается в произвольной точке A экрана, параллельного обеим щелям и расположенного от них на расстоянии l , причем $l \gg d$



Интенсивность в любой точке A экрана, лежащей на расстоянии x от O , определяется оптической разностью хода $\Delta = s_2 - s_1$

$$s_2^2 = l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2; \quad s_1^2 = l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2,$$

откуда
$$\Delta = s_2 - s_1 = \frac{2xd}{s_1 + s_2}.$$

Из условия $l \gg d$ следует, что $s_2 + s_1 \approx 2l$, поэтому

$$\Delta = \frac{xd}{l}.$$

тогда максимум

$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$x_{\min} = \pm \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{l}{d} \lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

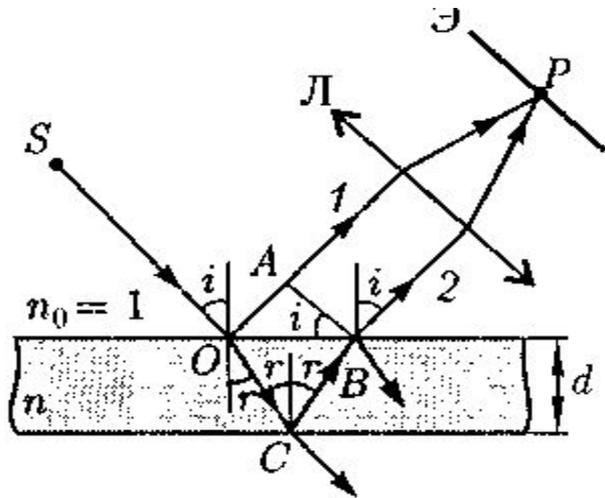
минимум интенсивности

Расстояние между двумя соседними максимумами (или минимумами), ширина интерференционной полосы, равно

$$\Delta x = \frac{l}{d} \lambda_0,$$

Интерференция света в тонких пленках

Если монохроматический свет падает на тонкую прозрачную плоскопараллельную пластинку от точечного источника, то он отражается двумя поверхностями этой пластинки: верхней и нижней. На пластинке происходит, деление амплитуды, поскольку фронты волн в ней сохраняются, меняя лишь направление своего движения.



Вышедшие из пленки лучи 1 и 2 когерентны, если оптическая разность их хода мала по сравнению с длиной когерентности падающей волны. Если на их пути поставить собирающую линзу, то они сойдутся в одной из точек P фокальной плоскости линзы. В результате возникает интерференционная картина, которая определяется оптической разностью хода между интерферирующими лучами. Оптическая разность хода между двумя интерферирующими лучами от точки O до плоскости AB,

$$\Delta = n(OC + CB) - OA \pm \frac{\lambda_0}{2},$$

После преобразования разность хода с учетом потери полуволны определится $\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}$

В точке P будет интерфер. максимум

$$2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = m\lambda_0$$

минимум $2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2} = (2m + 1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$

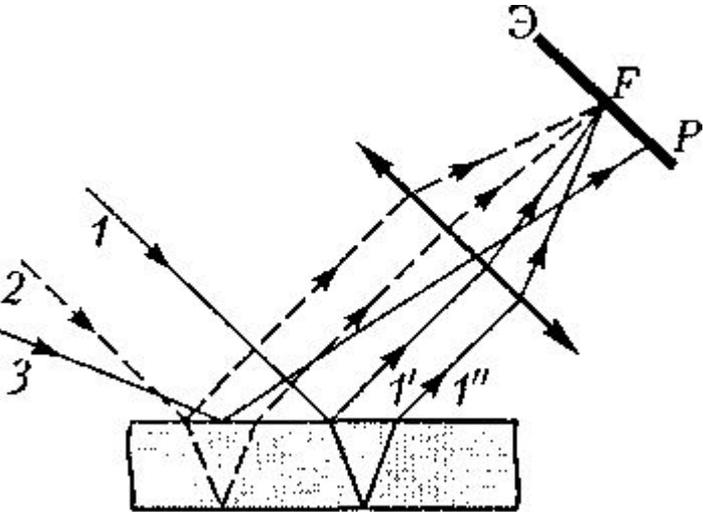
Интерференция наблюдается только в том случае, если удвоенная толщина пластинки меньше длины когерентности падающей волны.

Полосы равного наклона

1. Интерференция от плоскопараллельной пластины.

Интерференционная картина в плоскопараллельных пластинках (пленках) определяется показателем преломления n , толщиной пластинки d , длиной волны λ и углом падения i луча.

Интерференционные полосы, возникающие в результате наложения лучей, падающих на плоскопараллельную пластинку под одинаковыми углами, называются **полосами равного наклона**.

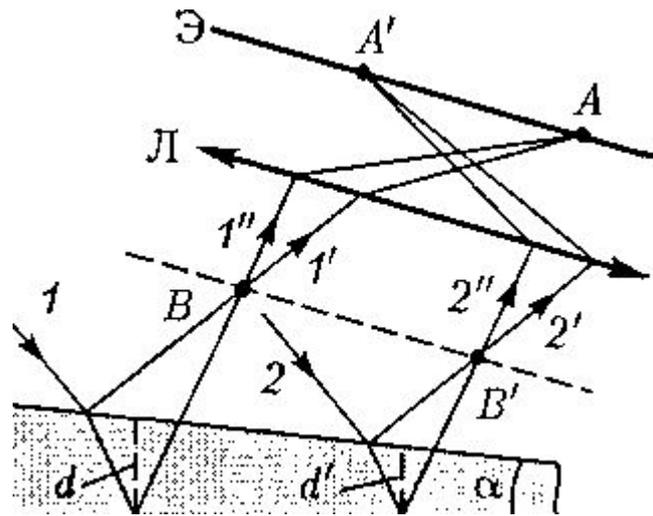


Лучи $1'$ и $1''$, отразившиеся от верхней и нижней граней пластинки, параллельны друг другу, так как пластинка плоскопараллельна. Следовательно, интерферирующие лучи $1'$ и $1''$ «пересекаются» только в бесконечности, т.е. *полосы равного наклона локализованы в бесконечности*. Для их наблюдения используют собирающую линзу и экран (Э), расположенный в фокальной плоскости линзы. Параллельные лучи $1'$ и $1''$ соберутся в фокусе F линзы ее оптическая ось параллельна лучам $1'$ и $1''$, в эту же точку придут и другие лучи, параллельные лучу 1 , в результате чего увеличивается общая интенсивность. Лучи 3 , наклоненные под другим углом, соберутся в другой точке P фокальной плоскости линзы. Если оптическая ось линзы перпендикулярна поверхности пластинки, то полосы равного наклона будут иметь вид концентрических колец с центром в фокусе линзы.

2. интерференция от пластинки переменной толщины.

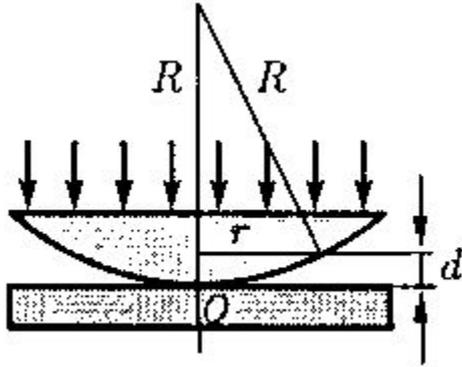
На тонкую прозрачную пластинку в виде клина (угол α между боковыми гранями мал) падает плоская волна, направление распространения которой совпадает с параллельными лучами 1 и 2 . Лучи $1'$ и $1''$ отраженные от верхней и нижней поверхностей клина. При определенном взаимном положении клина и линзы лучи $1'$ и $1''$ пересекутся в некоторой точке A , являющейся изображением точки B . Так как лучи $1'$ и $1''$ когерентны, они будут интерферировать. Лучи $2'$ и $2''$, образовавшиеся при делении луча 2 , падающего в другую точку клина, собираются линзой в точке A' . Таким образом, на экране возникает система интерференционных полос, называемые **полосами равной толщины**, которые локализованы вблизи поверхности клина

Полосы равной толщины



3. Кольца Ньютона

Наблюдаются при отражении света от воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны



Параллельный пучок света падает нормально на плоскую поверхность линзы и частично отражается от верхней и нижней поверхностей воздушного зазора между линзой и пластинкой. При наложении отраженных лучей возникают полосы равной толщины, при нормальном падении света имеющие вид концентрических колец. Центры колец Ньютона совпадают с точкой O соприкосновения линзы с пластинкой.

В отраженном свете оптическая разность хода: $\Delta = 2d + \frac{\lambda_0}{2}$,

где d — ширина зазора, R — радиус кривизны линзы, r — радиус кривизны окружности, всем точкам которой соответствует одинаковый зазор d .

Учитывая, что разность хода

$$\Delta = \frac{r^2}{R} + \frac{\lambda_0}{2},$$

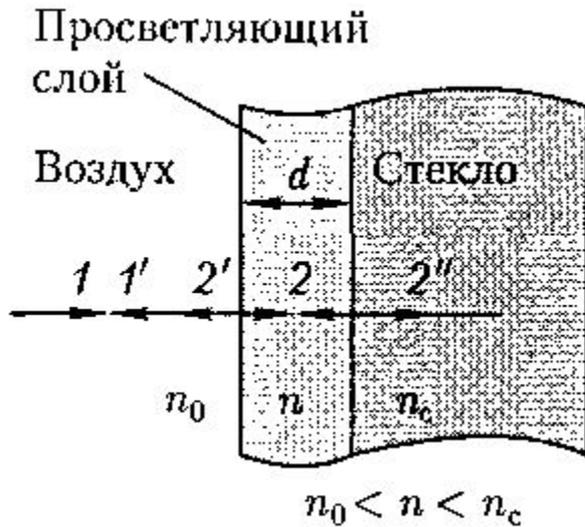
из условий максимума и минимума, получим

выражения для радиусов m -го светлого кольца и m -го темного кольца соответственно

$$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda_0 R} \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad \text{и} \quad r_m^* = \sqrt{m \lambda_0 R} \quad (m = 0, 1, 2, 3, \dots).$$

Интерференцию можно наблюдать и в *проходящем свете*, причем в данном случае не наблюдается потери полуволны. Следовательно, оптическая разность хода для проходящего и отраженного света отличается на $\lambda/2$, т.е. *максимумам интерференции в отраженном свете соответствуют минимумы в проходящем, и наоборот.*

Применение интерференции света



Если на поверхности оптических систем наносить прозрачную пленку с показателем преломления меньшим, чем у материала и толщина которой соизмерима с длиной волны оптического излучения, тогда на наблюдается усиления или уменьшения интенсивности отраженного или прошедшего света через данную оптическую систему (называется просветление оптики). Толщину пленки d и показатели преломления стекла n_c и пленки n можно подобрать так, чтобы волны, отраженные от обеих поверхностей пленки, гасили друг друга. Расчет показывает, что амплитуды отраженных волн равны, если

$$n = \sqrt{n_c}$$

Условие минимума при нормальном падении света определится

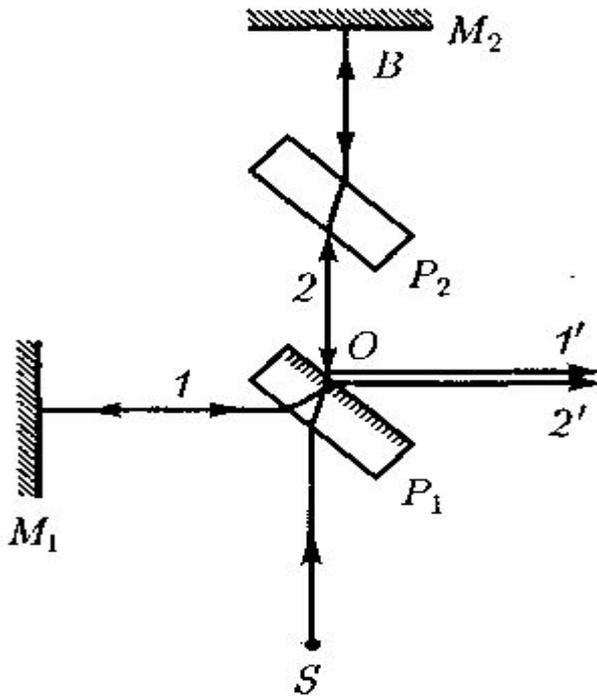
$$2nd = (2m + 1) \frac{\lambda_0}{2} \quad nd \text{ — оптическая толщина пленки.}$$

Явление интерференции лежит в основе устройства **интерферометров**.
Интерферометр Майкельсона.

Интерферометры измеряющие изменения показателя преломления прозрачных тел в зависимости от давления, температуры, примесей и т. д. называются *интерференционные рефрактометры*. Изменение разности хода приведет к сдвигу интерференционных полос. Этот сдвиг можно характеризовать величиной

$$m_0 = \frac{\Delta}{\lambda} = \frac{(n_x - n_0)l}{\lambda},$$

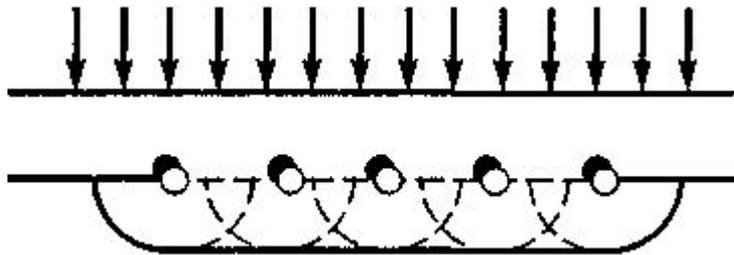
где m_0 показывает, на какую часть ширины интерференционной полосы сместилась интерференционная картина. Измеряя величину m_0 при известных λ , l и n_0 , можно вычислить n_x или изменение $n_x - n_0$.



ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Принцип Гюйгенса—Френеля

Дифракцией называется огибание волнами препятствий, на их пути. Объяснение дифракции возможно с помощью принципа Гюйгенса, согласно которому каждая точка, до которой доходит волна, служит центром вторичных волн, а огибающая этих волн задает положение волнового фронта в следующий момент времени.



Построив огибающую вторичных волн для некоторого момента времени, получим, что фронт волны заходит в область геометрической тени, т. е. волна огибает края отверстия. Принцип Гюйгенса решает лишь задачу о направлении распространения волнового фронта, но не затрагивает вопроса об амплитуде. Согласно *принципу Гюйгенса —Френеля, световая волна, возбуждаемая каким-либо источником S , может быть представлена как результат суперпозиции когерентных вторичных волн, «излучаемых» фиктивными источниками.* Такими источниками могут служить бесконечно малые элементы любой замкнутой поверхности, охватывающей источник S .

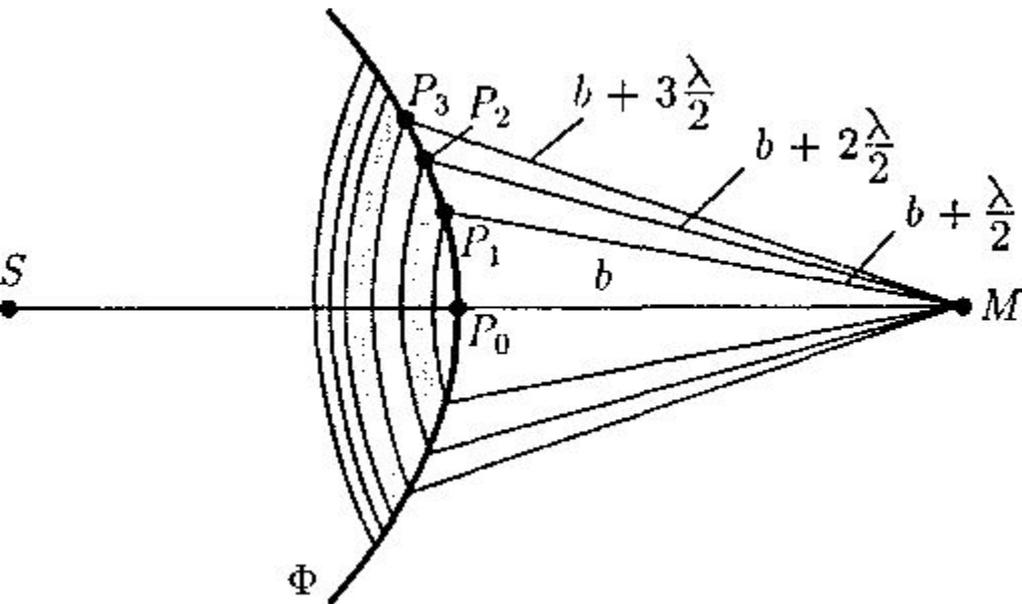
Учет амплитуд и фаз вторичных волн позволяет в каждом конкретном случае найти амплитуду (интенсивность) результирующей волны в любой точке пространства, т. е. определить закономерности распространения света.

Метод зон Френеля.

Прямолинейное распространение света

Френель рассмотрел взаимную интерференцию вторичных волн применив метод зон, получивший название *метода зон Френеля*. Найдем в произвольной точке M амплитуду световой волны, распространяющейся в однородной среде из точечного источника S *монохроматического* света. Согласно принципу Гюйгенса—Френеля, заменим действие источника S *действием воображаемых* источников, расположенных на вспомогательной поверхности Φ , являющейся поверхностью фронта волны, идущей из S (*поверхность сферы с центром S*). Френель предложил разбить волновую поверхность Φ на кольцевые зоны такого размера, чтобы расстояния от краев зоны до M *отличались на $\lambda/2$*

ПРОДОЛЖЕНИЕ

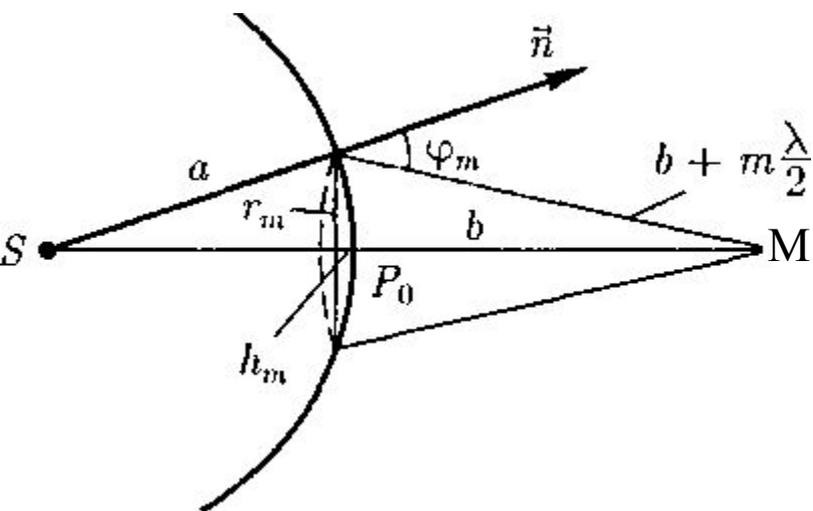


Так как колебания от соседних зон проходят до точки M расстояния, отличающиеся на $\lambda/2$, то в точку M они приходят в противоположной фазе и при наложении эти колебания будут взаимно ослаблять друг друга.

$$A = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots$$

где A_1, A_2, \dots — амплитуды колебаний, возбуждаемых 1-й, 2-й, ... зонами.

Для оценки амплитуд колебаний найдем площади зон Френеля



Пусть внешняя граница m -й зоны выделяет на волновой поверхности сферический сегмент высоты h_m . Обозначив площадь этого сегмента через σ_m найдем, что площадь m -й зоны Френеля равна $\Delta\sigma = \sigma_m - \sigma_{m-1}$. Тогда

$$r_m^2 = a^2 - (a - h_m)^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + h_m)^2$$

Учитывая, что $\lambda \ll a, \lambda \ll b$, получим

$$h_m = \frac{bm\lambda}{2(a+b)}$$

т.к. $h \ll a, r = 2ah$, тогда

$$\Delta\sigma_m = \sigma_m - \sigma_{m-1} = \frac{\pi ab\lambda}{a+b}$$

$$r_m = \sqrt{\frac{ab}{a+b} m\lambda}$$

Тогда площадь сегмента зон Френеля определится

Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске

Разделяют два типа дифракции: 1. на препятствие падает сферическая или плоская волна, а дифракционная картина наблюдается на экране, находящемся за препятствием на конечном от него расстоянии. **Дифракция Френеля (или дифракция в сходящихся лучах)**. Размеры отверстия $\gg \lambda$.

2. **Дифракция Фраунгофера (или дифракция в параллельных лучах)** наблюдается в том случае, когда источник света и точка наблюдения бесконечно удалены от препятствия, вызвавшего дифракцию. Длина щели \gg ее ширины.

I. Дифракция на круглом отверстии. Сферическая волна, распространяющаяся из точечного источника S , встречает на своем пути экран с круглым отверстием. Дифракционную картину наблюдаем на экране \mathcal{E} в точке B , лежащей на линии, соединяющей S с центром отверстия. Экран параллелен плоскости отверстия и находится от него на расстоянии b . Разобьем открытую часть волновой поверхности Φ на зоны Френеля. Вид дифракционной картины зависит от числа зон Френеля, укладывающихся на открытой части волновой поверхности в плоскости отверстия. Амплитуда результирующего колебания, возбуждаемого в точке B всеми зонами определяется

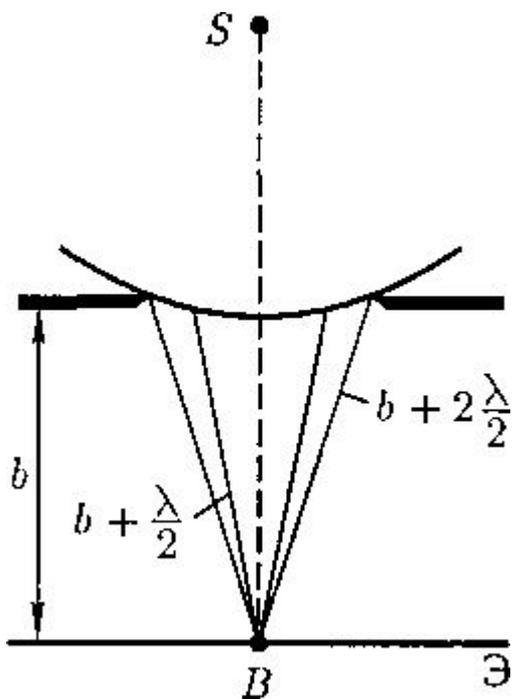
$$A = \frac{A_1}{2} \pm \frac{A_m}{2},$$

где знак «+» соответствует нечетным m и «—» — четным m .

дифракционная картина от круглого отверстия вблизи точки B будет иметь вид чередующихся темных и светлых колец с центрами в точке B (если m четное, то в центре будет темное кольцо, если m нечетное — то светлое кольцо), причем интенсивность в максимумах убывает с расстоянием от центра картины.

Число зон Френеля, открываемых отверстием, зависит от его диаметра.

Если он большой, то $A_m \ll A_1$ и результирующая амплитуда $A = A_1/2$, т.е. такая же, как и при полностью открытом волновом фронте. В данном случае дифракции не наблюдается, свет распространяется, как и в отсутствие круглого отверстия, прямолинейно.



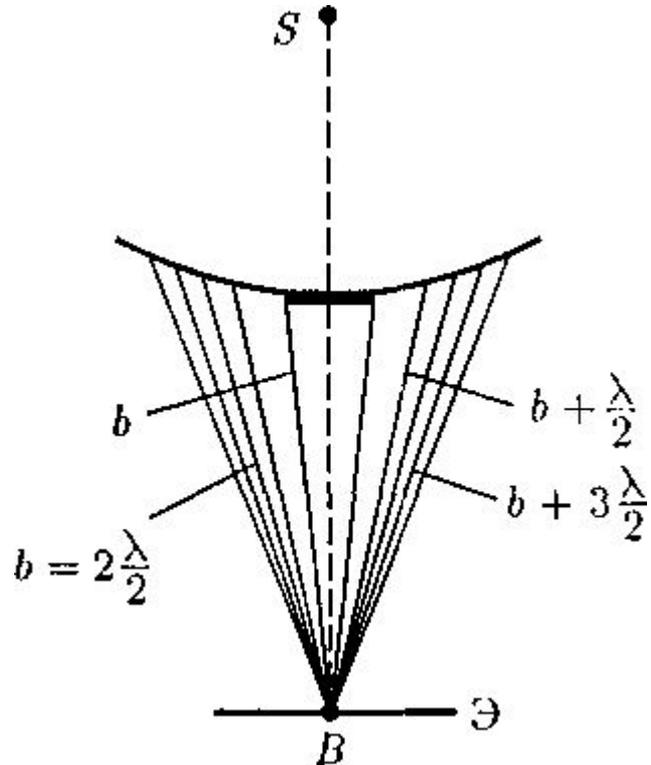
II. Дифракция на диске.

Сферическая волна, распространяющаяся от точечного источника S , встречает на своем пути непрозрачный диск. Дифракционную картину наблюдаем на экране \mathcal{E} в точке B , лежащей на линии, соединяющей S с центром диска. В данном случае закрытый диском участок волнового фронта надо исключить из рассмотрения и зоны Френеля строить, начиная с краев диска. Пусть диск закрывает m первых зон Френеля. Тогда амплитуда результирующего колебания в точке B равна

$$\begin{aligned} A &= A_{m+1} - A_{m+2} + A_{m+3} - \dots = \\ &= \frac{A_{m+1}}{2} + \left(\frac{A_{m+1}}{2} - A_{m+2} + \frac{A_{m+3}}{2} \right) + \dots \end{aligned}$$

или

$$A = \frac{A_{m+1}}{2},$$

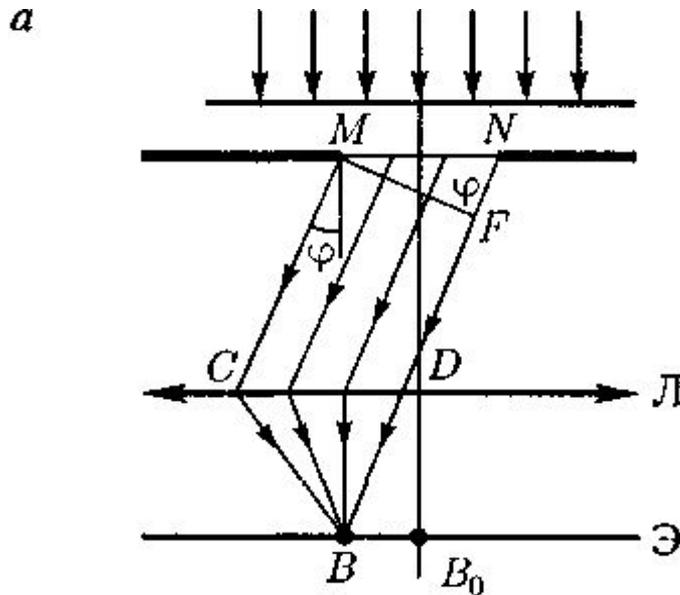


Следовательно, в точке B всегда наблюдается интерференционный максимум (светлое пятно), соответствующий половине действия первой открытой зоны Френеля. Центральный максимум окружен концентрическими с ним темными и светлыми кольцами, а интенсивность в максимумах убывает с расстоянием от центра картины. С увеличением диаметра диска первая открытая зона Френеля удаляется от точки B и увеличивается угол φ между нормалью к поверхности этой зоны и направлением на точку B . В результате интенсивность центрального максимума с увеличением размеров диска уменьшается.

Дифракция Фраунгофера на одной щели

Пусть плоская монохроматическая световая волна падает нормально плоскости узкой щели шириной a . **Оптическая разность хода** между крайними лучами MC и ND , идущими от щели в произвольном направлении φ .

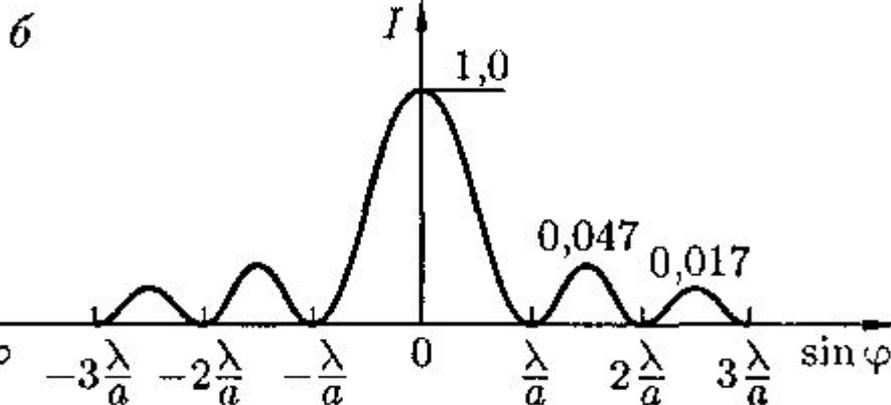
$$\Delta = NF = a \sin \varphi$$



Открытую часть волновой поверхности в плоскости щели MN разбивают на зоны Френеля, имеющие вид полос, параллельных ребру M щели. *Ширина каждой зоны выбирается так, чтобы разность хода от краев этих зон была равна $\lambda/2$, т. е. всего на ширине щели уместится $\lambda/2$ зон.* Так как свет на щель падает нормально, то плоскость щели совпадает с волновым фронтом; следовательно, все точки волнового фронта в плоскости щели будут колебаться в одинаковой фазе. Следовательно, если число зон Френеля четное, то $a \sin \varphi = \pm 2m \lambda/2$ ($m = 1, 2, 3, \dots$), и в точке B наблюдается **интерференционный минимум (полная темнота)**, если же число зон Френеля нечетное, то наблюдается **интерференционный максимум**

$$a \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2}$$

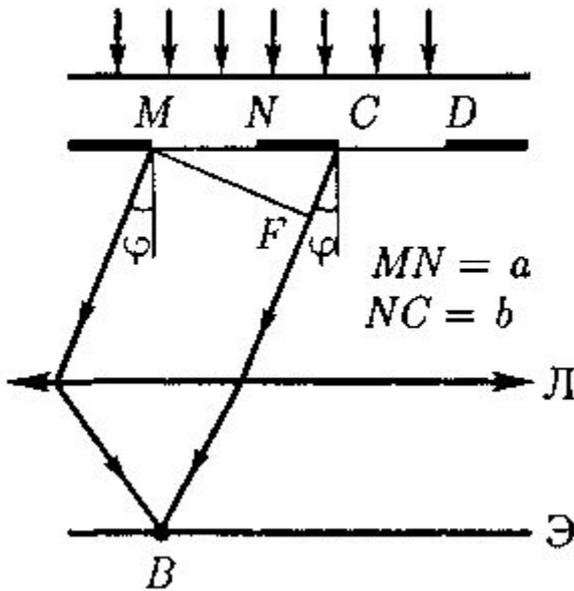
Распределение интенсивности от длины волны, представляется как **дифракционный спектр**



С увеличением ширины щели ($a > \lambda$) дифракционные полосы становятся уже и ярче, а число полос больше. При $a \gg \lambda$ в центре получается резкое изображение источника света (прямолинейное распространение света).

Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке

Одномерная дифракционная решетка — система параллельных щелей равной ширины, лежащих в одной плоскости и разделенных равными по ширине непрозрачными промежутками. В дифракционной решетке осуществляется многолучевая интерференция когерентных дифрагированных пучков света, идущих от всех щелей. **постоянная (период) дифракционной решетки $d = a + b$.**



Разность хода лучей, идущих от двух соседних щелей, будет для данного направления φ одинаковы в пределах всей дифракционной решетки:

$$\Delta = CF = (a + b)\sin\varphi = d\sin\varphi$$

минимумы интенсивности будут наблюдаться в направлениях, определяемых условием

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda$$

вследствие взаимной интерференции световых лучей, посылаемых двумя щелями, в некоторых направлениях они будут гасить друг друга, т.е. возникнут дополнительные минимумы. Таким образом, с учетом условие дополнительных минимумов получим:

$$d\sin\varphi = \pm(2m + 1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Действие одной щели будет усиливать действие другой, если **Условие главных максимумов.**

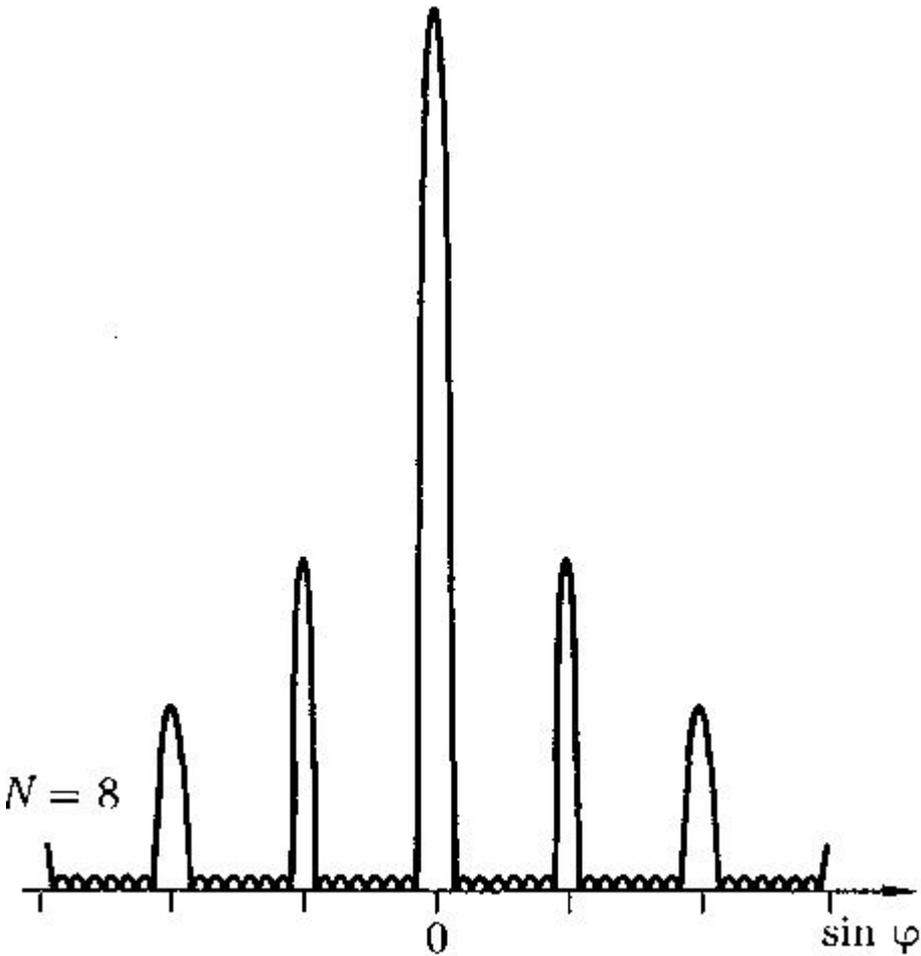
$$d\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda$$

В случае N щелей между двумя главными максимумами располагается $N - 1$ дополнительных минимумов, разделенных вторичными максимумами, создающими весьма слабый фон. Чем больше щелей N , тем большее количество световой энергии пройдет через решетку, тем больше минимумов образуется между соседними главными максимумами, а следовательно, более интенсивными и более острыми будут максимумы.

Число главных максимумов определяется отношением периода решетки к длине волны .

$$m \leq \frac{d}{\lambda},$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ



1. Условие дополнительных минимумов:

$$d \sin \varphi = \pm (2m + 1) \frac{\lambda}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

2. Условие главных максимумов

$$d \sin \varphi = \pm 2m \frac{\lambda}{2} = \pm m\lambda$$

3. Главные минимумы

$$a \sin \varphi = \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$$

4. Дополнительные минимумы

$$d \sin \varphi = \frac{\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}, \frac{5\lambda}{2}, \dots$$

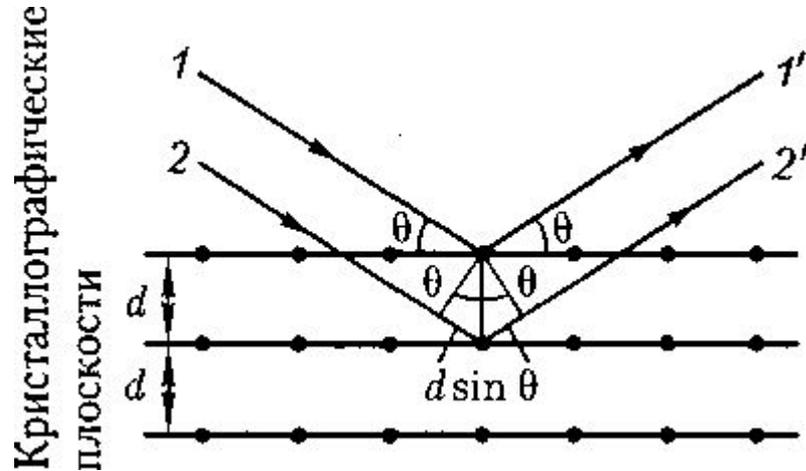
5. Главные максимумы

$$d \sin \varphi = 0, \lambda, 2\lambda, 3\lambda, \dots$$

Дифракционная решетка может быть использована как спектральный прибор, предназначенный для разложения света в спектр и измерения длин волн.

Дифракция на пространственной решетке. Формула Вульфа—Брэггов

Кристаллы, являясь трехмерными решетками, имеют постоянную порядка $d = 10^{-10}$ м и, следовательно, непригодны для наблюдения дифракции в видимом свете ($\lambda = 10^{-7}$ м)/



Г. В. Вульф, Г. и Л. Брэггами предположили, что дифракция рентгеновского излучения является результатом его отражения от системы параллельных **кристаллографических плоскостей** (плоскостей, в которых лежат узлы (атомы) кристаллической решетки). Представим кристалл в виде совокупности параллельных кристаллографических плоскостей, отстоящих друг от друга на расстоянии **d**. Пучок параллельных монохроматических рентгеновских лучей (1, 2) падает под **углом скольжения theta** (угол между направлением падающих лучей и кристаллографической плоскостью) и возбуждает атомы кристаллической решетки, которые становятся источниками когерентных вторичных волн 1' и 2', интерферирующих между собой, подобно вторичным волнам, от щелей дифракционной решетки.

Максимумы интенсивности (дифракционные максимумы) наблюдаются в тех направлениях, в которых все отраженные атомными плоскостями волны будут находиться в одинаковой фазе. Эти направления удовлетворяют **формуле Вульфа — Брэггов** $2d \sin \theta = m\lambda$

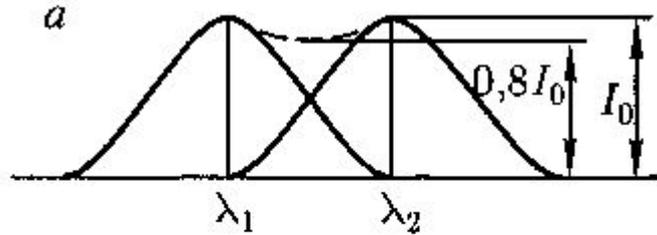
При разности хода между двумя лучами, отраженными от соседних кристаллографических плоскостей, кратной целому числу длин волн λ , наблюдается дифракционный максимум. При произвольном направлении падения монохроматического рентгеновского излучения на кристалл дифракция не возникает

Формула Вульфа — Брэггов используется при решении следующих задач:

1. Наблюдая дифракцию рентгеновского излучения известной длины волны на кристаллической структуре неизвестного строения и измеряя θ и m , можно найти межплоскостное расстояние (**d**), т.е. определить структуру вещества. **Метод рентгеноструктурного анализа.**
2. При известном **d** измеряя θ и m , можно найти длину волны падающего рентгеновского излучения.

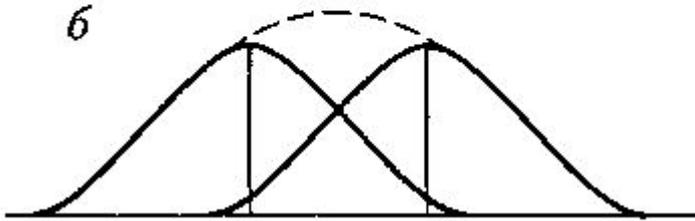
Разрешающая способность оптических приборов

Согласно **критерию Рэля**, изображения двух близлежащих одинаковых точечных источников или двух близлежащих спектральных линий с равными интенсивностями и одинаковыми симметричными контурами разрешимы, если центральный максимум дифракционной картины от одного источника совпадает с первым минимумом дифракционной картины от другого.



Разрешающая способность объектива

$$R = \frac{1}{\delta\psi} = \frac{D}{1,22\lambda}$$



Разрешающей способностью спектрального прибора

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

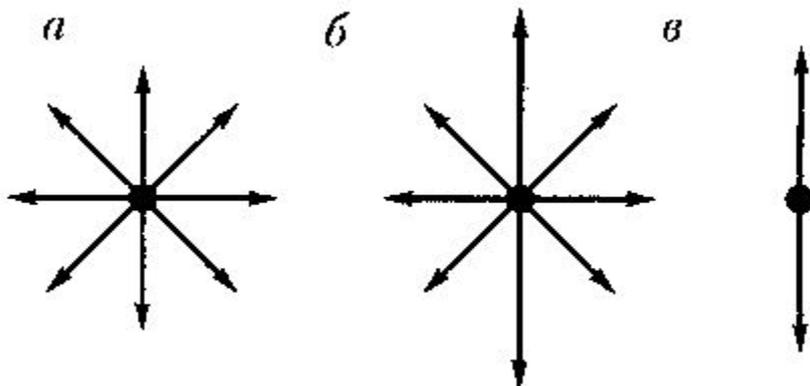
Разрешающая способность дифракционной решетки.

$$R_{\text{диф.р.}} = mN$$

где N — число щелей решетки,
 m — порядок спектра

ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Согласно теории Максвелла электромагнитная волна является поперечная, состоящей из векторов напряженностей электрического \mathbf{E} и магнитного \mathbf{H} полей, которые в свою очередь поперечны вектору скорости \mathbf{V} распространения волны. Свет представляет собой суммарное электромагнитное излучение множества атомов. Атомы же излучают световые волны независимо друг от друга, поэтому световая волна, излучаемая телом в целом, характеризуется всевозможными равновероятным и колебаниями светового вектора

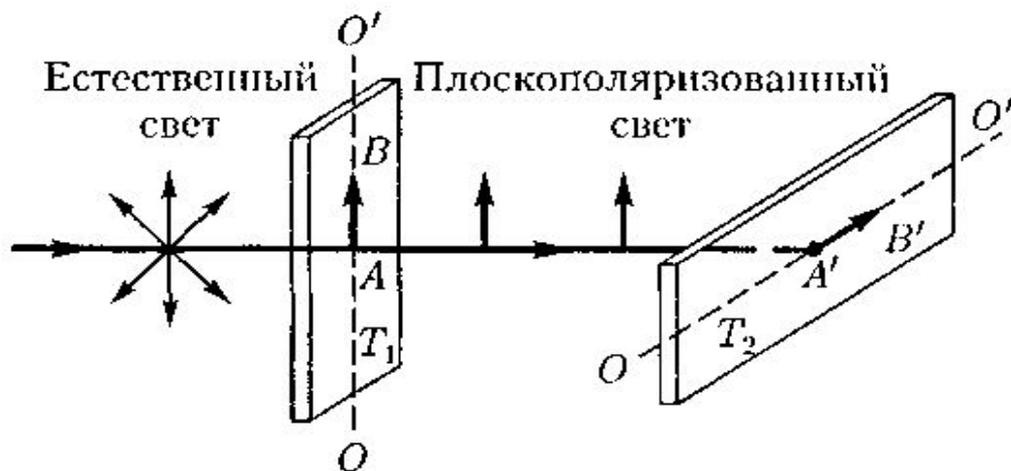


Свет со всевозможными равновероятными ориентациями вектора \mathbf{E} называется естественным. Свет, в котором направления колебаний светового вектора каким-то образом упорядочены, называется поляризованным.

Степень поляризации называется величина

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$

Для естественного света $I_{\max} = I_{\min}$ и $P = 0$, для плоскополяризованного света $I_{\min} = 0$ и $P = 1$.



Естественный свет можно преобразовать в плоскополяризованный, используя **поляризаторы, пропускающие колебания только** определенного направления (например, пропускающие колебания, параллельные главной плоскости поляризатора, и полностью задерживающие колебания, перпендикулярные этой плоскости).

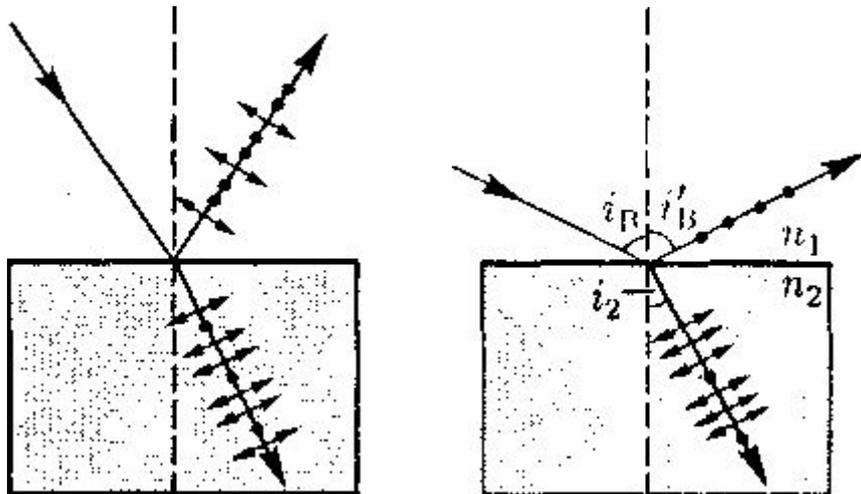
ПРОДОЛЖЕНИЕ

Вращая кристалл **T1 (поляризатор)** вокруг направления луча, никаких изменений интенсивности прошедшего через турмалин света не наблюдаем. Если на пути луча поставить вторую пластинку турмалина **T2 (анализатор)** и вращать ее вокруг направления луча, то интенсивность света, прошедшего через пластинки, меняется в зависимости от угла α между оптическими осями кристаллов *по закону Малюса*.

$I = I_0 \cos^2 \alpha$, что соответствует $E = E_0 \cos \alpha$ т. к. интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды

Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков

При падении света на границу раздела двух сред в отраженном и преломленном свете наблюдаются частичная поляризация света, причем в отраженном луче преобладают колебания, перпендикулярные плоскости, в преломленном — колебания, параллельные плоскости падения.



Степень поляризации зависит от угла падения лучей и показателя преломления. Согласно закону Д. **Брюстера** тангенс угла падения равен отношению показателю преломления второй среды к первой

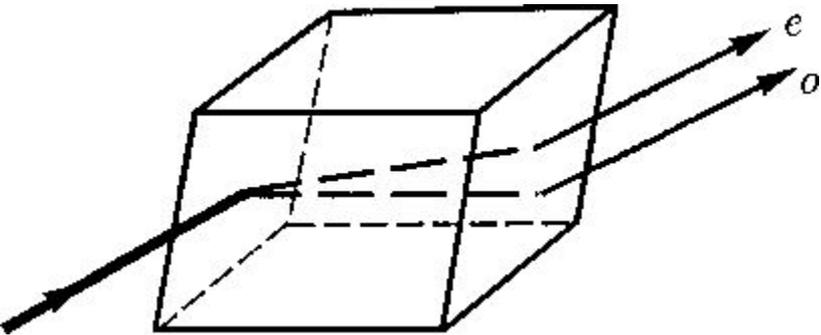
$$\operatorname{tgi}_B = n_{21}$$

Отраженный луч является плоскополяризованным. Преломленный же луч при угле падения i_B поляризуется максимально, но не полностью.

Если свет падает на границу раздела под углом Брюстера, то отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны. $i_B + i_2 = \pi/2$

Двойное лучепреломление

Все прозрачные кристаллы обладают способностью *двойного лучепреломления*, т. е. *раздваивания* каждого падающего на них светового пучка. Это объясняется особенностями распространения света в анизотропных средах и непосредственно вытекает из уравнений Максвелла. Если на толстый кристалл исландского шпата направить узкий пучок света, то из кристалла выйдут два пространственно разделенных луча, параллельных друг другу и падающему лучу



Если на первичный пучок падает на кристалл нормально, то преломленный пучок разделяется на два, причем один из них является продолжением первичного, а второй отклоняется. Второй из этих лучей **необыкновенный (e)**, а **первый — обыкновенный (o)**.

Направление в оптически анизотропном кристалле, по которому луч света распространяется, не испытывая двойного лучепреломления, называется **оптической осью кристалла**. Любая прямая, проходящая параллельно данному направлению, является оптической осью кристалла.

Обыкновенные и необыкновенные лучи полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

Плоскость, проходящая через направление луча света и оптическую ось кристалла, называется **главной плоскостью**. **Кристаллы** в зависимости от типа их симметрии бывают **одноосные** и **двухосные**, т. е. имеют одну или две оптические оси .

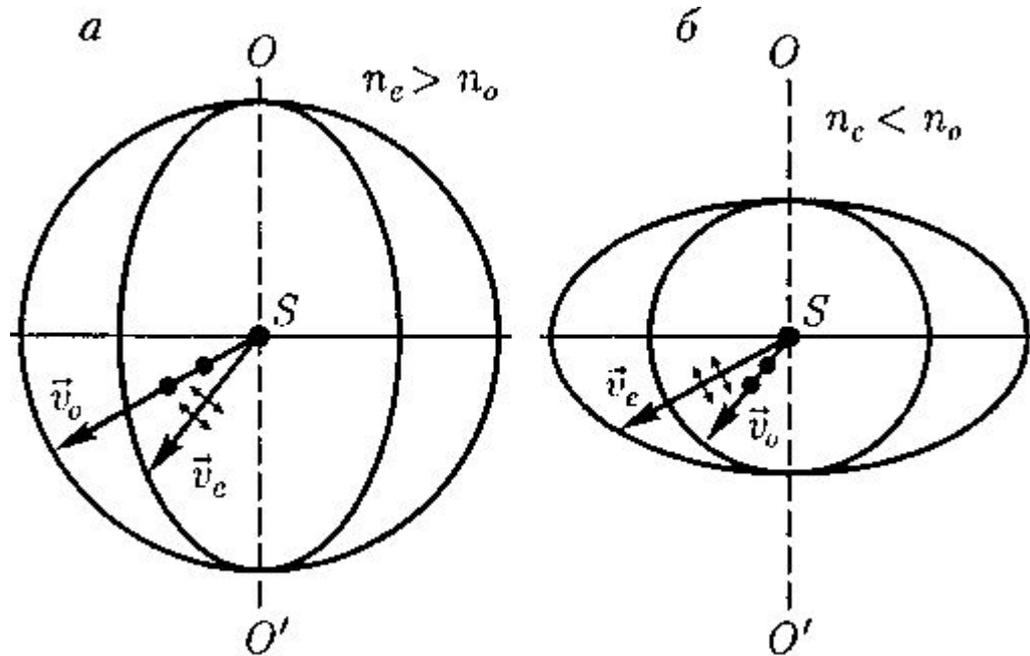
Колебания светового вектора в обыкновенном луче происходят перпендикулярно главной плоскости, в необыкновенном — в главной плоскости.

Неодинаковое преломление обыкновенного и необыкновенного лучей указывает на различие для них показателей преломления. Любое направление обыкновенного луча колебания светового вектора перпендикулярны оптической оси кристалла, поэтому обыкновенный луч распространяется по всем направлениям с одинаковой скоростью и, следовательно, показатель преломления n_o для него постоянная величина. Для необыкновенного луча угол между направлением колебаний светового вектора и оптической осью отличен от прямого и зависит от направления луча, поэтому необыкновенные лучи распространяются по различным направлениям с разными скоростями.

Следовательно, показатель преломления n_e **необыкновенного луча** является переменной величиной, зависящей от направления луча. Обыкновенные и необыкновенные лучи полностью поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях.

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Рассмотрим одноосный кристалл внутри которого помещен источник света. Волновой поверхностью обыкновенного луча (он распространяется с $V_0 = \text{const}$) является сфера, необыкновенного луча ($V_e \neq \text{const}$) — эллипсоид вращения.



Наибольшее расхождение волновых поверхностей обыкновенного и необыкновенного лучей наблюдается в направлении, перпендикулярном оптической оси. Эллипсоид и сфера касаются друг друга в точках их пересечения с оптической осью OO' . Если $v_e < v_0$ ($n_e > n_o$), то эллипсоид необыкновенного луча вписан в сферу обыкновенного луча (эллипсоид скоростей вытянут относительно оптической оси) и **одноосный кристалл** называется **положительным**. Если $v_e > v_0$ ($n_e < n_o$), то эллипсоид описан вокруг сферы (эллипсоид скоростей растянут в направлении, перпендикулярном оптической оси) и **одноосный кристалл** называется **отрицательным**.

Анализ поляризованного света

Рассмотрим кристаллическую пластинку, вырезанную, из одноосного отрицательного кристалла параллельно его оптической оси, на которую нормально падает плоскополяризованный свет. Внутри пластинки он разбивается на обыкновенный (o) и необыкновенный (e) лучи, которые в кристалле пространственно не разделены (но движутся с разными скоростями), а на выходе из кристалла складываются. Так как в обыкновенном и необыкновенном лучах колебания светового вектора совершаются во взаимно перпендикулярных направлениях, то на выходе из пластинки в результате сложения этих колебаний возникают световые волны, вектор E в которых меняется со временем так, что его конец описывает эллипс, ориентированный произвольно относительно координатных осей.

Уравнение этого эллипса

$$\frac{x^2}{E_o^2} - \frac{2xy}{E_o E_e} \cos \varphi + \frac{y^2}{E_e^2} = \sin^2 \varphi$$

В результате прохождения через кристаллическую пластинку *плоскополяризованный свет превращается в эллиптически поляризованный*.

Между обыкновенным и необыкновенным лучами в пластинке возникает оптическая разность хода

$$\Delta = (n_o - n_e)d, \quad \text{Или разность фаз} \quad \varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_o - n_e)d,$$

Если разность хода $\Delta = \lambda/4$, т.е. $\varphi = \pm\pi/2$ то получаем уравнение

$$\frac{x^2}{E_o^2} + \frac{y^2}{E_e^2} = 1,$$

Если получаем $E_o = E_e$ получаем

$$x^2 + y^2 = E_o^2,$$

На выходе из пластинки свет циркулярно поляризован

Вырезанная параллельно оптической оси пластинка, для которой оптическая разность хода является *пластинкой в четверть волны* *полуволны*

$$\Delta = (n_o - n_e)d = \pm \left(m + \frac{1}{4} \right) \lambda_0$$

$$(n_o - n_e)d = \pm \left(m + \frac{1}{2} \right) \lambda_0$$

Вращение плоскости поляризации

Оптически активные вещества, обладают способностью вращать плоскость поляризации.

Если между скрещенными поляризатором P и анализатором A , дающими темное поле зрения, поместить оптически активное вещество, то поле зрения анализатора просветляется. При повороте анализатора на некоторый угол ϕ можно вновь получить темное поле зрения. Угол ϕ есть угол, на который оптически активное вещество поворачивает плоскость поляризации света, прошедшего через поляризатор.

Угол поворота плоскости поляризации для оптически активных кристаллов и чистых жидкостей $\varphi = \alpha d$,

для оптически активных растворов $\varphi = [\alpha] Cd$,



α - удельное вращение, численно равное углу поворота

плоскости поляризации света слоем оптически активного вещества единичной толщины (единичной концентрации — для растворов); C — массовая концентрация оптически активного вещества в растворе, кг/м³

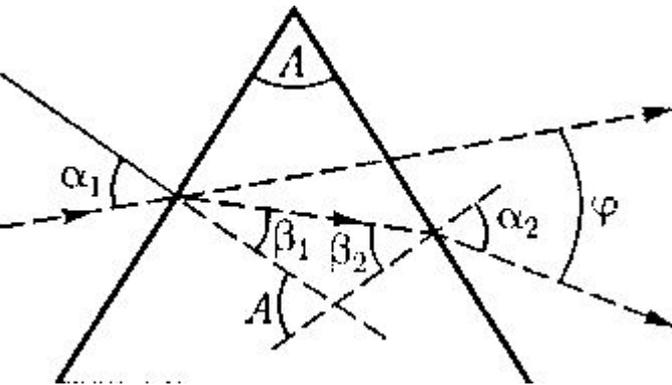
Оптически активные вещества в зависимости от направления вращения плоскости поляризации разделяются на **право- и лево-вращающие**. Согласно теории Френеля, скорость распространения света в оптически активных веществах различна для лучей, поляризованных по кругу вправо и влево

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН С ВЕЩЕСТВОМ

Дисперсия света

Дисперсия света — зависимость фазовой скорости v света в среде от его частоты. Так как $v = c/n$, n — показатель преломления среды зависит от частоты (длины волны): $n = f(\lambda)$.

Следствием дисперсии является разложение в спектр пучка белого света при прохождении его через призму. Рассмотрим дисперсию света в призме. Пусть монохроматический пучок света падает на призму с преломляющим углом A и показателем преломления n под углом α_1 . После двукратного преломления (на левой и правой гранях призмы) луч оказывается отклоненным от первоначального направления на угол φ . Тогда



$$\varphi = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2) = \alpha_1 + \alpha_2 - A$$

Для малых углов $\alpha_1 + \alpha_2 = nA$. тогда получим

$$\varphi = A(n - 1)$$

Угол отклонения лучей призмой тем больше, чем больше преломляющий угол призмы. Угол отклонения лучей призмой зависит от величины $(n - 1)$, а n — функция длины волны, поэтому лучи разных длин волн после прохождения призмы окажутся отклоненными на разные углы, т. е. пучок белого света за призмой разлагается в спектр.

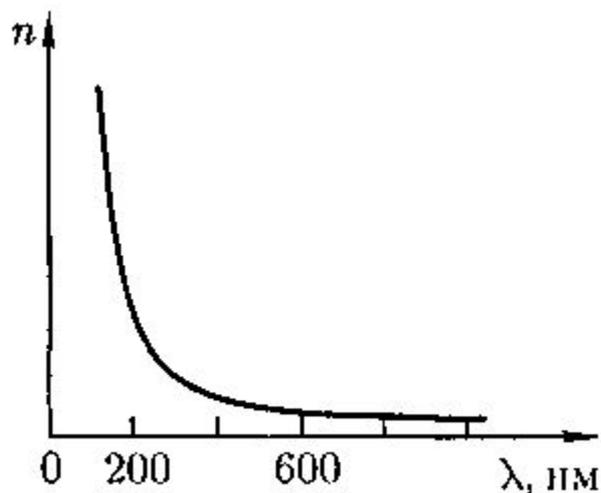
Различия в дифракционном и призматическом спектрах.

1. Дифракционная решетка разлагает падающий свет непосредственно по длинам волн, поэтому по измеренным углам (по направлениям соответствующих максимумов) можно вычислить длину волны. Разложение света в спектр в призме происходит по значениям показателя преломления, поэтому для определения длины волны света надо знать зависимость.

$$n = f(\lambda).$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

2. Составные цвета в дифракционном и призматическом спектрах располагаются различно. В дифракционной решетке синус угла отклонения пропорционален длине волны. Следовательно, красные лучи, имеющие большую длину волны, чем фиолетовые, отклоняются дифракционной решеткой сильнее. Призма же разлагает лучи в спектр по значениям показателя преломления, который для всех прозрачных веществ с увеличением длины волны уменьшается. Поэтому красные лучи отклоняются призмой слабее, чем фиолетовые.



Величина $D = \frac{dn}{d\lambda}$ называемая **дисперсией вещества**,

показывает, как быстро изменяется показатель преломления с длиной волны. Показатель преломления для прозрачных веществ с уменьшением длины волны увеличивается; следовательно, величина $dn/d\lambda$ по модулю также увеличивается с уменьшением λ . Такая дисперсия называется **нормальной**. Кривая дисперсии — **вблизи линий и полос поглощения** убывает с уменьшением λ . Такой ход зависимости n от λ называется **аномальной дисперсией**.

Электронная теория дисперсии света

Абсолютный показатель преломления среды $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, в оптической области $\mu \approx 1$ поэтому $n = \sqrt{\epsilon}$.

Согласно теории Лоренца дисперсия света рассматривается как результат взаимодействия электромагнитных волн с заряженными частицами, входящими в состав вещества и совершающими вынужденные колебания в переменном электромагнитном поле волны. Для однородного диэлектрика дисперсия света представляется как зависимость ϵ от частоты ω световых волн. Диэлектрическая проницаемость вещества, по определению равна

$$\epsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E},$$

где χ — диэлектрическая восприимчивость среды; ϵ_0 — электрическая постоянная; P — мгновенное значение поляризованности. Тогда n зависит от P

$$n^2 = 1 + \frac{P}{\epsilon_0 E},$$

В данном случае основное значение имеет электронная поляризация, т.е. вынужденные колебания электронов под действием электрической составляющей поля волны, так как для ориентационной поляризации молекул частота колебаний в световой волне очень высока ($\nu \approx 10^{15}$ Гц). Учитывая, что $P = p n_0 = n_0 e x$, получим

$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e x}{\epsilon_0 E}.$$

Т.к. смещение электрона происходит под действием внешнего поля $E = E_0 \cos \omega t$, тогда уравнение вынужденных колебаний электрона для простейшего запишется в виде

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t = \frac{e E_0}{m} \cos \omega t,$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Решение уравнения позволяет определить зависимость n от ω

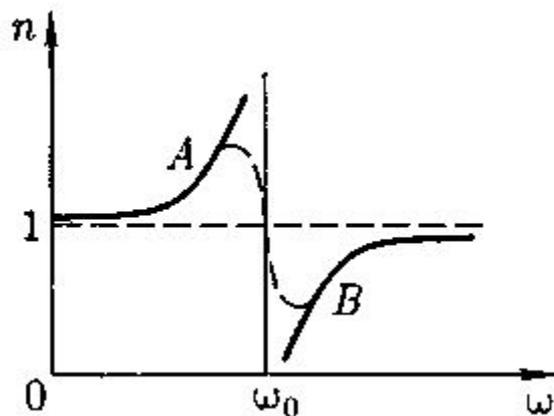
$$n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\epsilon_0 m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Если в веществе имеются различные заряды e_i , совершающие вынужденные колебания с различными собственными частотами ω_{0i} , то

$$n^2 = 1 + \frac{n_0}{\epsilon_0} \sum_i \frac{e_i^2 / m_i}{\omega_{0i}^2 - \omega^2},$$

Из выражений следует также, что в области от $\omega = 0$ до $\omega = \omega_0$ $n^2 > 1$ и возрастает с увеличением ω (нормальная дисперсия); при $\omega = \omega_0$ $n^2 = \pm \infty$; в области от $\omega = \omega_0$ до $\omega = \infty$ $n^2 < 1$ и возрастает от $-\infty$ до 1 (нормальная дисперсия).

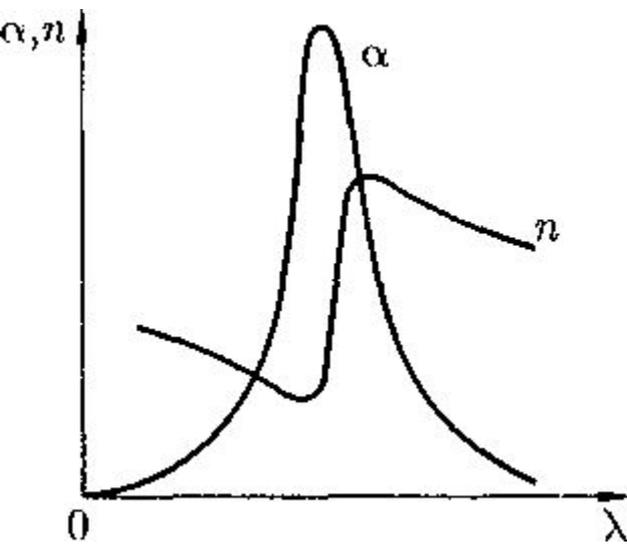
Такое поведение n вблизи ω_0 — результат допущения об отсутствии сил сопротивления при колебаниях электронов. Если принять в расчет и это обстоятельство, то график функции $n(\omega)$ вблизи ω_0 задается штриховой линией АВ. Область АВ — область аномальной дисперсии (n убывает при возрастании ω), остальные участки зависимости n от ω описывают нормальную дисперсию (n возрастает с увеличением ω).



Поглощение (абсорбция) света

Поглощением (абсорбцией) света называется явление уменьшения энергии световой волны при ее распространении в веществе вследствие преобразования энергии волны в другие виды энергии. В результате поглощения интенсивность света при прохождении через вещество уменьшается. Поглощение света в веществе описывается **законом Бугера**:

$$I = I_0 e^{-\alpha x},$$



α — **коэффициент поглощения**, зависит от длины волны света, химической природы и состояния вещества и не зависящий от интенсивности света.

α зависит от длины волны λ и для одноатомных газов и паров металлов (т. е. вещества, в которых атомы расположены на значительных расстояниях друг от друга и их можно считать изолированными) имеют близкий к нулю коэффициент поглощения и лишь для очень узких спектральных областей наблюдаются резкие максимумы (**линейчатый спектр поглощения**). Эти линии соответствуют частотам собственных колебаний электронов в атомах. Спектр поглощения молекул, определяемый колебаниями атомов в молекулах, характеризуется **полосами поглощения**. Коэффициент поглощения для диэлектриков невелик ($10^{-3} - 10^{-5} \text{ см}^{-1}$), однако у них наблюдается селективное поглощение света в определенных интервалах длин волн, когда α резко возрастает, и наблюдаются сравнительно широкие полосы поглощения, т.е. диэлектрики имеют **сплошной спектр поглощения**.

Это связано с тем, что в диэлектриках нет свободных электронов и поглощение света обусловлено явлением резонанса при вынужденных колебаниях электронов в атомах и атомов в молекулах диэлектрика.

Коэффициент поглощения для металлов ($10^3 - 10^5 \text{ см}^{-1}$), поэтому металлы являются непрозрачными для света. Из-за наличия свободных электронов, движущихся под действием электрического поля, возникают быстропеременные токи, сопровождающиеся выделением джоулевой теплоты. Поэтому энергия световой волны быстро уменьшается, превращаясь во внутреннюю энергию металла. Чем выше проводимость металла, тем сильнее в нем поглощение света.

Внутри полосы поглощения наблюдается аномальная дисперсия (n убывает с уменьшением λ).

ВОПРОСЫ КОЛЛОКВИУМА

(весенний семестр 2019г.)

1. Интерференция света
2. Способы наблюдения интерференции света
3. Расчет интерференционной картины от двух источников.
4. Интерференция света в тонких пленках
5. Интерференция от плоскопараллельной пластины
6. Интерференция от пластинки переменной толщины.
7. Кольца Ньютона
8. Применение интерференции света
9. Дифракция света. принцип Гюйгенса—Френеля.
10. Метод зон Френеля. Прямолинейное распространение света.
11. Дифракция Френеля на круглом отверстии и диске
12. Дифракция Фраунгофера на дифракционной решетке.
13. Дифракция Фраунгофера на одной щели.
14. Дифракция на пространственной решетке. Формула Вульфа—Брэггов
15. Разрешающая способность оптических приборов
16. Поляризация света. Закон Малюса.
17. Поляризация света при отражении и преломлении на границе двух диэлектриков.
18. Двойное лучепреломление.
19. Анализ поляризованного света
20. Вращение плоскости поляризации
21. Дисперсия света.
22. Электронная теория дисперсии света
23. Поглощение (абсорбция) света.

КВАНТОВАЯ ПРИРОДА ИЗЛУЧЕНИЯ

Тепловое излучение и его характеристики

Свечение тел, обусловленное нагреванием, называется тепловым (температурным) излучением, совершается за счет энергии теплового движения атомов и молекул вещества (т. е. за счет его внутренней энергии) и свойственно всем телам при температуре выше 0 К.

Тепловое излучение характеризуется сплошным спектром, положение максимума которого зависит от температуры.

Количественной характеристикой теплового излучения служит спектральная **плотность энергетической светимости (излучательности)** тела — мощность излучения с единицы площади поверхности тела в интервале частот единичной ширины:

$$R_{\nu, T} = \frac{dW_{\nu, \nu+d\nu}^{\text{изл}}}{d\nu},$$

Единица спектральной плотности энергетической светимости ($R_{\nu, T}$) ~ джоуль на метр в квадрате (Дж/м²).

Можно получить зависимость $R_{\nu, T}$ от длины волны в виде

$$dW_{\nu, \nu+d\nu}^{\text{изл}} = R_{\nu, T} d\nu = R_{\lambda, T} d\lambda \quad \text{т.к. } c = \lambda \nu$$

Получим $\frac{d\lambda}{d\nu} = -\frac{c}{\nu^2} = -\frac{\lambda^2}{c}$, тогда

$$R_{\nu, T} = \frac{\lambda^2}{c} R_{\lambda, T}.$$

Зная спектральную плотность энергетической светимости, можно вычислить интегральную энергетическую светимость (интегральную излучательность), как

$$R_T = \int_0^{\infty} R_{\nu, T} d\nu.$$

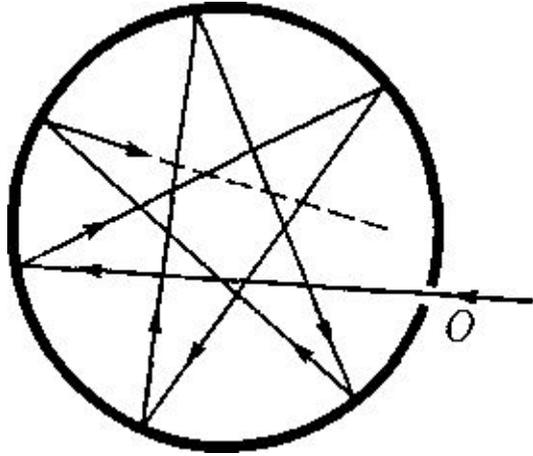
Способность тел поглощать падающее на них излучение характеризуется спектральной поглощательной способностью

$$A_{\nu, T} = \frac{dW_{\nu, \nu+d\nu}^{\text{полг}}}{dW_{\nu, \nu+d\nu}},$$

показывает, какая доля энергии, приносимой за единицу времени на единицу площади поверхности тела падающими на нее электромагнитными волнами с частотами от ν до $\nu + d\nu$, поглощается телом.

ПРОДОЛЖЕНИ

Тело, способное поглощать полностью при **любой** температуре все падающее на него излучение любой частоты, называется **черным**. Совершенной *моделью* черного тела может служить замкнутая полость с отверстием, с размером отверстия, меньшего 0,1 диаметра полости.



серое тело — тело, поглощательная способность которого меньше единицы, но одинакова для всех частот и зависит только от температуры, материала и состояния поверхности тела. Таким образом, для серого тела

$$A_{\nu, T}^c = A_T = \text{const} \leq 1$$

Закон

Кирхгофа

Кирхгоф установил количественную связь между спектральной плотностью энергетической светимости и спектральной поглощательной способностью тел. Отношение спектральной плотности энергетической светимости к спектральной поглощательной способности не зависит от природы тела; оно является для всех тел универсальной функцией частоты (длины волны) и температуры (**закон Кирхгофа**):

$$\frac{R_{\nu, T}}{A_{\nu, T}} = r_{\nu, T}$$

Для абсолютно черного тела $A_{\nu, T}^u = 1$ поэтому $R_{\nu, T} = r_{\nu, T}$ спектральная плотность энергетической светимости черного тела.

Используя закон Кирхгофа, выражение для энергетической светимости тела можно записать в виде

$$R_T = \int_0^{\infty} A_{\nu, T} r_{\nu, T} d\nu$$

Энерг. светимость **ч.т.** зависит только от температуры.

Законы Стефана—Больцмана и смещения Вина

Согласно *закону Стефана — Больцмана* $R_e = \sigma T^4$ энергетическая светимость черного тела

пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры; σ — *постоянная Стефана—Больцмана*, ее экспериментальное значение равно $5,67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² К⁻¹). Закон Стефана—Больцмана, определяя зависимость R_e от температуры, не дает ответа относительно спектрального состава излучения черного тела.

Из экспериментальных кривых зависимости функции $r_{\lambda,T}$ от длины волны λ ($r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda} r_{\nu,T}$) при

различных температурах следует, что распределение энергии в спектре черного тела является неравномерным. Все кривые имеют явно выраженный максимум, который по мере повышения температуры смещается в сторону более коротких длин волн.

Площадь, ограниченная кривой зависимости $r_{\lambda,T}$ от λ и осью абсцисс,

пропорциональна энергетической светимости R_e черного тела и, следовательно, четвертой степени температуры.

Немецкий физик В.Вин, опираясь на законы термо- и электродинамики, установил зависимость длины волны λ_{\max} , соответствующей максимуму

функции $r_{\lambda,T}$ от температуры T . Согласно *закону смещения Вина*,

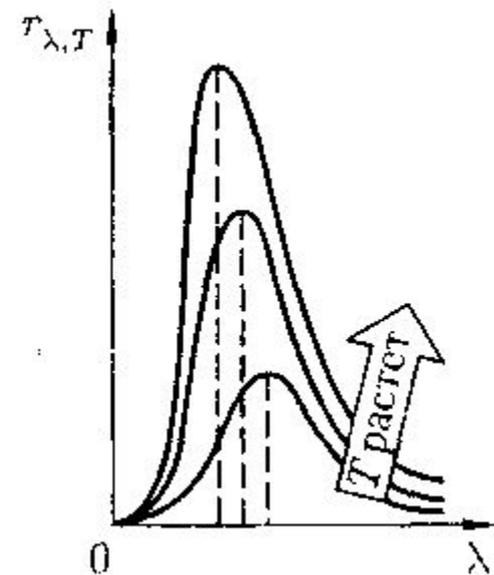
$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

Длина волны λ_{\max} , соответствующая *максимальному значению*

спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda,T}$ черного тела,

обратно пропорциональна его термодинамической температуре;

b —*постоянная Вина* равно $2,9 \cdot 10^{-3}$ м.К



Формулы Рэля—Джинса и Планка

Формула Рэля — Джинса для спектральной плотности энергетической светимости черного тела имеет вид

$$r_{\nu, T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \langle E \rangle = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$$

где $\langle E \rangle = kT$ — средняя энергия осциллятора с собственной частотой ν . Это согласуется с экспериментальными данными только в области достаточно малых частот и больших температур. В области больших частот формула резко расходится с экспериментом, а также с законом смещения Вина. Вычисленная R_e энергетическая светимость черного тела согласно 3-му Р.-Дж. получается равной бесконечности, тогда как согласно Ст.-Бол. $R_e \approx T^4$



$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu, T} d\nu = \frac{2\pi kT}{c^2} \int_0^{\infty} \nu^2 d\nu = \infty,$$

Согласно выдвинутой Планком квантовой гипотезе, атомные осцилляторы излучают энергию не непрерывно, а определенными порциями — квантами, причем энергия кванта пропорциональна частоте колебания

$$\epsilon_0 = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad \text{где } h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \\ \text{— постоянная Планка.}$$

Так как излучение испускается порциями, то энергия осциллятора E может принимать лишь определенные дискретные значения, кратные целому числу элементарных порций энергии E_0 : $E = nh\nu$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

В данном случае среднюю энергию осциллятора нельзя принимать $\langle E \rangle = kT$. В приближении, что распределение

осцилляторов по возможным дискретным состояниям подчиняется распределению, средняя энергия осциллятора

$$\langle \epsilon \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1},$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Спектральная плотность энергетической светимости черного тела для универсальной функции Кирхгофа согласно Планку вычисляется по формуле, которая согласуется с экспериментальными данными по распределению энергии в спектрах излучения черного тела во всем интервале частот и температур.

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

В области малых частот, т.е. при $h\nu \ll kT$ (энергия кванта очень мала по сравнению с энергией теплового движения kT), формула Планка совпадает с формулой Рэля — Джинса

$$e^{\frac{h\nu}{kT}} \approx 1 + \frac{h\nu}{kT}, \quad e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}.$$

Тогда получаем, что

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{h\nu/(kT)} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT,$$

Из формулы Планка можно получить закон Стефана—Больцмана.

$$R_e = \int_0^{\infty} r_{\nu,T} d\nu = \int_0^{\infty} \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu = \sigma T^4,$$

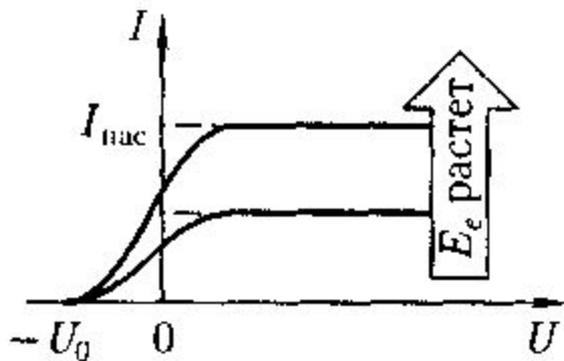
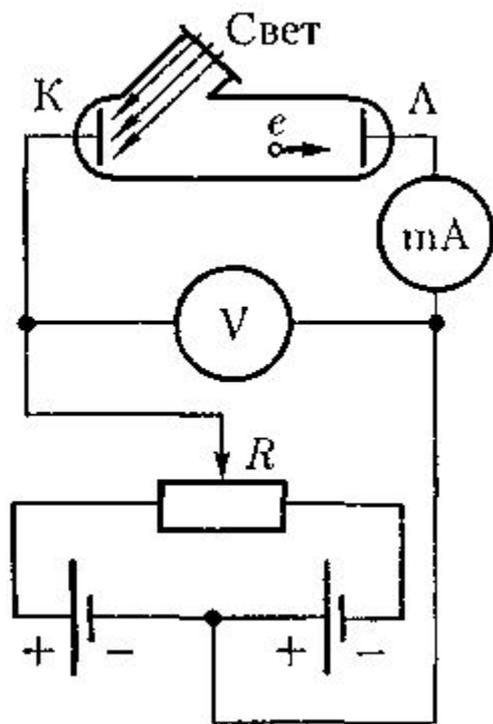
Также можно получить Закон смещения Вина

$$r_{\lambda,T} = \frac{c}{\lambda^2} r_{\nu,T} = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1}, \quad \text{откуда} \quad T\lambda_{\text{max}} = \frac{hc}{4,965k} = b,$$

Фотоэлектрический эффект. Законы внешнего фотоэффекта

Различают три вида фотоэффекта **внешний, внутренний и вентильный**.

Внешним фотоэлектрическим эффектом {фотоэффектом} называется испускание электронов веществом под действием электромагнитного излучения. Согласно экспериментальным измерениям А.Г. Столетов установил:



1. Наиболее эффективное действие оказывает ультрафиолетовое излучение;
2. Под действием света вещество теряет только отрицательные заряды;
3. Сила тока, возникающего под действием света, прямо пропорциональна его интенсивности.

Внутренний фотоэффект — это вызванные электромагнитным излучением переходы электронов внутри полупроводника или диэлектрика из связанных состояний в свободные без вылета наружу. В результате концентрация носителей тока внутри тела увеличивается, что приводит к возникновению **фотопроводимости** или к возникновению ЭДС.

Вентильный фотоэффект, являющийся разновидностью внутреннего фотоэффекта, — возникновение ЭДС (фото-ЭДС) при освещении контакта двух разных полупроводников или полупроводника и металла (при отсутствии внешнего электрического поля).

На экспериментальной установке, можно исследовать **вольт-амперную характеристику фотоэффекта** — зависимость фототока I , образуемого потоком электронов, испускаемых катодом под действием света, от напряжения U между электродами. Вольт-амперная характеристика, соответствующая двум различным освещенностям E_e катода (частота света в обоих случаях одинакова), приведена на графике.

Законы Столетова: 1. при фиксированной частоте падающего света число фотоэлектронов, вырываемых из катода в единицу времени, пропорционально интенсивности света.

2. Максимальная начальная скорость фотоэлектронов не зависит от интенсивности падающего света, а определяется только его частотой ν .

3. Для каждого вещества существует **красная граница фотоэффекта**, т.е. минимальная частота ν_0 ниже которой фотоэффект невозможен.

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.

Экспериментальное подтверждение квантовых свойств света

Явление фотоэффекта согласно квантовой теории объясняется как излучение и поглощение дискретными порциями энергий частиц, а именно фотонами $\varepsilon = h\nu$.

I закон фотоэффекта: каждый квант поглощается только одним электроном. Поэтому число вырванных фотоэлектронов пропорционально интенсивности света I.

Энергия падающего фотона расходуется на совершение электроном работы выхода A из металла и на сообщение

вылетевшему фотоэлектрону кинетической энергии $E = \frac{mv^2}{2}$

По закону сохранения энергии, $h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}$. **уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта.**

II закон фотоэффекта : Максимальная кинетическая энергия фотоэлектрона линейно растет с увеличением частоты падающего излучения и не зависит от его интенсивности (числа (фотонов)), так как ни A, ни v от интенсивности света не зависят.

III закон фотоэффекта: с уменьшением частоты света кинетическая энергия фотоэлектронов уменьшается (для данного металла $A = \text{const}$), при некоторой достаточно малой частоте $\nu = \nu_0$ кинетическая энергия фотоэлектронов станет равной нулю и фотоэффект прекратится.

$$\nu_0 = \frac{A}{h}$$

красная граница фотоэффекта, тогда ур.-е Эйнштейна преобразуется как

$$h\nu = h\nu_0 + eU_0$$

Энергия и импульс фотона. Давление света

Согласно гипотезе световых квантов Эйнштейна, свет испускается, поглощается и распространяется дискретными порциями (квантами), названными *фотонами*. Энергия фотона $\varepsilon_0 = h\nu$. Фотон всегда движется со скоростью c — скоростью распространения света в вакууме. Согласно теории относительности, полная энергия свободной частицы

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

В случае фотона $v = c$ и знаменатель этого выражения обращается в нуль. Поскольку фотон имеет конечную энергию, то это возможно лишь при условии, что масса фотона равна нулю. Воспользовавшись связью импульса с энергией фотона получим

$$p = \frac{\varepsilon_0}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Эти выражения связывают корпускулярные характеристики фотона — импульс и энергию — с волновой характеристикой света — его частотой ν .

Если фотоны обладают импульсом, то свет, падающий на тело, должен оказывать на него давление, это означает, что каждый фотон при соударении с поверхностью передает ей свой импульс. Если в единицу времени на единицу площади поверхности тела падает N фотонов, то при коэффициенте отражения ρ света от поверхности тела отразится ρN фотонов, а поглотится $(1 - \rho)N$. Каждый поглощенный фотон передает поверхности импульс p . Тогда суммарный импульс равен

$$p = \frac{2h\nu}{c} \rho N + \frac{h\nu}{c} (1 - \rho)N = (1 + \rho) \frac{h\nu}{c} N.$$

Поэтому давление, производимое светом при нормальном падении на поверхность

$$p = \frac{E_e}{c} (1 + \rho) = w(1 + \rho).$$

Формула, выведенная на основе квантовых представлений, совпадает с выражением, получаемым из электромагнитной (волновой) теории Максвелла

Эффект Комптона и его элементарная теория

А. Комптон, исследуя рассеяние монохроматического рентгеновского излучения веществами с легкими атомами (парафин, бор), обнаружил, что в составе рассеянного излучения наряду с излучением первоначальной длины волны

наблюдается также более длинноволновое излучение. Опыты показали, что разность $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ не зависит от длины волны λ падающего излучения и природы рассеивающего вещества, а определяется только углом рассеяния ϑ

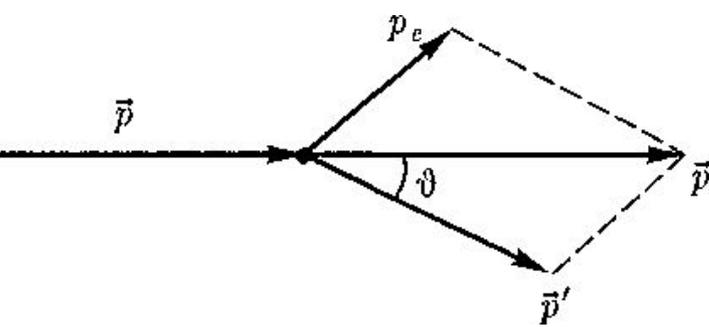
$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = 2\lambda_C \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

λ_C — комптоновская длина волны (при рассеянии фотона на электроне $\lambda_C = 2,426 \text{ нм}$).

Эффектом Комптона называется упругое рассеяние коротковолнового электромагнитного излучения (рентгеновского и γ -излучений) на свободных (или слабосвязанных) электронах вещества, сопровождающееся увеличением длины волны. Эффект Комптона — результат упругого столкновения рентгеновских фотонов со свободными электронами вещества (для легких атомов электроны слабо связаны с ядрами атомов, поэтому их можно считать свободными). В процессе этого столкновения фотон передает электрону часть своей энергии и импульса в соответствии с законами их сохранения. При упругом столкновении двух частиц — налетающего фотона, обладающего импульсом

$$P = \frac{hc}{\vartheta} = \frac{h}{\lambda}$$

и энергией $\varepsilon_0 = h\vartheta$ с покоящимся электроном.



Фотон, столкнувшись с электроном, передает ему часть своей энергии и импульса и изменяет направление движения (рассеивается). Уменьшение энергии фотона означает увеличение длины волны рассеянного излучения. При каждом столкновении выполняются законы сохранения энергии и импульса.

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos \vartheta) = \frac{2h}{mc} \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

Совместное решение этих ур-й дает

$$W_0 + \varepsilon = W + \varepsilon', \quad \vec{P} = \vec{P}_e + \vec{P}'$$

Где $\lambda_C = \frac{h}{mc} = 2,426 \text{ нм}$

ТЕОРИЯ АТОМА ВОДОРОДА ПО БОРУ

Модели атома Томсона и Резерфорда

Согласно модели Томсона, атом представляет собой непрерывно заряженный положительным зарядом шар радиусом порядка 10^{-10} м, внутри которого около своих положений равновесия колеблются электроны; суммарный отрицательный заряд электронов равен положительному заряду шара, поэтому атом в целом нейтрален.

Э. Резерфорд, основываясь на результаты исследования прохождения α -частиц в веществе (через золотую фольгу толщиной примерно 1 мкм), предложил **ядерную {планетарную} модель атома**. Согласно этой модели, вокруг положительного ядра, имеющего заряд Ze , размер $10^{-15} - 10^{-14}$ м и массу, практически равную массе атома, в области с линейными размерами порядка 10^{-10} м по замкнутым орбитам движутся электроны, образуя электронную оболочку атома. Так как атомы нейтральны, то заряд ядра равен суммарному заряду электронов, т.е. вокруг ядра должно вращаться Z электронов. Уравнение, описывающее движение электрона в атоме по окружности под действием кулоновской силы:

$$\frac{Zee}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r},$$

Из решения уравнения следует, что величины r , v (следовательно, и E) могут меняться непрерывно, т.е. может испускаться любая, а не вполне определенная порция энергии. Тогда спектры атомов должны быть сплошными. В действительности же опыт показывает, что атомы имеют линейчатый спектр. Согласно классической электродинамике, ускоренно движущиеся электроны должны излучать электромагнитные волны и вследствие этого непрерывно терять энергию. В результате электроны будут приближаться к ядру и в конце концов упадут на него. Ядерная же модель оказалась неустойчивой электродинамически и противоречила опытным данным.

Линейчатый спектр атома водорода

Каждому газу присущ определенный линейчатый спектр, состоящий из отдельных спектральных линий или групп близко расположенных линий. Самым изученным является спектр наиболее простого атома — атома водорода. И. Бальмер подобрал эмпирическую формулу, описывающую все известные в то время спектральные линии атома водорода в *видимой области спектра*:

$$\frac{1}{\lambda} = R' \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots),$$

где $R' = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$ постоянная Ридберга или

$$\nu = R \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 3, 4, 5, \dots),$$

где $R = c \cdot R' = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$

Спектральные линии, отличающиеся различными значениями n , образуют группу или серию линий, называемую серией **Бальмера**. С увеличением n линии серии сближаются; значение $n = \infty$ определяет границу серии, к которой со стороны больших частот примыкает сплошной спектр. В дальнейшем было обнаружено ещё несколько серий.

Серия Лаймана $\nu = R \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (n = 2, 3, 4, \dots).$ УФ область

Серия Пашена $\vartheta = R \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ ИК область

Серия Брекета $\vartheta = R \left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ Все приведенные выше серии в спектре атома водорода могут быть описаны одной формулой, называемой **обобщенной формулой Бальмера**:

Серия Пфунда $\vartheta = R \left(\frac{1}{5^2} - \frac{1}{n^2} \right)$ $\nu = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$ n принимает целочисленные значения, начиная с $m+1$

Серия Хемфри $\vartheta = R \left(\frac{1}{6^2} - \frac{1}{n^2} \right)$

Постулаты Бора

В основу теории Бора лежат два постулата:

Первый постулат Бора (постулат стационарных состояний): в атоме существуют стационарные (не изменяющиеся со временем) состояния, в которых он не излучает энергии; эти состояния характеризуются определенными дискретными значениями энергии. Стационарным состояниям атома соответствуют стационарные орбиты, по которым движутся электроны. Движение электронов по стационарным орбитам не сопровождается излучением электромагнитных волн. В стационарном состоянии атома электрон, двигаясь по круговой орбите, должен иметь дискретные квантованные значения момента импульса, удовлетворяющие условию:

$$m_e v r_n = n \hbar \quad (n = 1, 2, 3 \dots) \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

Второй постулат Бора (правило частот): при переходе электрона с одной стационарной орбиты на другую излучается (поглощается) один фотон с энергией

$$h\nu = E_n - E_m$$

При $E_n > E_m$ происходит излучение фотона (переход атома из состояния с большей энергией в состояние с меньшей энергией, т. е. переход электрона с более удаленной от ядра орбиты на более близлежащую), при $E_m > E_n$ — его поглощение (переход атома в состояние с большей энергией, т. е. переход электрона на более удаленную от ядра орбиту).

Набор возможных дискретных частот $\nu = \frac{E_n - E_m}{h}$ квантовых переходов определяет линейчатый спектр атома.

Спектр атома водорода по Бору

Постулаты, выдвинутые Бором, позволили рассчитать спектр атома водорода и *водородоподобных систем* — состоящих из ядра с зарядом Ze и одного электрона. Это также позволило вычислять постоянную Ридберга. Рассмотрим движение электрона в водородоподобной системе, ограничиваясь круговыми стационарными орбитами. Решая совместно систему уравнений можно вычислить радиуса орбит как

$$\begin{cases} m_e v r_n = n \hbar \\ \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \end{cases} \quad \text{где } n=1, 2, 3, \dots \text{ — целые числа} \quad r_n = n^2 \frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{m_e Ze^2}$$

Видно, что радиусы орбит растут пропорционально квадратам целых чисел. Для атома водорода ($Z = 1$) радиус первой орбиты электрона при $n = 1$, называемый первым Боровским радиусом (a), равен

$$r_n = n^2 \frac{h^2 4\pi\epsilon_0}{m_e Ze^2} = 52,8$$

Полная энергия электрона в водородоподобной системе складывается из его кинетической и потенциальной энергий в электростатическом поле ядра

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{1}{2} \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Учитывая квантованные для радиуса n -й стационарной орбиты значения получим, что энергия электрона может принимать только следующие дозволенные дискретные значения:

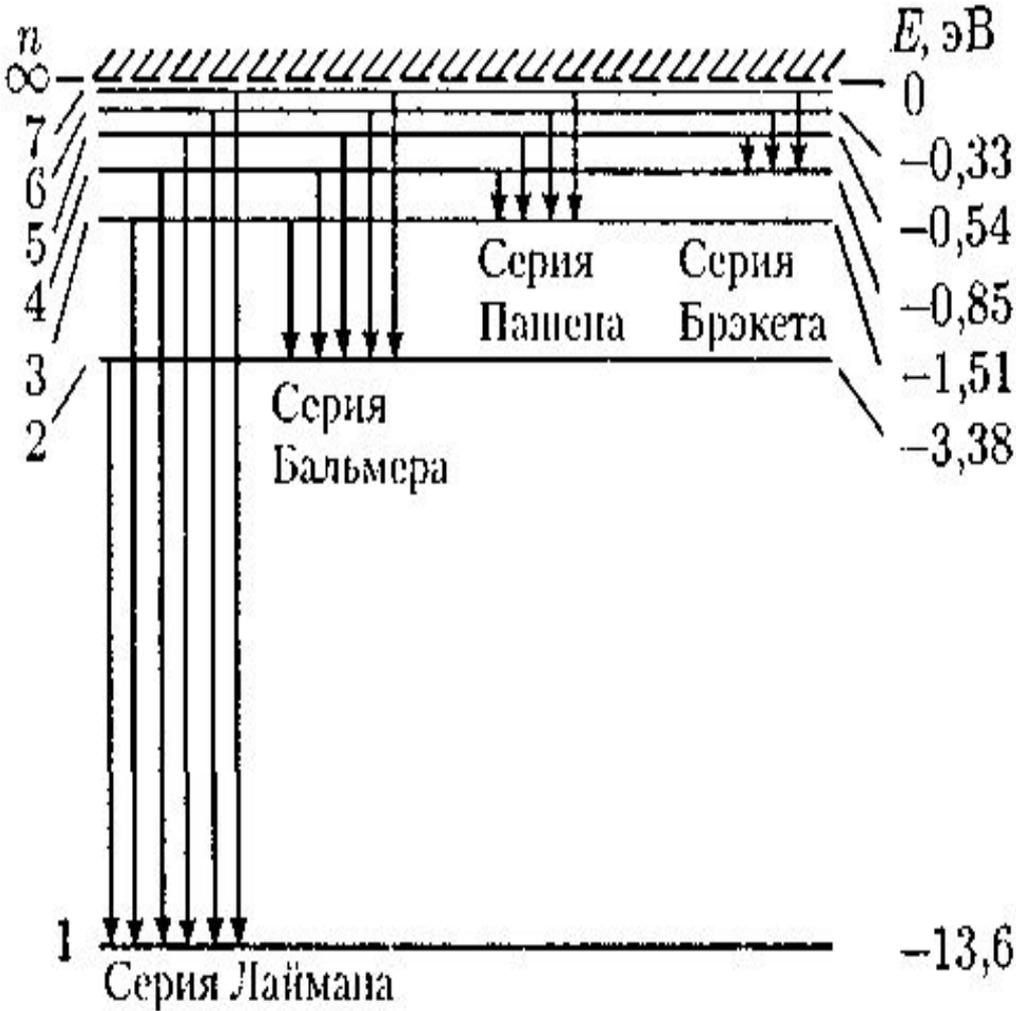
$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2}$$

где знак «-» означает, что электрон находится в связанном состоянии.

Энергетические состояния атома образуют последовательность энергетических уровней, изменяющихся в зависимости от значения n . Целое число n определяющее энергетические уровни атома, называется главным квантовым числом. $n = 1$ является основным (нормальным) состоянием; состояния с $n > 1$ являются возбужденными.

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Придавая различные целочисленные значения, получим для атома водорода ($Z = 1$), возможные уровни энергии, схематически представленные на энергетической диаграмме



Энергия атома водорода с увеличением n возрастает и энергетические уровни сближаются к границе, соответствующей значению $n = \infty$. Атом водорода обладает, т.о., минимальной энергией ($E_1 = -13,6\text{эВ}$) при $n = 1$ и максимальной ($E_\infty = 0$) при $n = \infty$. Следовательно, значение $E_\infty = 0$ соответствует ионизации атома (отрыву от него электрона). Согласно второму постулату Бора, при переходе атома водорода ($Z = 1$) из стационарного состояния n в стационарное состояние m с меньшей энергией испускается квант.

$$h\nu = E_n - E_m = -\frac{m_e e^4}{8h^2 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2} \right),$$

Откуда вычисляется частота и постоянная Ридберга

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ c}^{-1}$$

$$\nu = \frac{m_e e^4}{8h^3 \epsilon_0^2} \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) = R \left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right),$$

Корпускулярно-волновой дуализм свойств вещества. Некоторые свойства волн де Бройля

Согласно де Бройлю, с каждым микрообъектом связываются, с одной стороны, корпускулярные характеристики — энергия E и импульс p , а с другой — волновые характеристики — частота ν и длина волны λ . Количественные соотношения, связывающие корпускулярные и волновые свойства частиц, такие же, как для фотонов:

$$\varepsilon = h\nu \quad p = \frac{h}{\lambda} \quad \text{длина волны определяется по формуле де Бройля:} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

Рассмотрим свободно движущуюся со скоростью v частицу массой m . Вычислим для нее фазовую и групповую скорости волн де Бройля. Фазовая скорость определяется

$$v_{\text{фаз}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\hbar\omega}{\hbar k} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v}$$

Так как $c > v$, то фазовая скорость волн де Бройля $v_{\text{фаз}} > c$ (это возможно, так как $v_{\text{фаз}}$ не характеризует ни скорости «сигнала», ни скорости перемещения энергии).

Групповая скорость определяется

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\hbar\omega)}{d(\hbar k)} = \frac{dE}{dp}$$

Для свободной частицы

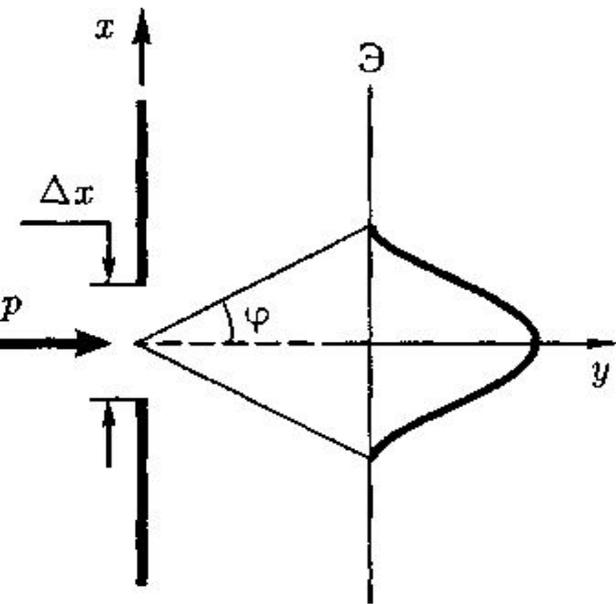
$$\frac{dE}{dp} = \frac{pc^2}{\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}} = \frac{pc^2}{E} = \frac{mvc^2}{mc^2} = v$$

Т.о., групповая скорость волн де Бройля равна скорости частицы, для фотона $u = c$. Скорость волн де Бройля зависит от длины волны.

Соотношение неопределенностей

Согласно двойственной корпускулярно-волновой природе частиц вещества, для описания микрочастиц используются то волновые, то корпускулярные представления. Поэтому приписывать им все свойства частиц и все свойства волн нельзя. Микрочастицы из-за наличия у них волновых свойств существенно отличаются от классических частиц. Одно из основных различий заключается в том, что нельзя говорить о движении микрочастицы по определенной траектории и неправомечно говорить об одновременных точных значениях ее координаты и импульса, а поскольку импульс выражается через длину волны, то отсюда следует, что микрочастица с определенным импульсом имеет полностью неопределенную координату, и наоборот. Согласно **соотношению неопределенностей Гейзенберга**, микрочастица (микрообъект) не может иметь одновременно и определенную координату (x, y, z), и определенную соответствующую проекцию импульса (P_x, P_y, P_z), причем неопределенности этих величин удовлетворяют условиям

$$\Delta x \Delta p_x \geq h; \Delta y \Delta p_y \geq h; \Delta z \Delta p_z \geq h,$$



Произведение неопределенностей координаты и соответствующей ей проекции импульса не может быть меньше величины порядка h . Если микрочастица находится в состоянии с точным значением координаты ($\Delta x = 0$), то в этом состоянии соответствующая проекция ее импульса оказывается совершенно неопределенной ($\Delta P_x = \infty$), и наоборот. Т. о., для микрочастицы не существует состояний, в которых ее координаты и импульс имели бы одновременно точные значения. Учитывая, что $\Delta p_x = m \Delta v_x$ можно получить

$$\Delta x \Delta v_x \geq \frac{h}{m}.$$

Чем больше масса частицы, тем меньше неопределенности ее координаты и скорости и, следовательно, с тем большей точностью можно применять к этой частице понятие траектории.

соотношение неопределенностей для энергии и времени:

$$\Delta E \Delta t \geq h.$$

Неопределенность частоты излученного фотона характеризуется,

$$\Delta \nu = \frac{\Delta E}{h} \quad \text{измеряя ширину}$$

спектральной линии, можно оценить порядок времени существования атома в возбужденном состоянии.

Волновая функция и ее статистический смысл

Экспериментальное подтверждение идеи де Бройля об универсальности корпускулярно-волнового дуализма, ограниченность применения классической механики к микрообъектам, привели к новому созданию квантовой механики, описывающей законы движения и взаимодействия микрочастиц с учетом их волновых свойств. Возникла проблема объяснения физической природы волн де Бройля, для решения этой проблемы возникла необходимость вероятностного подхода к описанию микрочастиц. М.Борн предположил, что по волновому закону меняется не сама вероятность, а амплитуда вероятности $\Psi(x, y, z, t)$. Эту величину называют также волновой функцией (или Ψ -функцией). Амплитуда вероятности может быть комплексной, и вероятность W пропорциональна квадрату ее

модуля: $W \sim |\Psi(x, y, z, t)|^2$ где $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$

Т.О. описание состояния микрообъекта с помощью волновой функции имеет статистический, вероятностный характер: квадрат модуля волновой функции (квадрат модуля амплитуды волн де Бройля) определяет вероятность нахождения частицы в момент времени t в области с координатами x и $x + dx$, y и $y + dy$, z и $z + dz$. Состояние микрочастиц описывается с помощью волновой функции, которая является основным носителем информации об их корпускулярных и волновых свойствах.

Вероятность нахождения частицы в элементе объемом dV равна: $dW = |\Psi|^2 dV$ откуда $|\Psi|^2 = \frac{dW}{dV}$ плотность вероятности т. е. определяет вероятность нахождения частицы в окрестности точки с координатами x, y, z . Т.О., физический смысл имеет не сама Ψ -функция, а квадрат ее модуля $|\Psi|^2$, которым задается *интенсивность воли де*

Бройля. Вероятность найти частицу в момент времени t в конечном объеме V , согласно теореме сложения вероятностей, равна

$$W = \int_V dW = \int_V |\Psi|^2 dV.$$

Для того, чтобы вероятность достоверного события обращалась в единицу, если за объем V принять бесконечный объем необходимо принять **условие нормировки вероятностей** $\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dV = 1$

Волновая функция должна удовлетворять следующим условиям. 1. Функция Ψ , характеризующая вероятность обнаружения действия микрочастицы в элементе объема, должна быть конечной, 2. однозначной и 3. непрерывной. Волновая функция Φ , позволяет вычислять средние значения физических величин, характеризующих данный микрообъект. Например, среднее расстояние $\langle r \rangle$ электрона от ядра.

Общее уравнение Шредингера.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

Основное уравнение *нерелятивистской квантовой механики* постулировано Э.Шредингером и имеет вид:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + U(x, y, z, t) \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{Где } \Delta \text{ оператор Лапласа} \quad \Delta \Psi = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}$$

$U(x, y, z, t)$ - потенциальная функция частицы в силовом поле, в котором она движется. Общее уравнение Шредингера справедливо для любой частицы движущейся с малой скоростью $v \ll c$. Волновое ур-е дополняется условиями, накладываемыми на волновую функцию: 1) волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной

2) производные $\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \frac{\partial \Psi}{\partial t}$ должны быть непрерывны; 3) функция $|\Psi|^2$ должна быть интегрируема;

это условие в простейших случаях сводится к условию нормировки вероятностей. Решение уравнения Шредингера может быть представлено в виде произведения двух функций, одна из которых есть функция только координат, другая — только времени, а именно:

$$\Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) e^{-\frac{i}{\hbar} E t},$$

Для многих физических явлений, происходящих в микромире, уравнение можно упростить, исключив зависимость Ψ от времени, найти уравнение Шредингера для *стационарных состояний* — состояний с фиксированными значениями энергии. Это возможно, если силовое поле, в котором частица движется, стационарно, т. е. функция $U = U(x, y, z)$ не зависит явно от времени и имеет смысл потенциальной энергии.

$$\Delta \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0.$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний. Из множества решений этого ур-я, посредством наложения граничных условий отбирают решения, имеющие физический смысл - **условия регулярности волновых функций:** волновые функции должны быть конечными, однозначными и непрерывными вместе со своими первыми производными. Такие значения энергии называются **собственными**. Собственные значения E могут образовывать как непрерывный, так и дискретный ряд. В первом случае говорят о **непрерывном, или сплошном, спектре**, во втором — о **дискретном спектре**.

Движение свободной частицы

Свободная частица — это частица, движущаяся в отсутствие внешних полей, следовательно потенциальная энергия частицы $U(x) = \text{const}$ и ее можно принять равной нулю.

Тогда уравнение Шредингера для стационарных состояний примет вид:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0. \quad \text{частным решением этого уравнения является функция}$$
$$\psi(x) = A e^{ikx} \quad \text{где } A = \text{const} \text{ и } k = \text{const},$$

Волновая функция зависящая от координат и времени представляется как плоская монохроматическая волна де Бройля

$$\Psi(x, t) = A e^{-i\omega t + ikx} = A e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - p_x x)}$$

Собственные значения энергии оказываются обычной для нерелятивистских частиц. Следовательно, энергия свободной частицы может принимать любые значения (так как волновое число k может принимать любые положительные значения), т. е. энергетический **спектр свободной частицы является непрерывным.**

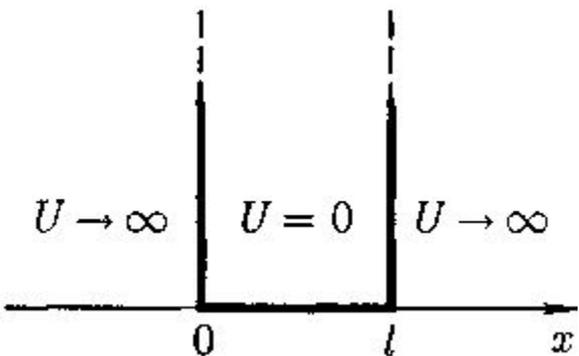
$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{p_x^2}{2m}$$

Т. о., свободная квантовая частица описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Этому соответствует не зависящая от времени плотность вероятности обнаружения частицы в данной точке пространства т. е. все положения свободной частицы в пространстве являются равновероятными

$$|\Psi|^2 = \Psi \Psi^* = |A|^2,$$

Частица в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками»

Анализ решений уравнения Шредингера применительно к частице в одномерной прямоугольной «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками». Такая «яма» описывается потенциальной энергией вида (для простоты принимаем, что частица движется вдоль оси x)



$$U(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ 0, & 0 \leq x \leq l, \\ \infty, & x > l, \end{cases}$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний в случае одномерной задачи запишется в виде

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

Вероятность обнаружения частицы (а следовательно, и волновая функция) за пределами «ямы» равна нулю. На границах «ямы» (при $x = 0$ и $x = l$) непрерывная волновая функция также должна обращаться в нуль. Следовательно, граничные условия в данном случае имеют вид $\psi(0) = \psi(l) = 0$

В пределах «ямы» ($0 \leq x \leq l$) уравнение Шредингера сведется к уравнению

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \quad \text{или}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \psi = 0, \quad \text{где} \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения $\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx$

При $\psi(0) = 0$ $B = 0$

$$\psi(x) = A \sin kx. \quad \text{тогда} \quad k = \frac{n\pi}{l}. \quad E_n = n^2 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ПРОДОЛЖЕНИЕ

Т. О. стационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками», удовлетворяется только при собственных значениях E_n , зависящих от целого числа n .

Следовательно, энергия E_n частицы в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» принимает лишь определенные дискретные значения, т. е. квантуется. Квантованные значения энергии E_n называются уровнями энергии, а число n , определяющее энергетические уровни частицы, называется главным квантовым числом.

Т. о., микрочастица в «потенциальной яме» с бесконечно высокими «стенками» может находиться только на определенном энергетическом уровне E_n , или, частица находится в квантовом состоянии n .

Учитывая, что $k = \frac{n\pi}{l}$, найдем собственные функции

$$\psi_n(x) = A \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

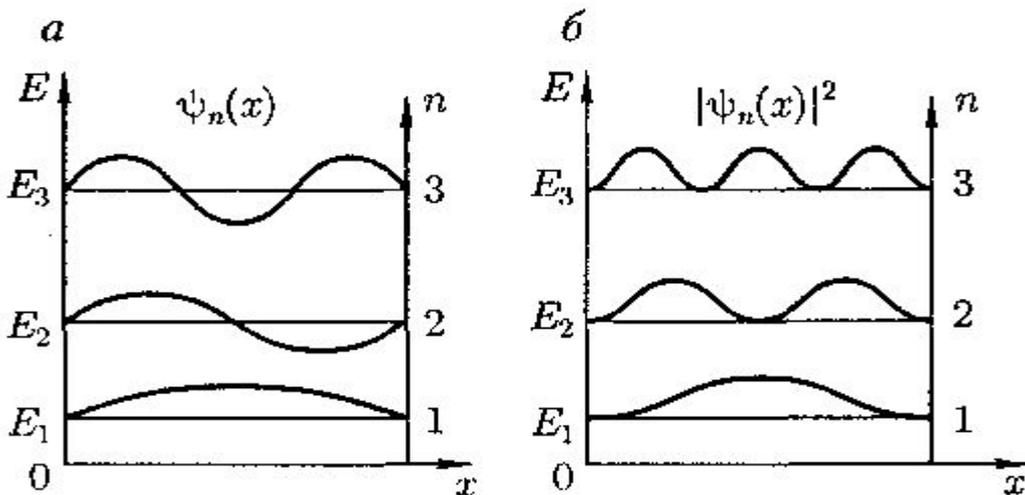
Постоянную интегрирования A найдем из условия нормировки, после интегрирования получим $A = \sqrt{\frac{2}{l}}$

$$A^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x dx = 1.$$

Тогда собственная функция представляется как

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

График собственной функции и вероятность обнаружения частицы на различных расстояниях от стенок ямы равна



$$|\psi(x)|^2 = \psi(x)\psi_n^*(x)$$

Из рисунка следует, что, в квантовом состоянии с $n = 2$ частица не может находиться в середине «ямы», в то время как одинаково часто может пребывать в ее левой и правой частях. Такое поведение частицы указывает на то, что представления о траекториях частицы в квантовой механике несостоятельны.