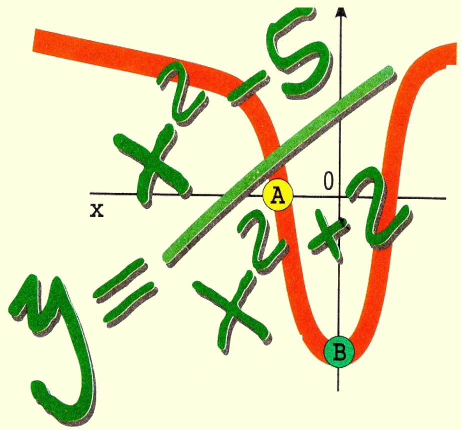
Производная функции



Производная функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена в точках x и $x0$.

Разность $(x - x0)$ называют *приращением аргумента* и обозначают Δx;

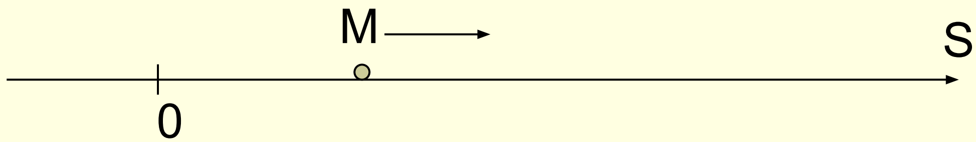
Разность $f(x)-f(x0)$ называют *приращением функции* и обозначают Δy или Δf.

$$\Delta x = x - x0 \Rightarrow x = x0 + \Delta x,$$

$$\Delta f = f(x) - f(x0) \Rightarrow \Delta f = f(x0 + \Delta x) - f(x0).$$

Задача о мгновенной скорости прямолинейного движения

Пусть по прямой движется точка по закону S=S(t) [S(t) – положение точки на прямойв момент времени t].



Средняя скорость за промежуток времени от до t_1 : t_2 $\upsilon_{cp} = \dfrac{S(t_2) - S(t_1)}{t_2 - t_1}$

Полагая $t_1 = t_0, t_2 = t_0 + \Delta t, получим:$

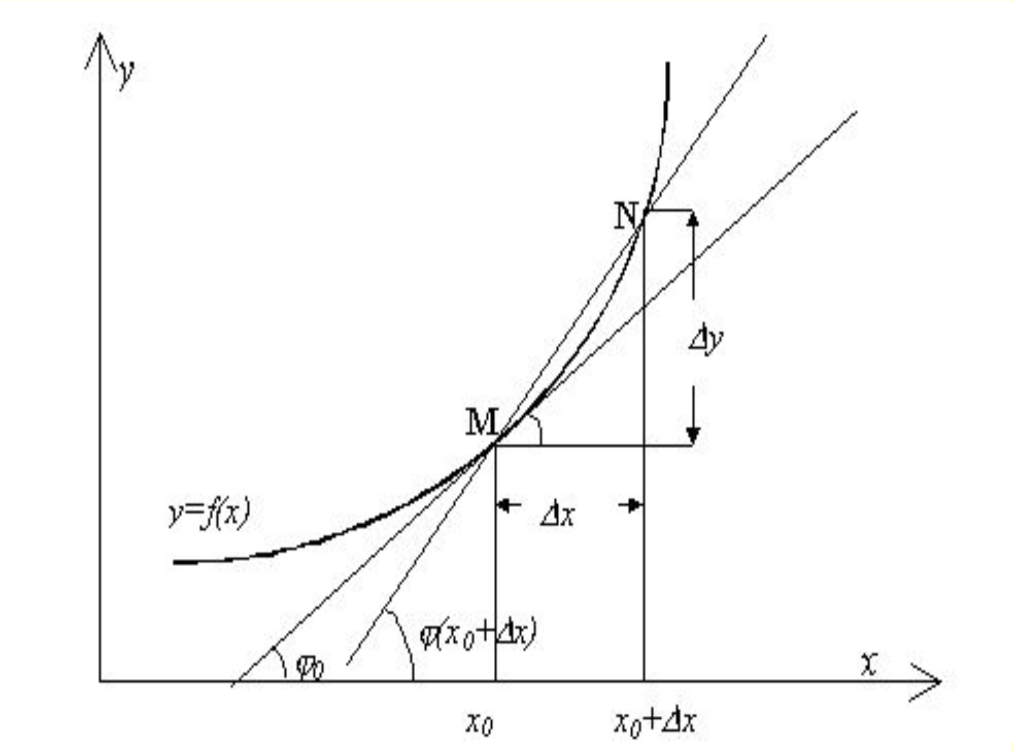
$$\upsilon_{cp} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{t_0 + \Delta t - t_0} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

Мгновенной скоростью в момент времени t называют предел средней скорости движения за промежуток времени $\left[t_0, t_0 + \Delta t\right]$ при $\Delta t \to 0$.

$$\boxed{\upsilon_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}} \quad 1$$

Задача о проведении касательной к графику функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ *Касательной* к графику функции y=f(x) в точке M называется предельное положение секущей *MN*, когда точка N стремится к точке *M* по кривой.



$M_0(x_0, y_0),$

$N(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in y = f(x)$

$\angle\varphi$ -угол наклона секущей MN

$$=> tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\kappa_{кас} = \lim_{N \to M} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi$$

Задача о проведении касательной к графику функции

$\angle(\varphi + \Delta x)$ -угол наклона касательной к оси OX.

$$=> \kappa_{кас} = tg(\varphi + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Так как, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$=> \boxed{k_{кас} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}} \qquad 2$$

Мы определили угловой коэффициент касательной, как приращение ординаты к приращению абсциссы, когда последнее стремится к 0.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Производной функции y=f(x) в точке x0 называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента при $\Delta x \to 0$ (если этот предел существует).

Обозначается: $y'(x_0), f'(x_0)$ (Лагранж), $\dfrac{dy}{dx}$ (Лейбниц)

$$\boxed{y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}}$$

Механический смысл производной

Из $\upsilon_{мгн} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t}$ и используя определение производной,

можем записать: $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \dfrac{ds}{dt} \Rightarrow \upsilon = \dfrac{ds}{dt}$

Таким образом, производная от пути по времени есть мгновенная скорость.

Геометрический смысл производной

Из $k_{кас} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ и используя определение производной,

можем записать: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \kappa_{кас} = \dfrac{dy}{dx}$

Таким образом, производная от ординаты кривой по абсциссе есть угловой коэффициент касательной к этой кривой.

Домашнее задание

Подготовить таблицу производных *основных элементарных функций*

Общие правила дифференцирования

$$1. (u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2. (cu)' = c(u)'$$

$$3. (uv)' = u'v + uv'$$

$$4. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Дифференцирование сложных функций

Правило: Производная сложной функции по основному аргументу равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по основному.

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)\frac{du}{dx} \Big|_{u=\varphi(x)}$$

ПРИМЕР

$$y = \sin(x^2)$$

$$u = \sin u, u = x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = (\sin(x^2))' = \cos u * 2x = 2x\cos(x^2)$$