Тема 1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

Лекция №3 (3). Волновые уравнения

1. Волновые уравнения произвольной электромагнитной системы источников. Уравнения Гельмгольца.
2. Решение системы уравнений Максвелла для свободного пространства.

1 Волновые уравнения произвольной электромагнитной системы источников. Уравнения Гельмгольца

Преобразуем первое уравнение Максвелла $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}^{\,э} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$,

используя закон Ома $\vec{j}^{\,э} = \sigma \vec{E}$ и материальное уравнение $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}$.

Поскольку параметры среды не зависят от времени, то получаем

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}^{\,э} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \sigma \vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Применим операцию **rot** к правой и левой частям:

$$\mathrm{rotrot}\,\vec{H} = \sigma\,\mathrm{rot}\,\vec{E} + \varepsilon_0 \varepsilon \frac{\partial (\mathrm{rot}\,\vec{E})}{\partial t}$$

Учтем из второго уравнения Максвелла $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \mu \dfrac{\partial \vec{H}}{\partial t}$,

получаем

$$\mathrm{rotrot}\,\vec{H} = -\sigma \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Учтем $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \nabla^2\vec{H}$ и получим

$$\nabla^2\vec{H} - \varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \mu_a\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \qquad (1)$$

Аналогичным образом преобразуется второе уравнение к виду

$$\nabla^2\vec{E} - \varepsilon_a\mu_a\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \sigma\varepsilon_a\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = 0 \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) называют ***векторными обобщенными однородными волновыми уравнениями***.

Разновидности волновых уравнений

1. Векторные однородные волновые уравнения для идеального диэлектрика ($\sigma = 0$)

$$\nabla^2 \vec{H} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{E} - \varepsilon_a \mu_a \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

или $$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \qquad \nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$$

где $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$ [м/с] - скорость света.

2. Векторные неоднородные уравнения (уравнения Даламбера)

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\mathrm{rot}\, \vec{j} \qquad \nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathrm{grad}\, \rho + \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$$

В среде без потерь ($\sigma = 0$)

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\mathrm{rot}\, \vec{j}^{\,\text{ст}} \qquad \nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon} \mathrm{grad}\, \rho^{\text{ст}} + \mu_0 \mu \frac{\partial \vec{j}^{\,\text{ст}}}{\partial \mathrm{t}}$$

В среде без потерь ($\sigma = 0$)

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\operatorname{rot} \vec{j}^{\,\text{ст}} \qquad \nabla^2 \vec{E} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\operatorname{grad}\rho^{\text{ст}} + \mu_0\mu\frac{\partial \vec{j}^{\,\text{ст}}}{\partial t}$$

3. Уравнения Пуассона (отсутствует временная зависимость).

Пренебрежение токами смещения.

$$\nabla^2 \vec{H} = -\operatorname{rot} \vec{j}^{\,cm} \qquad \nabla^2 \vec{E} = (\varepsilon\varepsilon_0)^{-1}\operatorname{grad}\rho^{cm}$$

Основные понятия векторной алгебры:

$$\nabla^2 \vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \nabla^2\psi$$

Лапласиан в декартовой системе координат:

- *для скаляра*

$$\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

- *для вектора*

$$\nabla^2\vec{a} = \vec{i}_x\nabla^2 a_x + \vec{i}_y\nabla^2 a_y + \vec{i}_z\nabla^2 a_z$$

4. Уравнения Гельмгольца (для гармонических сигналов)

- неоднородные:

$$\nabla^2 \vec{H}_m(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon\mu \vec{H}_m(\vec{r}) = -\operatorname{rot} \vec{j}_m^{\,\text{ст}}(\vec{r})$$

$$\nabla^2 \vec{E}_m(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon\mu \vec{E}_m(\vec{r}) = \frac{i}{\omega\varepsilon_0\varepsilon} \operatorname{grad} \rho_m^{\text{ст}}(\vec{r}) + i\omega\mu_0\mu \vec{j}_m^{\,\text{ст}}(\vec{r})$$

- однородные:

$$\nabla^2 \vec{H}_m(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon\mu \vec{H}_m(\vec{r}) = 0$$

$$\nabla^2 \vec{E}_m(\vec{r}) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \varepsilon\mu \vec{E}_m(\vec{r}) = 0$$

2 Решение системы уравнения Максвелла для свободного пространства

Решение получим на основе однородного волнового уравнения.

Будем полагать, что волновой процесс зависит только от времени t и расстояния r от точки источника ЭМВ до точки наблюдения, отсчитываемого в направлении распространения волны). Пусть данное направление будет совпадать с осью Ox.

Тогда имеем волновое уравнение вида: $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

Решение уравнения имеет вид: $u(x,t) = f_1\left(\dfrac{x}{c} - \dfrac{r}{c}\right) + f_2\left(\dfrac{x}{c} + \dfrac{r}{c}\right)$

Для точечного источника в сферической системе координат имеем

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$$

Решение волнового уравнения точечного источника имеет вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{c} - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r} f_2\left(\frac{x}{c} + \frac{r}{c}\right)$$

где $\frac{1}{2} f_1\left(\frac{x}{c} - \frac{r}{c}\right)$ **-** волна, которая распространяется со скоростью c от центра возмущения в бесконечность (***расходящаяся волна)*** – удовлетворяет условию излучения.

$\frac{1}{r} f_2\left(\frac{x}{c} + \frac{r}{c}\right)$ **-** волна, которая движется с той же скоростью из бесконечности к центру (***сходящаяся волна)*** – не удовлетворяет условию излучения.

Для гармонических сигналов: $f_1(\omega t - kr)$ ***и*** $f_2(\omega t + kr)$

Волновое число: $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$

Длина волны λ **-** пространственный период или путь, проходимый волной за период колебания.