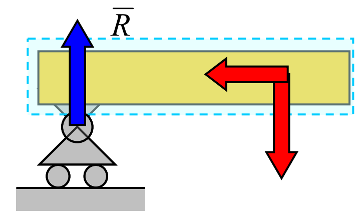
Лекция 3

Основные типы опор и балок – Стержни, работающие главным образом на изгиб, называются **балками**. Балки являются простейшими несущими конструкциями в мостах, промышленных и гражданских сооружениях. Балки опираются на другие конструкции или основание (стены, колонны, устои и др.).

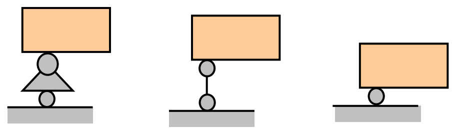
Схематизация опорных устройств – упрощает реальные конструкции опорных устройств с сохранением функций ограничения перемещений. Схематизация большинства из опорных устройств рассмотрена в курсе теоретической механике и сводится к к нескольким типам опор:

Шарнирно-подвижная (катковая) опора – ограничивает перемещение объекта по нормали к опорной плоскости (не препятствует повороту и перемещению по касательной к опорной плоскости).

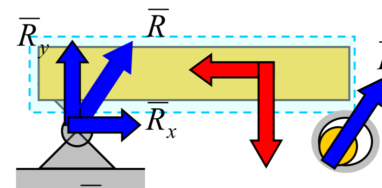


Реакция подвижного шарнира проходит через центр шарнира перпендикулярно оси шарнира и плоскости опирания.

Другие схематические изображения шарнирно-подвижной опоры:



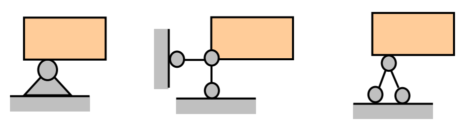
Шарнирно- неподвижная опора – ограничивает перемещение объекта как по нормали к опорной плоскости, так и по касательной (не препятствует повороту).



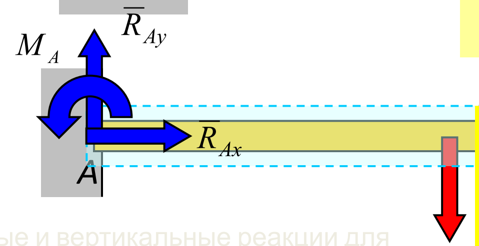
Реакция неподвижного шарнира проходит через центр шарнира пер... шар... про... нап...

Реакцию неподвижного шарнира можно разложить на две составляющие, например, R_x и R_y,

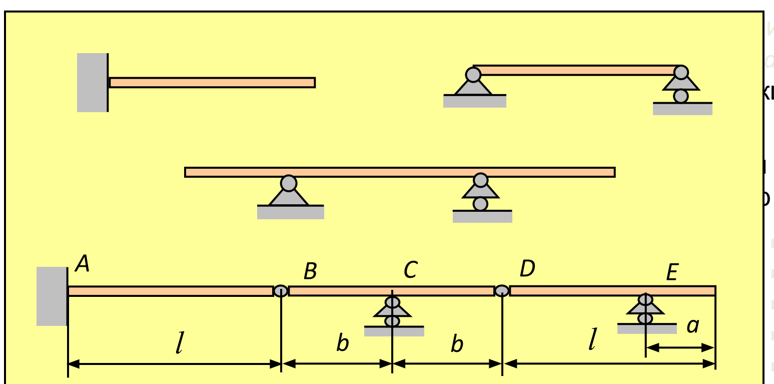
Другие схематические изображения шарнирно-неподвижной опоры:



Жесткое защемление (жесткая заделка) – ограничивает как поступательные, так и вращательные движения (линейные и угловые перемещения) объекта. В случае плоской системы сил (плоская заделка) ограничиваются перемещения по осям x, y и поворот в плоскости x, y.



В жесткой плоской заделке возникает три реактивных усилия: две составляющие реактивные силы R_{Ax} и R_{Ay}, а также реактивный момент (пара сил) M_A .



...ике горизонтальные и вертикальные реакции для ...al) и V_A (vertical).

...кции по направлению трех координатных осей и три

...обеспечения неподвижности балки (плоские системы – 3, пространственные – 6) ...изменяемость системы.

Основные типы балок – различаются способом закрепления:
- **Консоль** – один конец жестко защемлен, второй свободен.
- **Простая (двух опорная)** – по обоим концам шарнирные опоры.
- **Консольная (двух опорная)** – простая балка с консольными частями.
- **Составная балка** – составленная из двух или более простых, консольных балок и консолей.

Лекция 3 (продолжен – 3.2)

- **Определение опорных реакций в балках** – выполняется методами теоретической механики.
- Уравнения равновесия могут быть составлены в виде одной из трех форм:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum X_i = 0; \; x \quad \sum M_{iC} = 0; \; C$$

$$\sum Y_i = 0; \quad \sum M_{iB} = 0; \; \perp \quad \sum M_{iB} = 0; \; \notin$$

$$\sum M_{iA} = 0 \quad \sum M_{iA} = 0 \; AB \quad \sum M_{iA} = 0 \; AB$$

- Поскольку найденные опорные реакции участвуют в дальнейших расчетах (построение эпюр внутренних усилий, определение напряжений и перемещений) следует активно пользоваться этими формами уравнений так, чтобы в каждое из уравнений входила лишь одна определяемая реакция, чтобы исключить подстановку ранее найденных и не проверенных реакций. После независимого вычисления всех реакций обязательно должна быть сделана проверка составлением такого уравнения равновесия, в котором бы присутствовали все или большинство из найденных реакций. Поскольку балки несут преимущественно вертикальную нагрузку, то в общем случае рекомендуется воспользоваться формой II и проверить вертикальные реакции составлением уравнения в проекциях на вертикальную ось.

Помните, что неверно найденные реакции в любом случае приведут к неверным результатам при построении эпюр, определении напряжений и перемещений!

- **Внутренние усилия при изгибе** – При изгибе возникают в общем случае изгибающие моменты M_x, M_y и поперечные силы Q_x, Q_y.

Если в поперечном сечении возникает только один изгибающий момент M_x, то такой изгиб называется чистым.
В большинстве случаев дополнительно к изгибающему моменту возникает поперечная сила Q_y, и такой изгиб называется поперечным.
Если внешняя нагрузка и реактивные усилия лежат в одной плоскости, то такой изгиб называется плоским.

- Правила знаков для изгибающего момента – Изгибающий момент принимается положительным, если он изгибает элемент балки так, нижние волокна оказываются растянутыми, т.е. ось балки искривляется выпуклостью вниз.
- Правила знаков для поперечной с… стремится повернуть элемент балки по ход…
- **Дифференциальные зависимости п…** нагрузкой. Выделим из балки элемент длин… распределенной нагрузкой q, и заменим де…

Выделенный элемент находится в равнове… и удовлетворяет уравнения равновесия:

Из первого уравнения получаем:

$$\frac{dQ_y}{dz} = -q_y.$$

Производная от поперечной силы по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

С использованием этих основных зависимостей получаем:

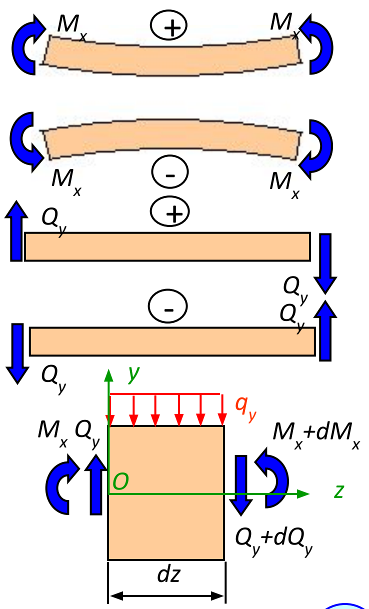
$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = -q_y.$$

Вторая производная от изгибающего момента по продольной координате равна интенсивности распределенной нагрузки.

Из второго уравнения, пренебрегая малыми второго порядка получаем:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y.$$

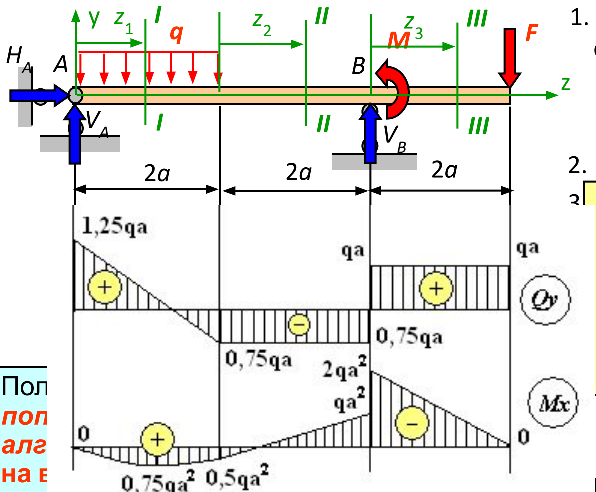
Производная от изгибающего момента по продольной координате равна поперечной силе.



Построение эпюр изгибающих моментов и поперечных сил – принципиально ничем не отличается от построения эпюры продольных сил и крутящих моментов. Положительные значения поперечной силы Q_y откладываются вверх от горизонтальной базовой линии, а отрицательные – вниз. Положительные значения изгибающих моментов M_x откладываются вниз – со стороны растянутого волокна. Таким образом расположение ординат эпюры M_x указывают, какие волокна растянуты.

Примечание: Это правило принято в строительных и транспортных вузах в то время, как в машиностроительных и авиационных вузах используется обратное правило (положительный момент откладывается со стороны сжатого волокна).

Пусть балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой q, сосредоточенной силой $F=qa$ и крутящим моментом $M=qa^2$:



1. Определяем опорные реакции:

$$\sum Z_i = 0; \quad H_A = 0;$$

$$\sum M_{Ai} = 0; \quad -F6a + M + V_B 4a - (q2a)a = 0;$$

$$\sum M_{Bi} = 0; \quad -F2a + M + (q2a)3a - V_A 4a = 0;$$

$V_B = 1,75qa$

$V_A = 1,25qa$

2. Количество участков – 3.

$$V_B = \frac{F6a - M + q2a^2}{\ldots} = \frac{qa6a - qa^2 + q2a^2}{\ldots} = 1,75\ldots$$

Используя полученные выражения для поперечной силы и изгибающего момента построим эпюру поперечных сил и изгибающих моментов, подставляя значения реакций и координаты начала и конца участков. В случае квадратичного изменения величины (изгибающий момент на первом участке) дополнительно подставляется координата точки внутри интервала, например, посредине. Откладывая не каждом из участков значения поперечных сил и изгибающего момента в некотором выбранном масштабе получаем эпюры Q_y и M_x:

Пол… **пол… алг… на в… взятых по одну сторону от сечения,**

Отсюда получаем:

$$Q_y^{I-I} = V_A - qz_1. \qquad M_x^{I-I} = V_A z_1 - q\frac{z_1^2}{2}.$$

…овторяем шаги 3 и 4 для следующих участков:

…ечение ***II-II*** на втором участке и определим текущую координату сечения и пределы ее … $\le z_2 \le 2a$.

…равую часть, заменим ее действие поперечной силой Q_y^{II-II} и изгибающим моментом M_x^{II-II} …авнения равновесия в проекциях и в моментах относительно оси *x, проходящей через …его сечения* (т.е. относительно точки *D*) :

$$= 0; \quad V_A - q2a - Q_y^{II-II} = 0; \quad \sum M_{Di} = 0; \quad -V_A(2a + z_2) + q2a(a + z_2) + M_x^{II-II} = 0.$$

…аем:

$$Q_y^{II-II} = V_A - q2a. \qquad M_x^{II-II} = V_A(2a + z_2) - q2a(a + z_2).$$

…олучаем для участка 3 ($0 \le z_3 \le 2a$):

$$\sum Y_i = 0; \quad Q_y^{III-III} - F = 0; \quad \sum M_{Ei} = 0; \quad -M_x^{III-III} - F(2a - z_3) = 0.$$

$$Q_y^{III-III} = F. \qquad M_x^{III-III} = -F(2a + z_2).$$

Свойства эпюр:

1. Равномерно распределенная нагрузка на участке своего действия вызывает на эпюре *Q* наклонную прямую линию, падающую в сторону действия нагрузки, а на эпюре *M* – параболу с выпуклостью в ту же сторону.
2. Сосредоточенная сила вызывает на эпюре *Q* скачок в точке приложения силы в сторону действия силы, а на эпюре *M* – перелом в ту же сторону.
3. Сосредоточенный момент не вызывает на эпюре *Q* в точке его приложения никаких особенностей, а на эпюре *M* вызывает скачок в ту же сторону.

Смотрите и удивляйтесь!

Лекция 4

- **Центральное растяжение-сжатие –** Во многих элементах конструкций возникают только продольные усилия, вызывающие в них деформации растяжения или сжатия (стойки, элементы ферм, тяги, тросы и т.п.). При этом в местах приложения условно сосредоточенных сил характер распределения деформаций достаточно сложный и отличается от распределения деформаций на удалении от этой локальной области. Размер этой области равен примерно наибольшему из размеров поперечного сечения.
- **Принцип Сен-Венана - Если совокупность некоторых сил, приложенных к небольшой части поверхности тела, заменить статически эквивалентной системой других сил, то такая замена не вызовет существенных изменений в условиях нагружения частей тела, достаточно удаленных от мест приложения исходной системы сил.**
- Как показывает опыт, за пределами этой области деформации практически постоянны и поперечные сечения перемещаются параллельно своим начальным положениям. На основании этого вводится **гипотеза плоских сечений** (Я. Бернулли):

  Поперечные сечения стержня, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными после деформации.

- **Напряжения и деформации –** Как было ранее сказано, задача определения напряжений всегда является *статически неопределимой*.

Такие задачи решаются последовательным рассмотрением статической, геометрической и физической сторон.

В данном случае имеем *статическое* уравнение, связывающее внутреннее усилие – продольную силу с напряжением:. $N = \int_A \sigma_z dA;$

Для вычисления интеграла необходимо знать закон изменения напряжений по сечению. Этот закон можно установить изучением непосредственно наблюдаемых перемещений (деформаций). Поскольку принимается гипотеза плоских сечений, то при отсутствии внешней *распределенной* продольной нагрузки **деформации постоянны по сечению и по длине стержня** (*геометрия*) . Из введенного ранее определения деформаций в точке : $\varepsilon_z = \dfrac{\Delta dz}{dz} = const.$ $\Rightarrow$ $\varepsilon_{\text{прод}} = \varepsilon_z = \dfrac{\Delta l}{l},$ где Δl – **абсолютная продольная деформация** (**удлинение**), l - длина (базовая длина) стержня.

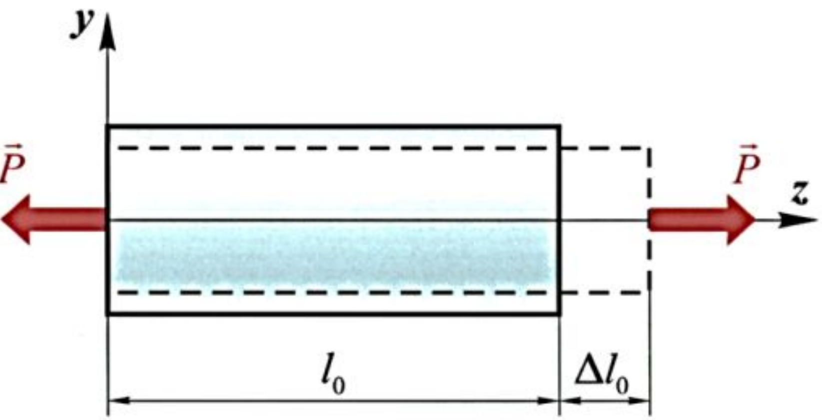
Опытным путем установлена фундаментальная (*физическая*) связь усилий и удлинений (Р. Гук) и в дальнейшем, напряжений и деформаций (Коши, Навье) в виде: $\sigma = E\varepsilon,$ где *E* – модуль упругости (*физическая постоянная* материала, определяемая экспериментально).

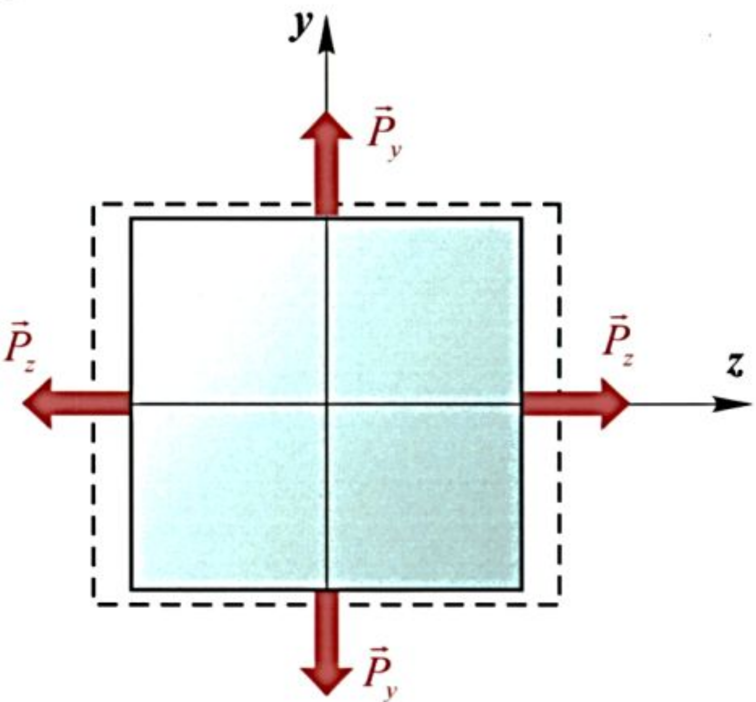
Подстановка последнего соотношения – **закона Гука** в интегральное выражение с учетом постоянства деформации и напряжения дает: $N = \int_A \sigma_z dA = \sigma_z A;$ $\Rightarrow$ $\sigma_z = \dfrac{N}{A}.$ **Нормальное напряжение в поперечном сечении прямо пропорционально величине продольного усилия и обратно пропорционально площади сечения.**

Абсолютную деформацию (удлинение) стержня также можно определить через продольное усилие: $\Delta l = \varepsilon_z l = \dfrac{\sigma}{E} l.$ $\Rightarrow$ $\Delta l = \dfrac{Nl}{EA}.$

Формула для абсолютного удлинения справедлива лишь при постоянной по длине стержня продольной силе и неизменной площади поперечного сечения! В случае переменной продольной силы, например, при учете собственного веса вертикальных стержней, и/или переменной площади необходимо использовать интегральное выражение: $\Delta l = \int_0^l \dfrac{Ndz}{EA}.$

Закон Гука. Коэффициент Пуассона





На практике установлено, что для большинства материалов существует диапазон растягивающих– –сжимающих нагрузок, таких, что

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z$$

E — модуль упругости; модуль Юнга первого рода — одна из основных характеристик материала.

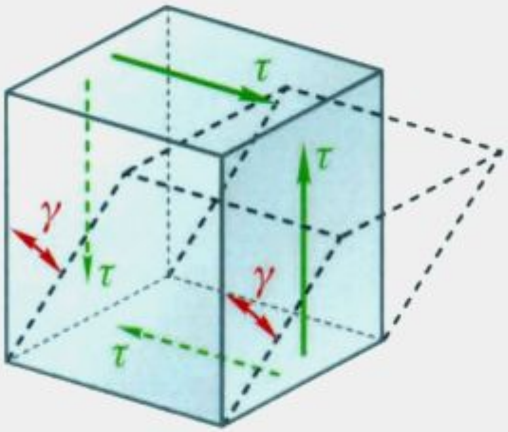
Продольные деформации (ε_z) сопровождаются поперечными (ε_y) и связаны коэффициентом Пуассона

$$\varepsilon_y = \mu \cdot \varepsilon_z$$

При растяжении (сжатии) по двум осям:

$$\begin{cases} \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_z - \mu\sigma_y\right); \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_z\right). \end{cases}$$

Сопротивление материалов. Сдвиг



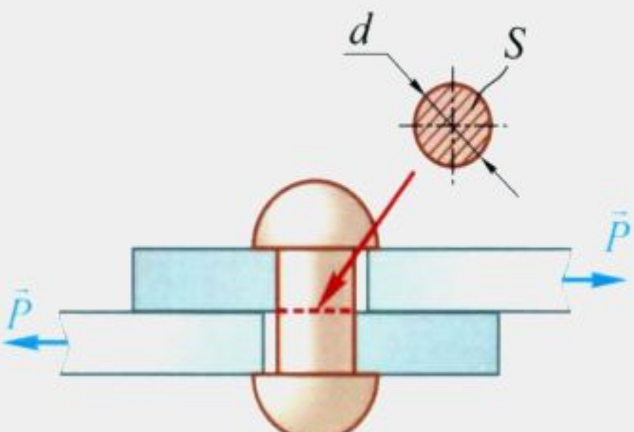
Сдвиг испытывает элементарный объем материала, по граням которого действуют только касательные напряжения.

$\tau = G \cdot \gamma$ — закон Гука при сдвиге.

G — модуль упругости второго рода. Линейные деформации неотделимы от угловых, поэтому между E и G существует зависимость:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Для стали $\mu = 0,3$, поэтому $G = 0,4E = 0,8 \cdot 10^5\ МПа$.



Предельным случаем сдвига считается **срез.**

Напряжения в плоскости среза — касательные.

$$\tau = \frac{P}{S}.$$

S — площадь среза; для круглых заклепок $S = \dfrac{\pi d^2}{4}$.

Лекция 4 (продолжен – 4.2)

Коэффициент Пуассона – При растяжении стержня наряду с продольной деформацией (удлинением), определяемой законом Гука, возникает поперечная деформация (сужение поперечного сечения), выражающаяся в уменьшении поперечных размеров стержня. Относительные поперечные деформации вычисляются как

$$\varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_x = -\frac{\Delta b}{b}, \qquad \varepsilon_{\text{попер}} = \varepsilon_y = -\frac{\Delta h}{h},$$

где b, h – размеры поперечного сечения.

Экспериментально установлено, что имеется линейная связь между продольной и поперечной деформацией:

$$\varepsilon_{\text{попер}} = -\mu\,\varepsilon_{\text{прод}}$$

где μ – коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом Пуассона.

Коэффициент Пуассона для данного материала в пределах упругих деформаций имеет постоянное значение и находится в пределах от 0 до 0,5.

Материал	μ
Сталь	0,25-0,33
Медь, бронза	0,31-0,35
Чугун	0,23-0,27
Бетон	0,08-0, 18
Древесина вдоль волокон поперек волокон	 0,5 0,02
Алюминий	0,32-0,36
Резина, каучук	0,47-0,5

По закону Гука, определяющему связь нормальных напряжений с продольными деформациями:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E}.$$

Тогда

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = -\mu\varepsilon_z = -\mu\frac{\sigma_z}{E}.$$

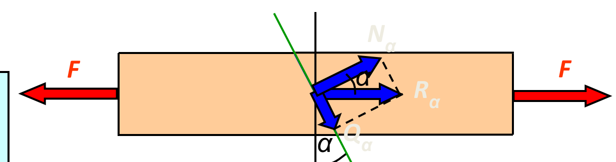
Как упоминалось ранее, в *общем случае нагружения* по граням выделенного элемента возникают нормальные и касательные напряжения. Последние, вызывая деформации сдвига, не влияют на линейные деформации, поскольку не изменяют длин сторон элемента. Используя *принцип независимости действия сил*, справедливый для изотропного и линейно упругого материала, можно записать обобщенный закон Гука, учитывающий одновременное действие нормальных напряжений по всем граням элемента:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)];$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)];$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)].$$

Напряжения по наклонным площадкам – При растяжении стержня в его поперечном сечении возникают только нормальные напряжения. Посмотрим какие напряжения возникают в сечении, не перпендикулярном оси стержня.



$$N_\alpha = R_\alpha\cos\alpha = F\cos\alpha;$$

$$Q_\alpha = R_\alpha\sin\alpha = F\sin\alpha.$$

…sα.

…нии равна … есть … а получаем:

$$\sigma_\alpha = \sigma\cos^2\alpha;$$

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha.$$

Анализ полученных соотношений показывает:
1. При α = 0 (наклонная площадка совпадает с поперечным сечением): $\sigma_\alpha = \sigma_z;\quad \tau_\alpha = 0.$
Касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения максимальны.
2. При α = 45° касательные напряжения максимальны, а нормальные напряжения равны касательным. $\sigma_\alpha = \frac{\sigma_z}{2};\quad \tau_\alpha = \frac{\sigma_z}{2}.$
3. При α = 90° (продольная площадка) нормальные и касательные напряжения обращаются в ноль (продольные волокна не давят друг на друга и не сдвигаются).
4. На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны по абсолютной величине.