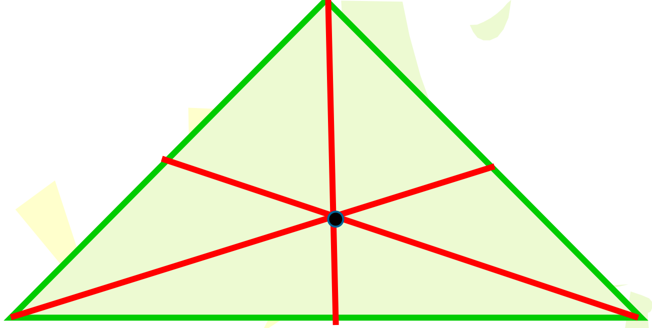
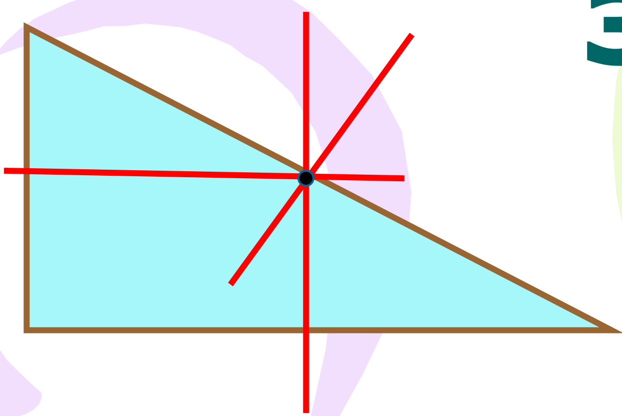
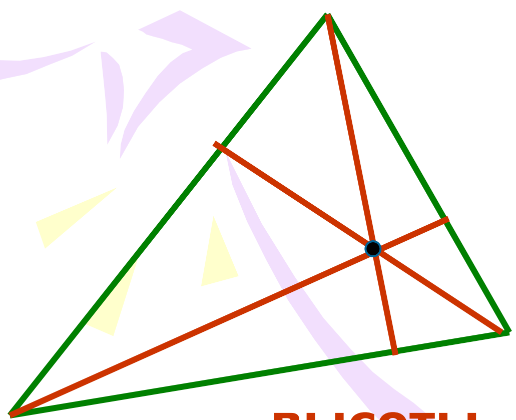
Четыре замечательные точки треугольника



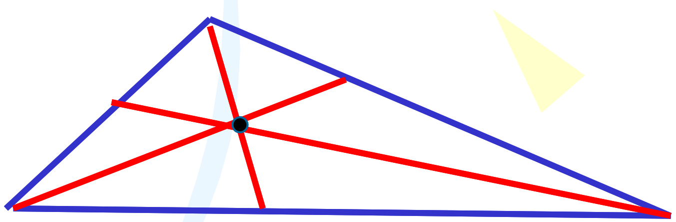
медианы



серединные перпендикуляры



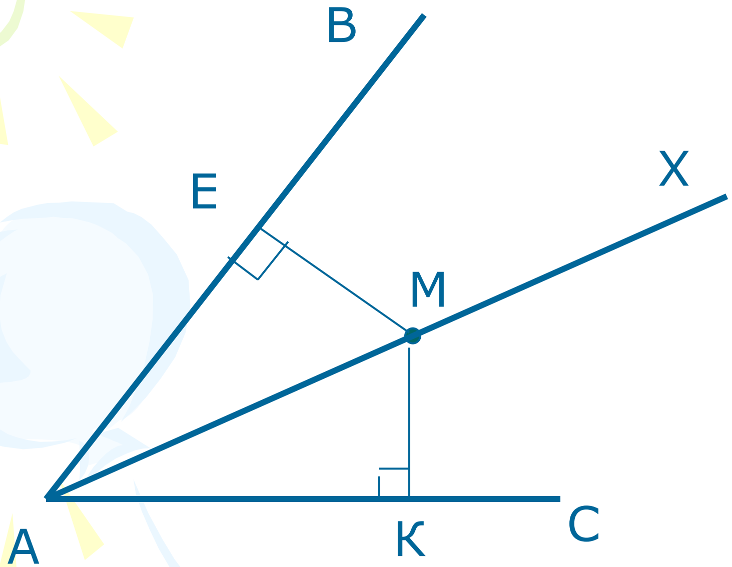
высоты



биссектрисы

Свойство биссектрисы неразвёрнутого угла

Теорема1. **Каждая точка биссектрисы неразвёрнутого угла равноудалена от его сторон.**



Дано: $\angle BAC$, AX – биссектриса,

M $\in$ AX, ME $\perp$ AB, MK $\perp$ AC

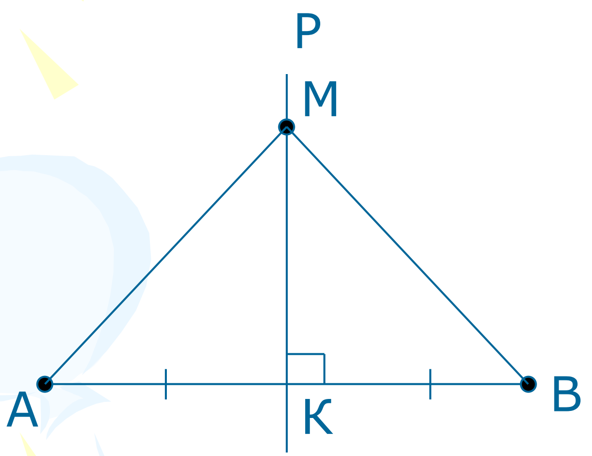
Доказать: ME = MK

Теорема 2 (обратная).**Точка, лежащая внутри неразвёрнутого угла и равноудалённая от его сторон, лежит на биссектрисе этого угла.**

Обобщённая теорема: биссектриса неразвёрнутого угла – множество точек плоскости, равноудалённых от сторон этого угла.

Серединный перпендикуляр к отрезку

Теорема 1. **Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от его концов.**



Дано: AB – отрезок,
PK – серединный перпендикуляр,
M є PK

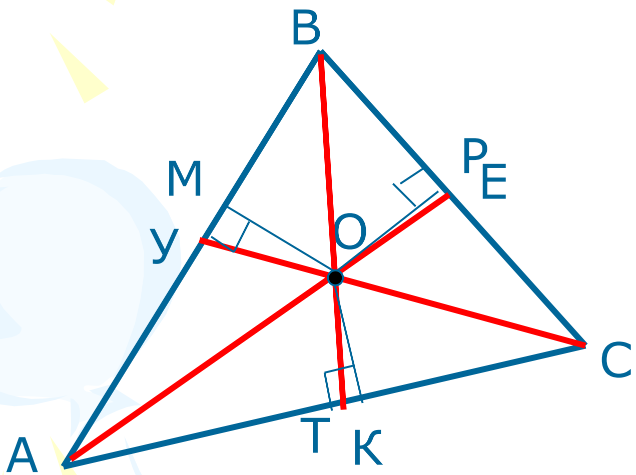
Доказать: MA = MB

Теорема 2. **Точка, равноудалённая от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.**

Обобщённая теорема: серединный перпендикуляр к отрезку – множество точек плоскости, равноудалённых от его концов.

Первая замечательная точка треугольника

Теорема. **Биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.**



Дано: $\triangle$ ABC, AE, BT – биссектрисы,
O - точка их пересечения

Доказать: CУ – биссектриса $\triangle$ ABC, O є CУ

Доказательство:

AE – биссектриса и OM $\perp$ AB, OK $\perp$ AC,
значит, OM = OK

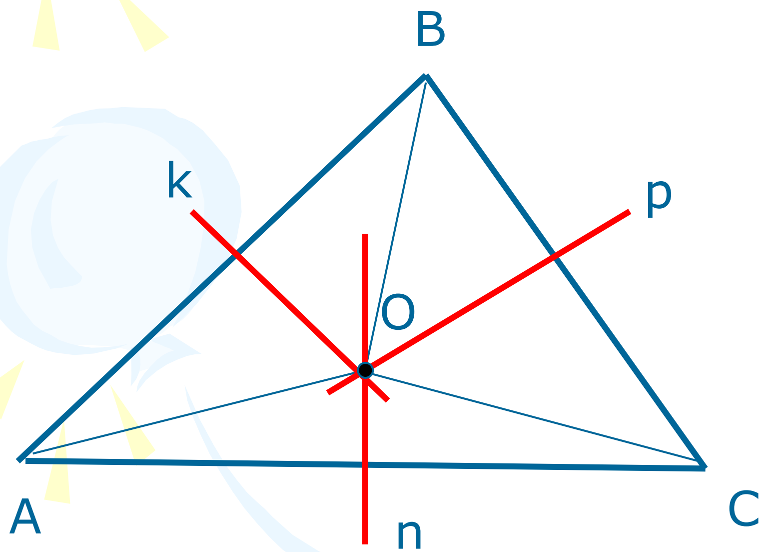
BT – биссектриса, и OM $\perp$ AB, OP $\perp$ BC, значит, OM = OP

Значит, OM = OK = OP и OP $\perp$ BC, OK $\perp$ AC, следовательно,
O лежит на биссектрисе угла ACB, т. е. CУ – биссектриса $\triangle$ ABC.

Значит, O – точка пересечения трёх биссектрис треугольника.

Вторая замечательная точка треугольника

Теорема. **Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в одной точке.**



Дано: △ABC, k,n – серединные перпендикуляры к сторонам треугольника,
O – точка их пересечения

Доказать: p – серединный перпендикуляр к BC, O є p

Доказательство:

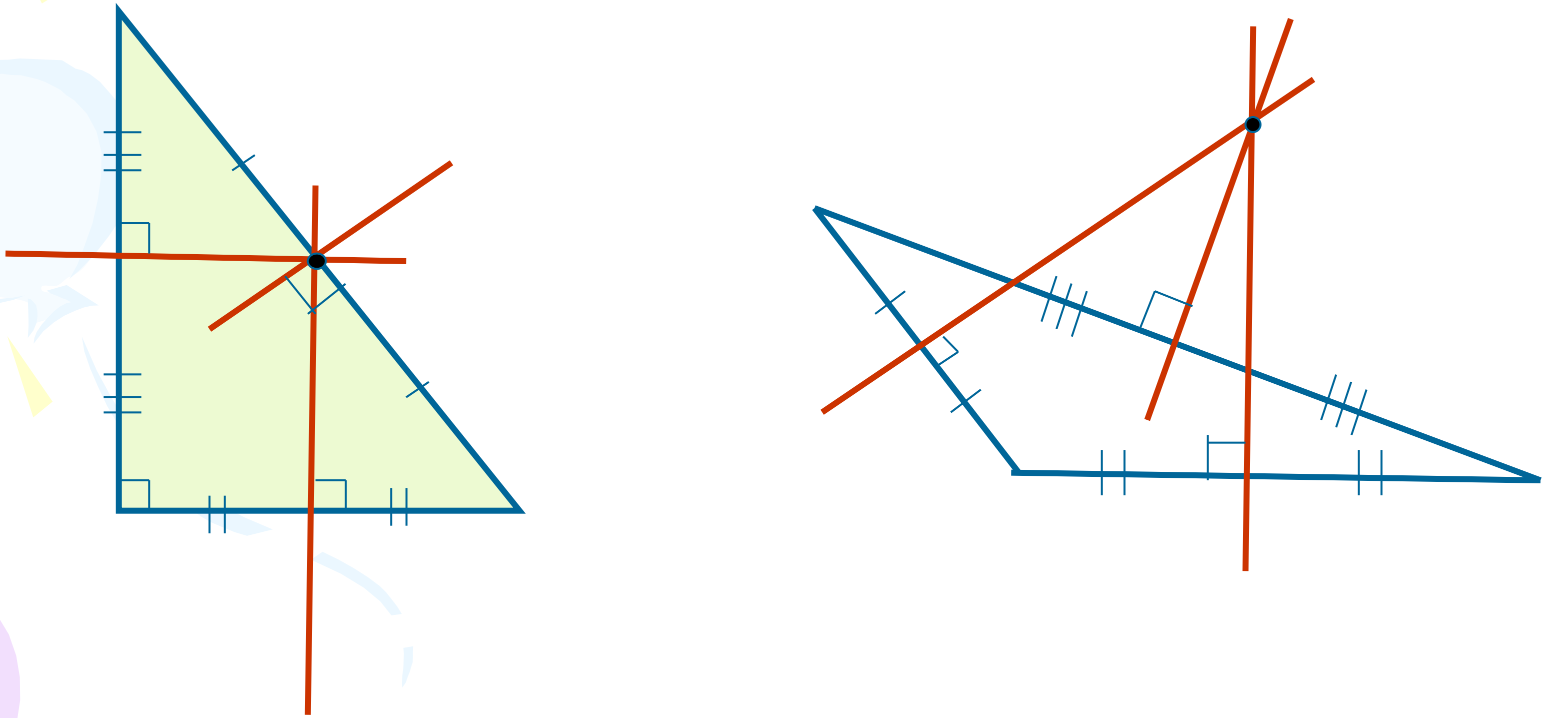
n – серединный перпендикуляр к AC и O є n, значит, OA = OC.

k – серединный перпендикуляр к AB и O є k, значит, OA = OB.
Следовательно, OA = OB =OC, значит, O лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC, т. е. на p.

Значит, O – точка пересечения серединных перпендикуляров k, n, p.

Вторая замечательная точка треугольника (продолжение)

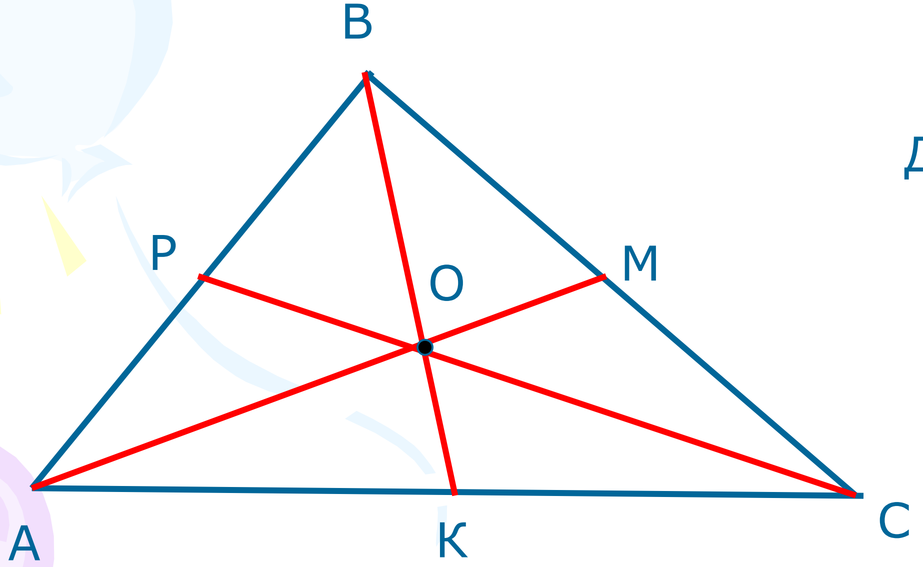
Ещё возможное расположение:



Третья замечательная точка треугольника

Теорема. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую в отношении 2: 1, считая от вершины.**

(центр тяжести треугольника – центроид)



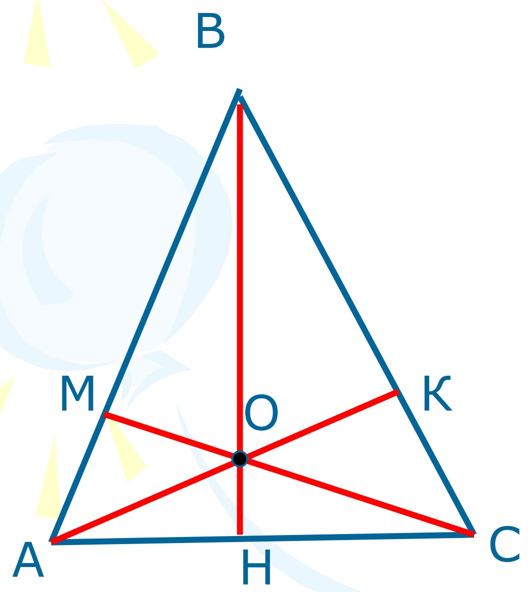
Дано: $\triangle$ ABC, AM,BK,CP - медианы

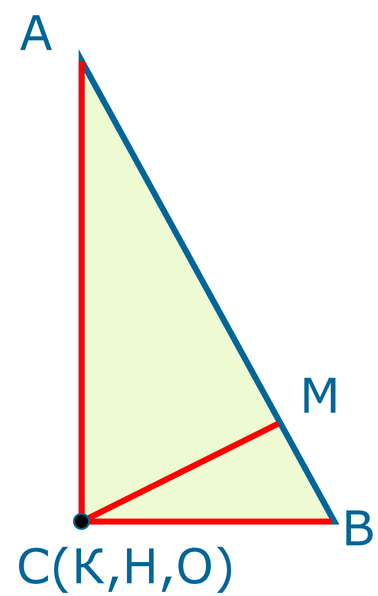
Доказать: AM $\cap$ BK $\cap$ CP = O

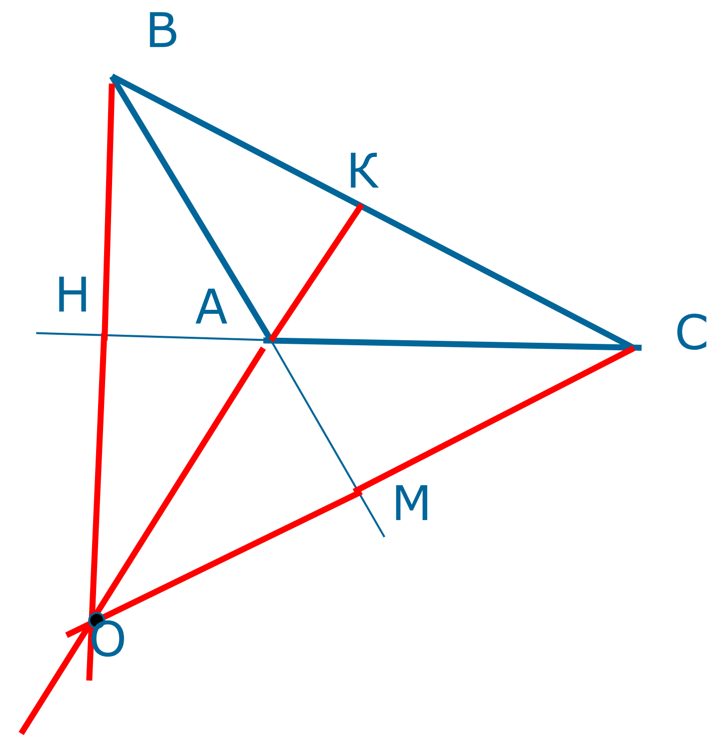
Доказательство проведено ранее: задача 1 п. 62.

Четвёртая замечательная точка треугольника

Теорема. **Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке**(ортоцентр).







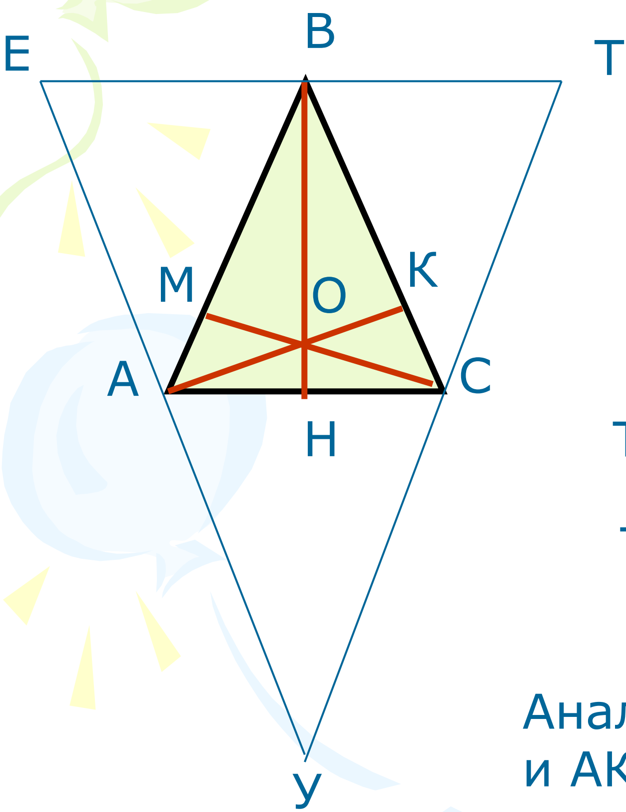
Дано: △ABC, AK, BH, CM - высоты

Доказать: O – точка пересечения высот или их продолжений.

Доказательство:

Через вершины В, А, С треугольника АВС

проведём ЕТ $\parallel$ АС, ЕУ $\parallel$ ВС, ТУ $\parallel$ АВ.



Получим:

АСВЕ – параллелограмм, значит, АС = ВЕ

АСТВ – параллелограмм, значит, АС = ВТ

Следовательно, ВЕ = ВТ, т. е. В – середина ЕТ.

Т.к. ВН – высота $\triangle$ АВС по условию, то ВН $\perp$ АС

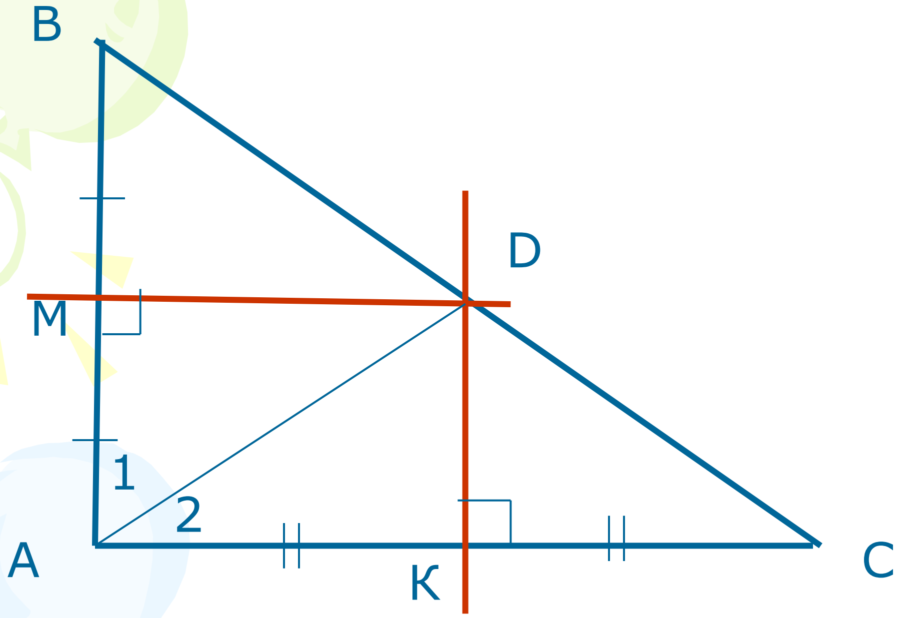
Т. к. ЕТ $\parallel$ АС по построению, значит, ВН $\perp$ ЕТ

Получим: ВН – серединный перпендикуляр к ЕТ.

Аналогично, СМ – серединный перпендикуляр к ТУ и АК - серединный перпендикуляр к УЕ.

Т. е. ВН, СМ, АК – серединные перпендикуляры к сторонам $\triangle$ ЕТУ, которые по ранее доказанному пересекаются в одной точке, значит, высоты $\triangle$ АВС пересекаются в одной точке.

Задача № 680.



Дано: $\triangle ABC$, $AM = BM$, $MD \perp AB$, $AK = KC$, $DK \perp AC$, $D \in BC$.

Доказать: D - середина BC, $\angle A = \angle B + \angle C$.

Доказательство:

а)

$\left.\begin{array}{l} AM = BM,\ MD \perp AB,\ D \in BC \text{ по условию, значит, } BD = AD \\ AK = KC,\ DK \perp AC,\ D \in BC \text{ по условию, значит, } AD = DC \end{array}\right\} BD = DC,$

следовательно, D – середина BC.

б) По доказанному $BD = AD$ и $AD = DC$, значит, треугольники ABD и ACD – равнобедренные, поэтому $\angle 1 = \angle B$, $\angle 2 = \angle C$.

$\angle BAC = \angle 1 + \angle 2 = \angle B + \angle C$, что и т. д.