Лекция 3
«Гидродинамика идеальной жидкость»

Содержание

1. Поток энергии.
2. Поток импульса.
3. Сила сопротивления при потенциальном обтекании.

1. Поток энергии.

Оценка скорости изменения энергии жидкости

Для единичного объема жидкости имеем:

$\mathbf{v}$ – скорость течения, ρ - масса жидкости, ερ - внутренняя энергия (ε - внутренняя энергия единицы массы жидкости)

кинетическая энергия

Энергия единицы объема жидкости w:
(плотность энергии)

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\varepsilon$$

Скорость изменения w

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\varepsilon\right) = \frac{\mathbf{v}^2}{2}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\mathbf{v}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t}$$

Из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho\mathbf{v})$$

Из уравнения Эйлера

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{\nabla p}{\rho} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}^2}{2}\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) - \mathbf{v}\nabla p - \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} \qquad \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = \frac{\rho}{2}\mathbf{v}\nabla(\mathbf{v}^2)$$

Из термодинамического определения энтальпии $\quad dh = Tds + dp/\rho \Rightarrow \nabla p = \rho\nabla h - \rho T\nabla s$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}^2}{2}\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) - \underbrace{\mathbf{v}\rho\nabla h - \frac{\rho}{2}\mathbf{v}\nabla(\mathbf{v}^2)}_{-\rho\mathbf{v}\nabla\left(h+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)} + \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{v}\rho T\nabla s$$

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}^2}{2}\mathrm{div}(\rho\mathbf{v}) - \mathbf{v}\rho\nabla\left(h+\frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) + \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{v}\rho T\nabla s}$$

Из I начала термодинамики $\quad d\varepsilon = Tds - pdV$

и т.к. ε соотнесена к единице массы, то здесь $V=1/\rho$ и

$$dV = -d\rho/\rho^2$$

$$w = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \rho \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \rho\varepsilon \qquad d(\rho\varepsilon) = \varepsilon d\rho + \rho d\varepsilon = \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) d\rho + \rho T ds$$

Так как по определению $\left(\varepsilon + \frac{p}{\rho}\right) = h$ - энтальпия, то имеем

$$d(\rho\varepsilon) = h d\rho + \rho T ds \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = h \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho T \frac{\partial s}{\partial t}$$

Опять из уравнения непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mathrm{div}(\rho \mathbf{v})$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} = -\mathbf{v} \nabla s$$

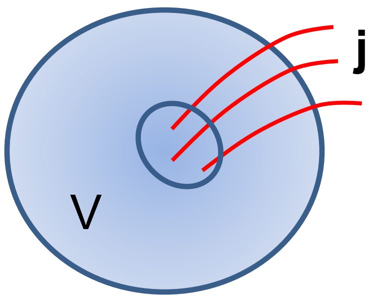
В самых общих условиях адиабатичности

$$\frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} = \boxed{-h \nabla(\rho \mathbf{v}) - \rho \mathbf{v} T \nabla s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}^2}{2} \mathrm{div}(\rho \mathbf{v}) - \mathbf{v}\rho \nabla \left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) + \frac{\partial(\rho\varepsilon)}{\partial t} + \mathbf{v}\rho T \nabla s$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}^2}{2}\nabla(\rho\mathbf{v}) - \mathbf{v}\rho\nabla\left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - h\nabla(\rho\mathbf{v}) - \cancel{\rho T\mathbf{v}\nabla s} + \cancel{\mathbf{v}\rho T\nabla s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\mathbf{v}^2}{2}\nabla(\rho\mathbf{v}) - \mathbf{v}\rho\nabla\left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right) - h\nabla(\rho\mathbf{v}) = -\left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)\nabla(\rho\mathbf{v}) - (\mathbf{v}\rho)\nabla\left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)$$



Закон сохранения энергии в локальной форме

$$\boxed{-\rho\mathbf{v}\nabla\left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)}$$

$$\boxed{\mathbf{j}_w = \rho\mathbf{v}\left(h + \frac{\mathbf{v}^2}{2}\right)}$$

Уменьшение физической величины q в объеме связывают с существованием соответствующего ей потока **j**: $\partial q/\partial t = -\nabla \mathbf{j}$

$\mathbf{j}_w$ - вектор плотности потока энергии (вектор Умова)

Учитывая, что $h = \left(\varepsilon + \frac{p}{\rho} \right)$ имеем $\mathbf{j}_w = \mathbf{v} \left(\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2} + \rho\varepsilon + p \right) = \mathbf{v}w + p\mathbf{v}$

Плотность потока энергии определяется из собственно переноса энергии текущей жидкостью $\mathbf{v}w$ и дополнительного вклада в поток, вносимого работой сил давления p над жидкостью $p\mathbf{v}$

В случае стационарных течений $\frac{\partial w}{\partial t} = 0$

Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{\partial w}{\partial t} = 0 \Rightarrow \nabla \mathbf{j}_w = 0$$ т.е.

$$\nabla[\mathbf{v}(p + \rho\varepsilon + \rho\mathbf{v}^2/2)] = (p + \rho\varepsilon + \rho\mathbf{v}^2/2)\nabla\mathbf{v} + \mathbf{v}\nabla(p + \rho\varepsilon + \rho\mathbf{v}^2/2) = 0$$

Для несжимаемой жидкости имеем дополнительно $\nabla\mathbf{v} = 0$

и т.к. $\mathbf{v} \neq 0$ $\Rightarrow$ $\nabla(p + \rho\varepsilon + \rho\mathbf{v}^2/2) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{p + \rho\varepsilon + \rho\mathbf{v}^2/2 = const}$

При $\varepsilon = gh$ (однородное поле тяготения) получаем закон Бернулли в его классическом виде

$$\boxed{p + \rho g h + \rho\mathbf{v}^2/2 = const}$$

2. Поток импульса.

Импульс единицы объема $\rho\mathbf{v}$ или в тензорных обозначениях ρv_i

Скорость изменения импульса $$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i$$

Уравнение непрерывности $$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\boxed{\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}}$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \boxed{-v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}}$$

Уравнение Эйлера

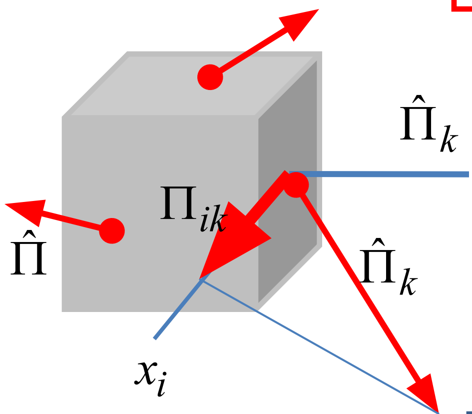
$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\rho v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} - v_i\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k}$$

Сумма этих членов равна $$\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k) - \delta_{ik}\frac{\partial p}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k + p\delta_{ik})$$

Величина $\boxed{\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik}}$ представляет собой симметричный тензор 2-го ранга



$\hat{\Pi}_k$ поток импульса через единичную площадку $\perp$-ую оси x_k

Π_{ik} составляющая потока импульса $\hat{\Pi}_k$ по направлению оси x_i

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_k}\Pi_{ik}}$$

Выражение для скорости импульса имеет типично дивергентный вид.

Поэтому величина под знаком дивергенции имеет смысл потока – - *плотности потока импульса*. Однако в отличие от энергии импульс − векторная величина и дивергенции подвергается не вектор потока $\mathbf{j}_w$, как в случае закона сохранения энергии

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\nabla \mathbf{j}_w$$

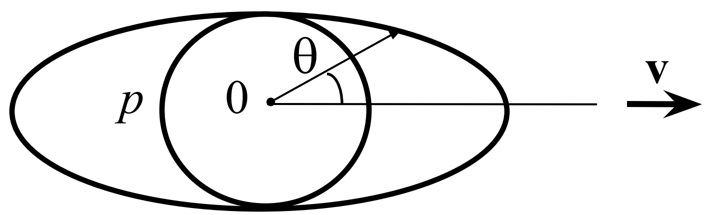
, а тензор – тензор плотности потока импульса Π_{ik}

В произвольном направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{n}$, величина тензора Π_{ik} будет определяться сверткой $\Pi_{ik} n_k$

$$\Pi_{ik} n_k = p\delta_{ik} n_k + \rho v_i v_k n_k = p n_i + \rho v_i v_k n_k$$

Данная величина является вектором и может быть записана в явном виде

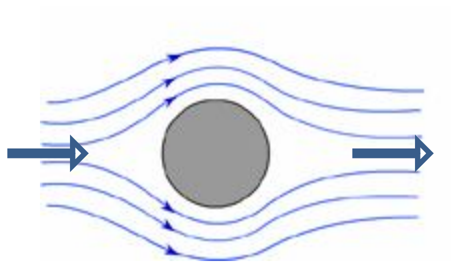
$$\mathbf{\Pi} = p\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})$$



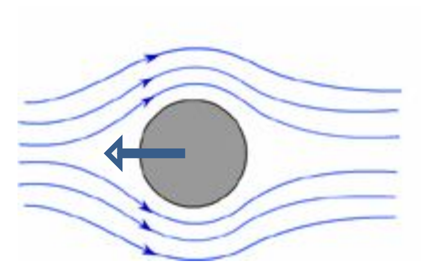
Характеристическая поверхность тензора Π_{ik} получается сверткой $\Pi_{ik} n_k n_i = \mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{n} = p + \rho v^2 \cos^2 \theta$ и является эллипсоидом вращения вокруг направления вектора скорости.

3. Сила сопротивления при потенциальном обтекании.

1) Эквивалентность задач об обтекании тела и движении тела в жидкости (принцип механической относительности)



тело неподвижно
набегает поток жидкости



тело движется в
жидкости

2) В идеальной несжимаемой жидкости движется тело. Интересуемся распределением скоростей на достаточно больших расстояниях от движущегося тела. Обтекание тела жидкостью потенциально и решение задачи (в системе координат, привязанной к телу, с началом внутри тела) будет удовлетворять уравнению Лапласа $\nabla^2\varphi = 0$

3) Общие замечания относительно решения

• на большом (бесконечном) удалении от тела жидкость покоится и $\varphi(r \to \infty) \to 0$

• математически задача аналогична электростатической задаче для внешней области и потенциал представляется мультипольным разложением вида

$$\varphi = \frac{a}{r} + \mathbf{A}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) + b_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots$$

• a должно быть $\equiv 0$ иначе существует радиальный поток через замкнутую поверхность, охватывающую тело, что противоречит условию несжимаемости жидкости

• на больших расстояниях r достаточно ограничиться дипольным приближением

$$\varphi \cong \mathbf{A}\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}}{r^2}$$

Здесь $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении радиус-вектора.

4) Оценка кинетической энергии W жидкости, индуцированной движением тела

По определению $\mathbf{v}=\nabla\phi$ имеем

$$\mathbf{v} = (\mathbf{A}\cdot\nabla)\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{3(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}-\mathbf{A}}{r^3}$$

($\mathbf{A}$ - аналог дипольного момента, $\mathbf{v}$ - аналог напряженности)

$$W = \frac{\rho}{2}\int_V \mathrm{v}^2 dV = \frac{\rho}{2}\int_V u^2 dV + \frac{\rho}{2}\int_V (\mathbf{v}+\mathbf{u})(\mathbf{v}-\mathbf{u})dV$$

$\mathbf{u}$ − скорость движения тела, V − объем жидкости

После преобразований имеем

$$\boxed{W = \frac{\rho}{2}(4\pi\mathbf{A}\cdot\mathbf{u} - V_0 u^2)}$$

Вектор $\mathbf{A}$ определяется размерами и формой тела.
Для этого нужно построить решение граничной задачи.
Однако общий характер связи $\mathbf{A}$ с $\mathbf{u}$ можно установить, не прибегая к решению граничной задачи.

5) Тензор присоединенных масс и полный импульс жидкости.

Вследствие линейности связи $\mathbf{A}$ и ϕ, и линейности граничных условий $W \propto \mathbf{u}^2$ и в общем случае можно принять

$$W = \frac{m_{ik}u_iu_k}{2}$$ m_{ik} - тензор присоединенных масс

При бесконечно малых изменениях энергия W и импульс жидкости $\mathbf{P}$ связаны между собой равенством

$$dW = \mathbf{u}d\mathbf{P}$$

Отсюда вытекает, что $\boxed{P_i = m_{ik}u_k}$

Передаваемый за ед. времени от тела жидкости импульс по 3 закону Ньютона равен с изменением знака силе реакции со стороны жидкости на тело, т.е.

$$\boxed{F_i = -\frac{dP_i}{dt} = -\frac{d}{dt}(m_{ik}u_k)}$$

6) Выводы

- если тело в процессе движения не меняет свою форму и ориентацию, то $m_{ik} = const$ и сила реакции отсутствует, если движение тела равномерное (парадокс Даламбера)
- определение импульса через посредство коэффициентов присоединенных масс приводит к уравнению движения тела в жидкости под действием внешней силы **f** вида

$$\frac{du_k}{dt}(M\delta_{ik} + m_{ik}) = f_i$$

Видно, что тело в жидкости, как бы увеличивает свою массу M на величину m_{ik}, что и явилось поводом для введения термина «присоединенная масса».