Курс: Элементы компьютерной математики

Лектор – Склярова Елена Александровна

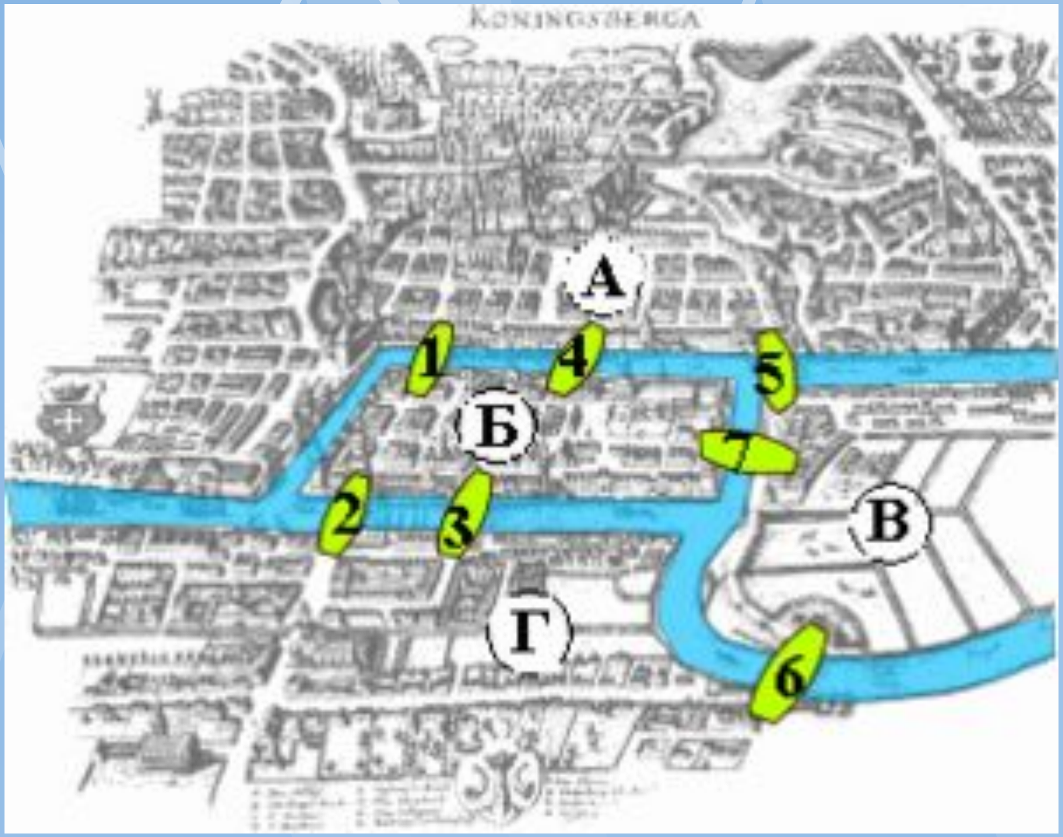
Лекция №10

Тема: Элементы теории графов

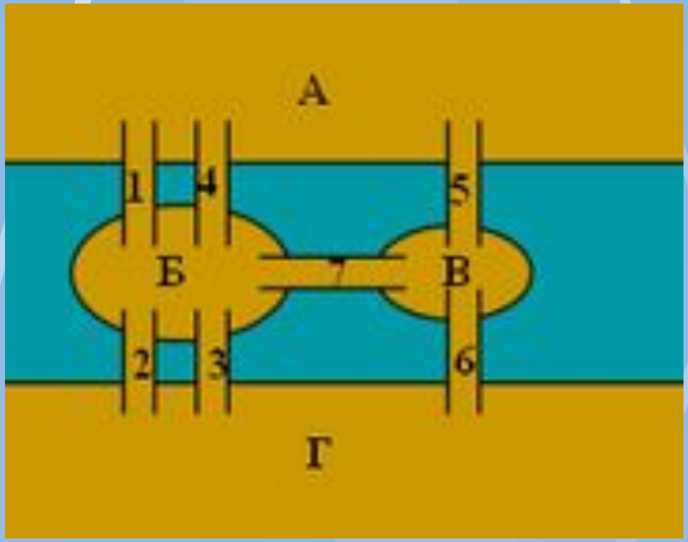
1. Общие понятия
2. Маршруты. Циклы. Связность графов
3. Пленарные графы
4. Ориентированные графы (орграфы)
5. Задачи на графах

История семи мостов Кёнигсберга

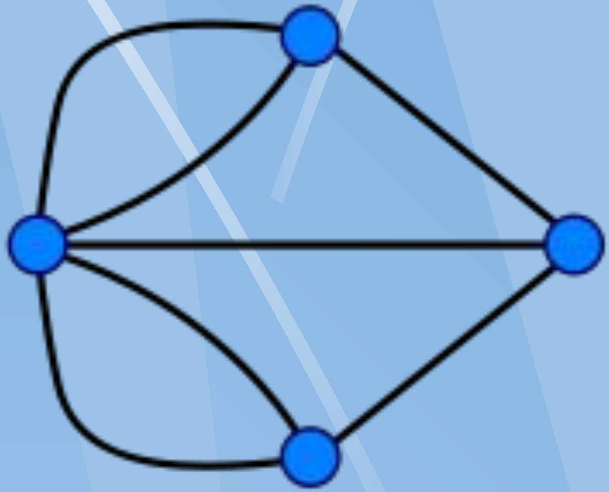
Старинная карта Кёнигсберга.
Части города:
А — Альтштадт,
Б — Кнайпхоф,
В — Ломзе,
Г — Форштадт.
Цифрами обозначены мосты (в порядке строительства):
1 — Лавочный,
2 — Зелёный,
3 — Рабочий,
4 — Кузнечный,
5 — Деревянный,
6 — Высокий,
7 — Медовый



Семь мостов Кёнигсберга



Упрощённая схема мостов Кёнигсберга.



Граф кёнигсбергских мостов

Выводы Эйлера

- Число нечётных вершин (вершин, к которым ведёт нечётное число рёбер) графа всегда чётно. Невозможно начертить граф, который имел бы нечётное число нечётных вершин.
- Если все вершины графа чётные, то можно, не отрывая карандаша от бумаги, начертить граф, при этом можно начинать с любой вершины графа и завершить его в той же вершине.
- Граф с более чем двумя нечётными вершинами невозможно начертить одним росчерком.

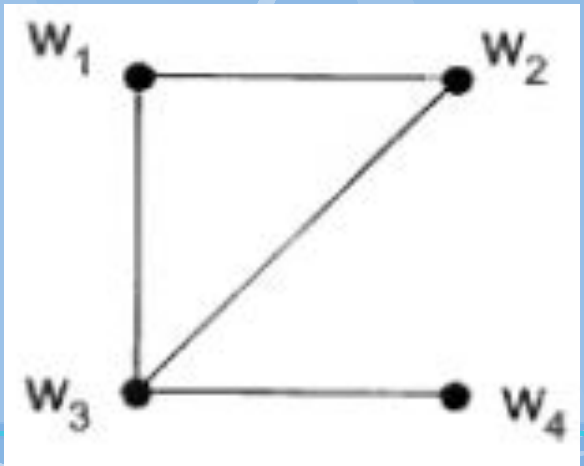
Леонард Эйлер
1707-1783

Общие понятия

Граф определяется как пара (двойка) множеств – множество вершин W и множество ребер L:

$$G = (W, L).$$

Вершины графа изображаются точками, ребра – линиями связи любой формы (граф – объект не геометрический, а **топологический**)



Общие понятия

Количество вершин графа, т.е. мощность (количество элементов) множества W, – это его порядок n:

$$|\mathbf{W}| = \mathbf{n}.$$

Любой граф может быть однозначно задан с помощью **матрицы смежности MS:**

$$MS = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Элемент этой матрицы ms_{ij} – нуль, если соответствующие вершины (w_i, w_j) непосредственно не связаны, и единица – в противном случае.

Общие понятия

Свойства матрицы смежности:

- матрица квадратная порядка *n*;
- матрица бинарная (двоичная);
- на главной диагонали MS только нули (в графе не должно быть петель);
- матрица симметрична относительно главной диагонали.

Общие понятия

Графы, которые здесь рассматриваются, – «обыкновенные». Есть еще мультиграфы (рис.2 а), когда смежные вершины могут быть связаны несколькими ребрами (имеет смысл для отмеченных графов), и псевдографы (рис.2 б), где есть петли и, возможно, расщепление ребер).

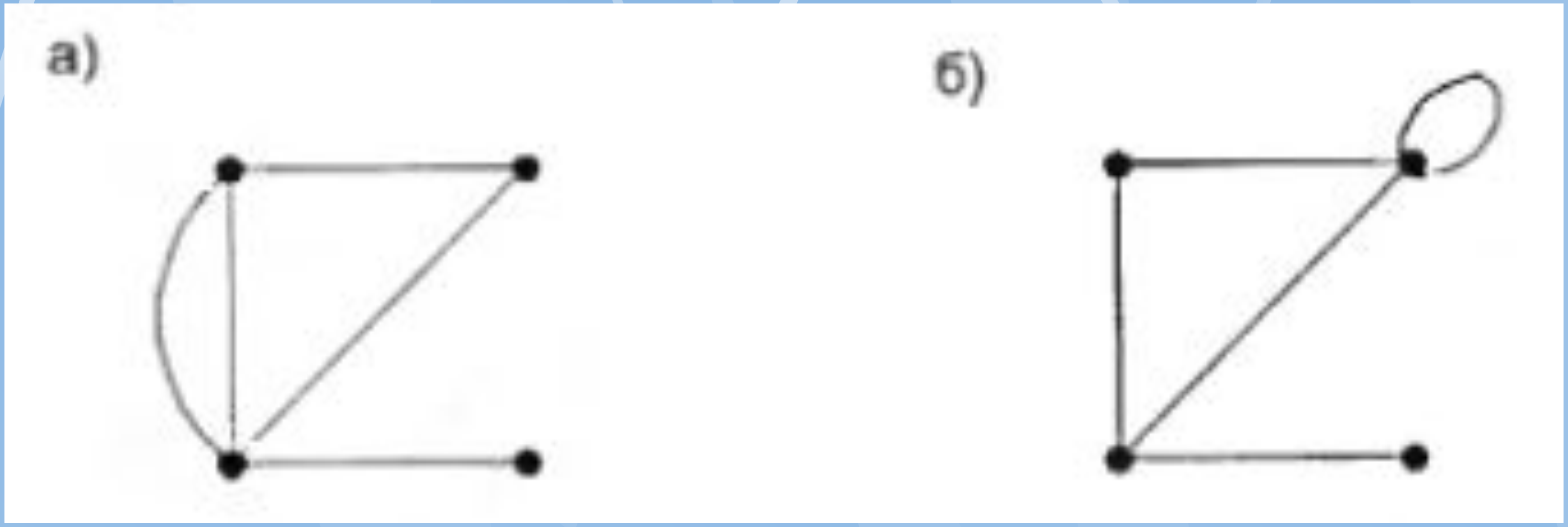


Рис.2 Мультиграф (а) и псевдограф (б)

Общие понятия

Вторая разновидность матричного представления графов матрица инциденций MI:

$$MI = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Строки в MI отображают ребра и вершины, с ними связанные (им инцидентные). Номера строк (ребер) (рис.1): 1 ~ (w_1, w_2), 2 ~ (w_1, w_3), 3 ~ (w_2, w_3), 4 ~ (w_3, w_4).

Общие понятия

Свойства матрицы инциденций:

- в общем случае матрица прямоугольная, порядка |L| x |W|;
- матрица бинарная (0, 1);
- в каждой строке матрицы MI ровно 2 единицы, они указывают инцидентные вершины; в свою очередь, строки указывают ребра, инцидентные соответствующим вершинам.
- матрицы инциденций используются редко.

Общие понятия

Удаляя вершины (не все) и ребра из некоторого графа, получают **подграф**. А сам граф именуется надграфом. Если вершины не удаляются, получают **истинный подграф.**

Пример такого подграфа для случая на рис.1 – на рис.3.

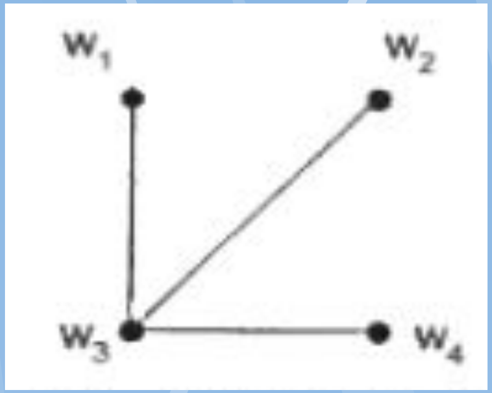


Рис. 6.3. Остовный подграф

Отношение «быть подграфом» распространяется и на сам граф (аналогично понятиям «множество» – «подмножество»).

Общие понятия

Графы **эквивалентны**, если они, конечно, имеют одинаковый порядок и одинаковый характер связей – соответствующие вершины в обоих графах или связаны каким-то ребром или же не связаны вовсе (рис. 4).

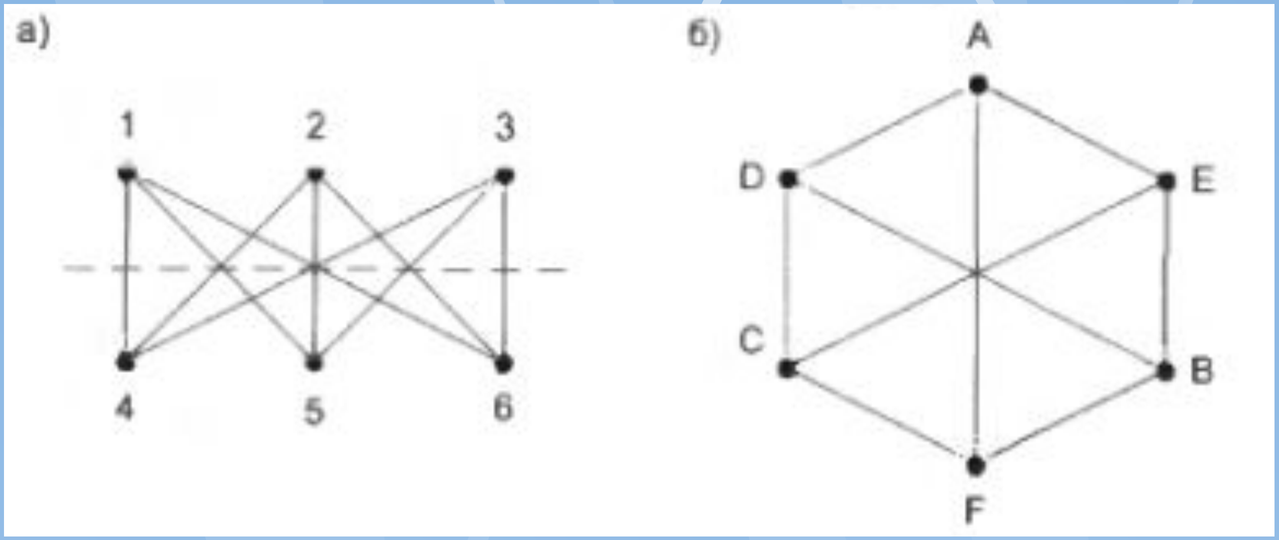


Рис.4.Эквивалентные графы

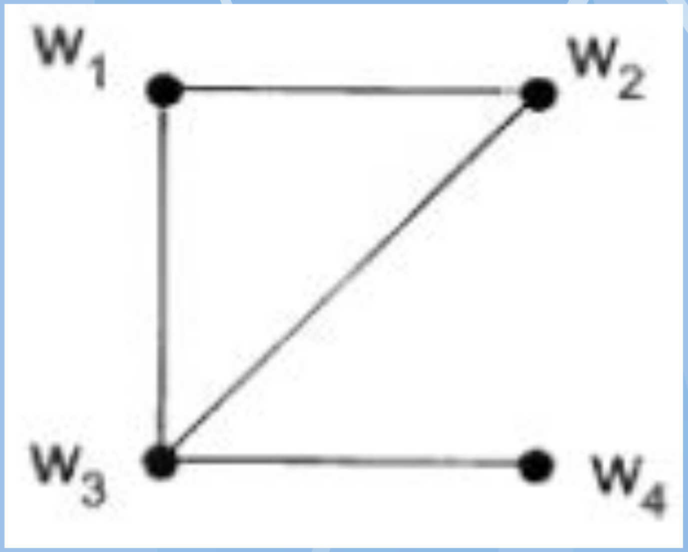
Соответствие между вершинами графов: 1 ~ A, 2 ~ B, 3 ~ C, 4 ~ D, 5 ~ E, 6 ~ F.

Общие понятия

Степень вершины графа – количество прилежащих ребер.

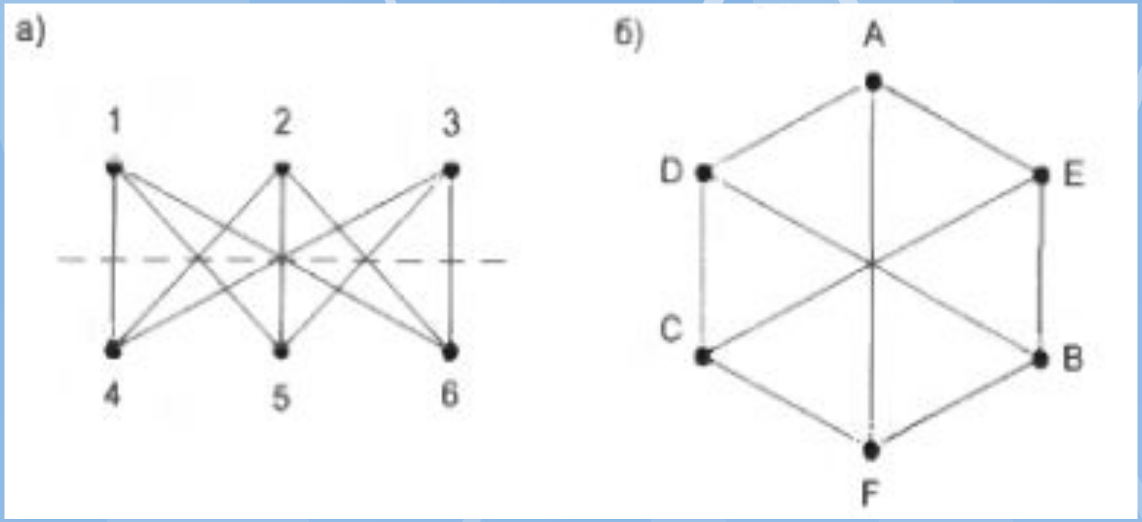
Например:

$б_{w1} = 2$, $б_{w2} = 2$, $б_{w3} = 3$, $б_{w4} = 1$.



Общие понятия

Если все вершины имеют одинаковую степень, граф – регулярный такой-то степени. На рис.4 представлены регулярные графы степени 3.



Общие понятия

Теорема о сумме степеней всех вершин графа. В символической форме:

$$\sum_i б_i = 2|L|$$

Т.е., сумма эта равна удвоенному количеству ребер. Действительно, каждое ребро учитывается слева (в сумме $\sum_i$) два раза.

Общие понятия

Теорема о количестве вершин нечетной степени: количество таких вершин имеет значение четного числа.

Действительно, сумму степеней всех вершин графа можно разбить на 2 части, суммируя отдельно степени четные и нечетные:

$$\sum_{i} б_i = \sum_{чет} б_i + \sum_{нечет} б_i = 2|L|$$

Отсюда следует, что сумма нечетных степеней – число четное, а это может быть только при четном числе нечетных слагаемых.

Общие понятия

В задачах на графах часто используются **помеченные** графы. Отмечать (помечать) можно как вершины, так и ребра (рис. 5).

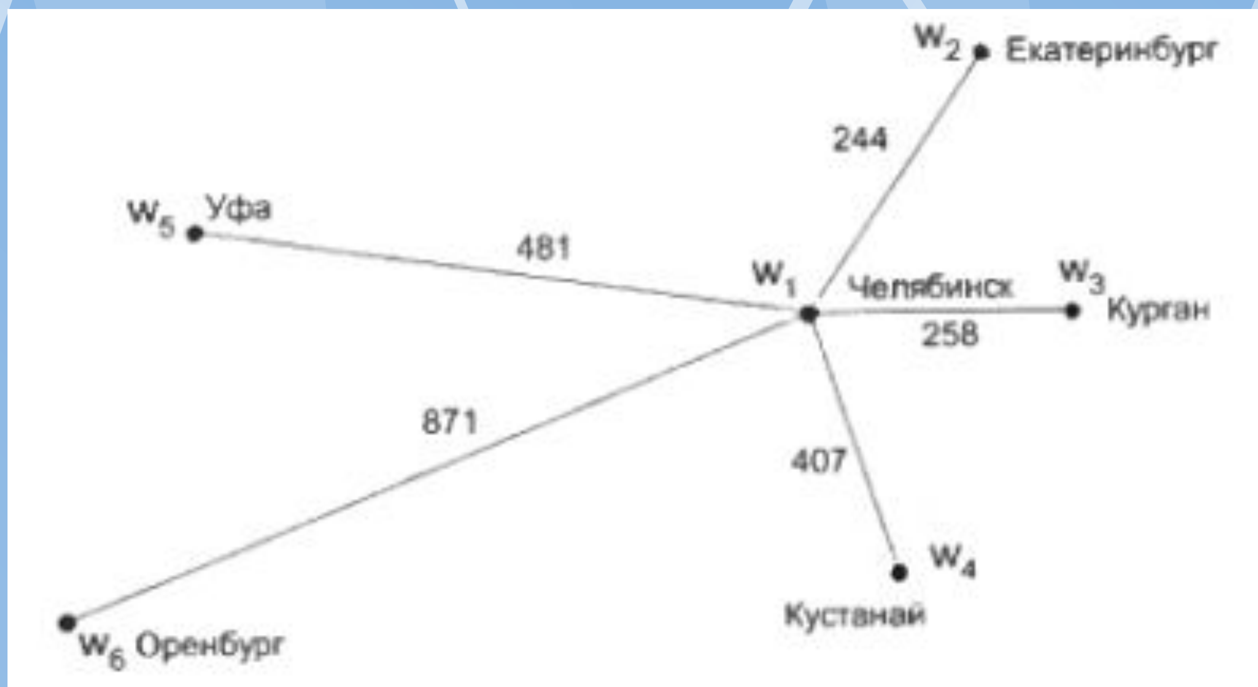


Рис.5. Помеченный граф

В графе рис.5 ребра отмечены расстояниями по железной дороге (км).

Общие понятия

Полный граф имеет максимально возможное количество ребер, обозначается K_n (рис.6)

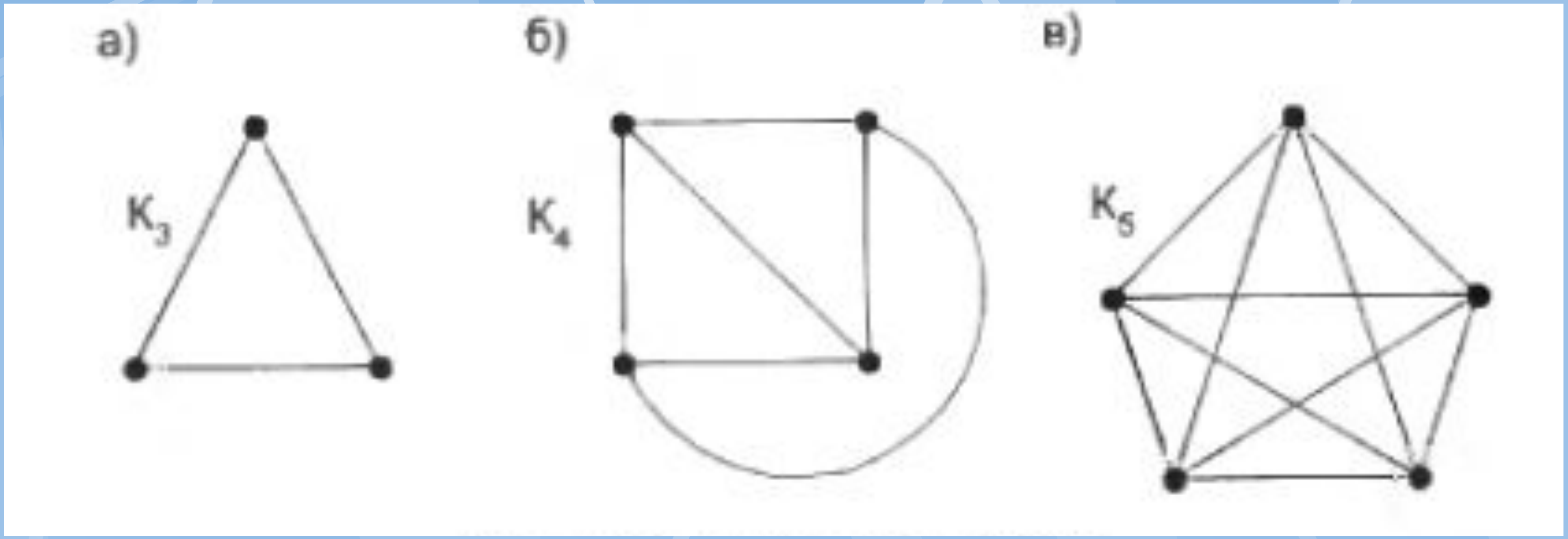


Рис.6. Полные графы

Общие понятия

В двудольных графах допускаются связи только между вершинами разных долей (рис.7).

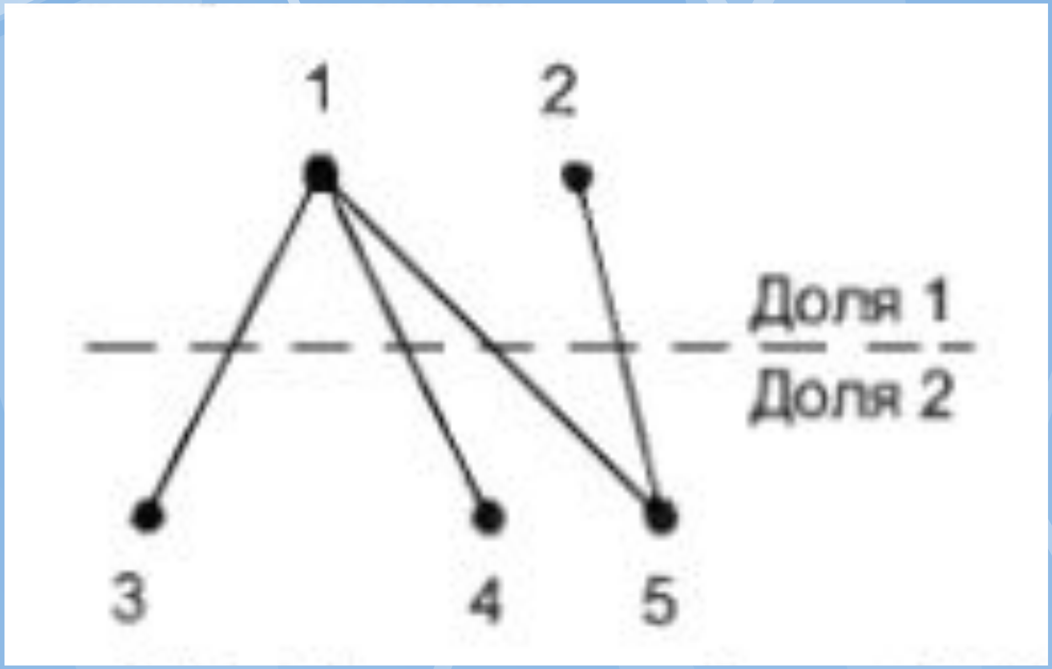
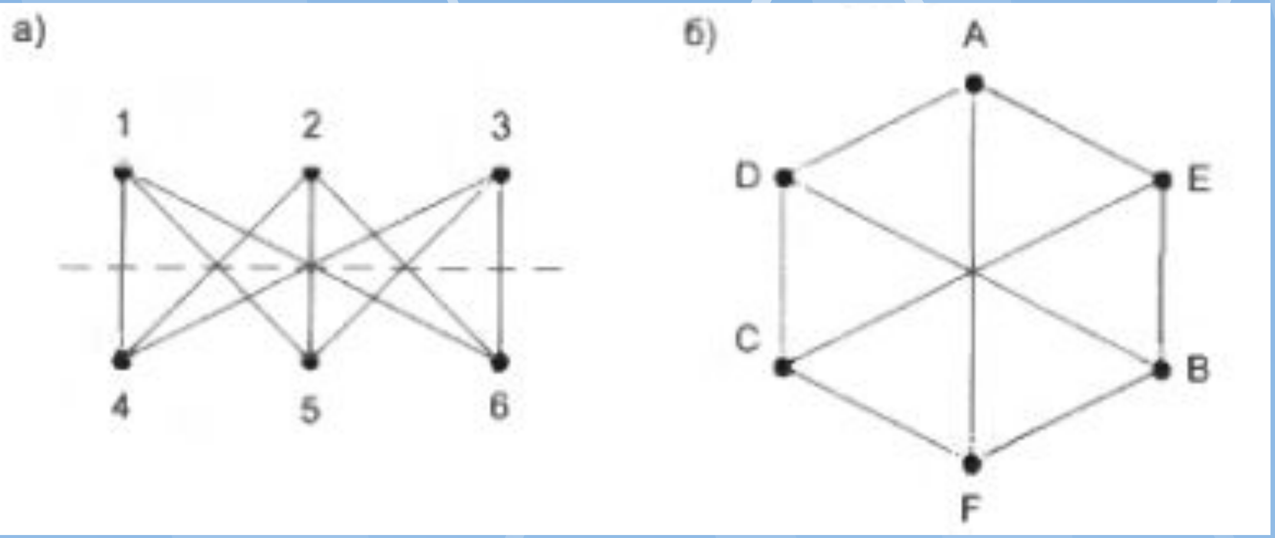


Рис.7. Двудольный граф $G_{2,3}$

Общие понятия

Если в двудольном графе количество ребер максимально возможное, он – **полный двудольный граф**. На рис.4 представлен такой граф, это $К_{3,3}$.



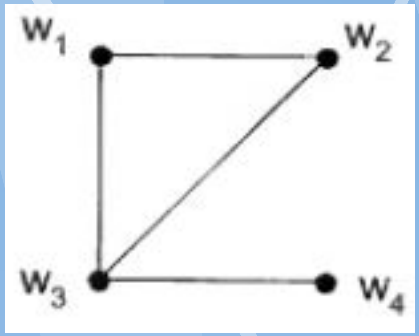
Маршруты. Циклы. Связность графов

Маршрут в графе – это последовательность проходимых ребер и вершин. Например, в графе рис.1 возможны такие маршруты:

$< w_1, w_2, w_3, w_1 >$,

$< w_1, w_2, w_1 >$.

$< w_1, w_2, w_3, w_2, w_1 >$



Как видно, ребра и вершины могут повторяться.

Частный случай маршрута – **путь**, где повторение ребер не допускается.

Маршруты. Циклы. Связность графов

Маршруты и пути могут быть разомкнутые и замкнутые (**циклы**).

Циклы могут быть простые и сложные.

Сложные циклы содержат внутри простые циклы. Возможно и частичное перекрытие циклов.

Маршруты. Циклы. Связность графов

Длина маршрута (пути) – это количество проходимых ребер.

В примере маршруты имеют длину соответственно 3, 2 и 4 (единицы)

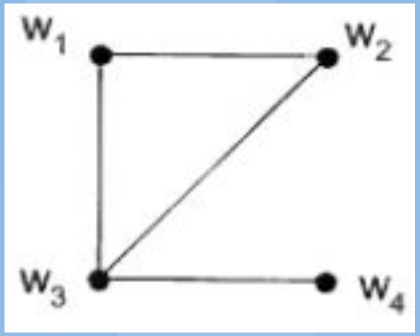
Граф без циклов – **ациклический**.

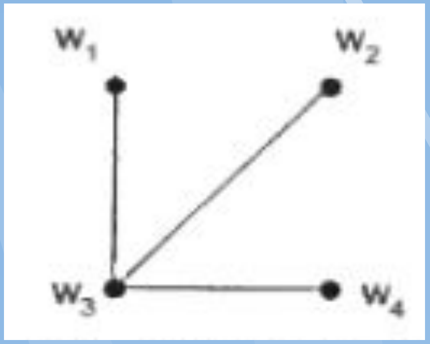
В **связном графе** любые две вершины взаимно достижимы, т. е. существует хотя бы один маршрут из любой вершины в любую другую

Маршруты. Циклы. Связность графов

Дерево – это связный ациклический граф (рис 6.7). В **корневом дереве** одна из вершин специально выделяется и именуется **корень**.

Остовное дерево – это остовный подграф, являющийся деревом (рис.1, 3).





Маршруты. Циклы. Связность графов

Теорема о количестве маршрутов заданной длины (рассматривается без доказательства):

Количество маршрутов длины k из вершины w_i в вершину w_j определяется значением элемента i j k-й степени матрицы смежности, т.е

$$Q_{марш}(k) = MS_{ij}^{k}$$

Маршруты. Циклы. Связность графов

Действительно, MS в 1-й степени (просто MS, п. 6.1) определяет все маршруты длины 1. Их может быть (1) или ни одного (0). Найдем теперь 2-ю степень MS для графа рис.1.

$$MS^2 = MS \times MS = \begin{array}{cc} {}_{i}\diagdown^{j} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \times \begin{array}{cc} {}_{j}\diagdown^{k} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} =$$

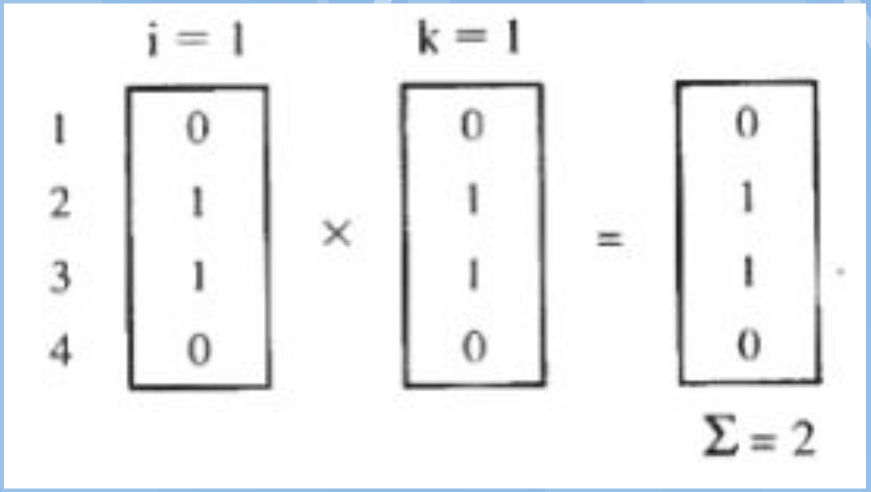
$$= \begin{array}{cc} {}_{i}\diagdown^{k} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{bmatrix} \boxed{2} & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Маршруты. Циклы. Связность графов

Произведение матриц (в общем случае прямоугольных, IxJ на JxK) определяется так.

Берется строка i (например, I=1), поворачивается на 90 градусов по часовой стрелке, т.е. переводится в вертикальное положение.

Затем она поочередно накладывается на каждый столбец матрицы множителя (например, k=1). Образуются попарные произведения, и они суммируются (рис.8).



Получается значение элемента MS_{ik}^{2} (т.е. $MS_{11}^{2} = 2$).

Маршруты. Циклы. Связность графов

ИЛИ

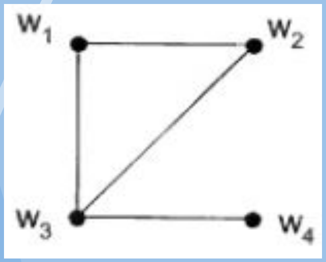
Внутренняя структура строки i = 1 указывает на то, что должны суммироваться значения элементов матрицы-множителя, размещенных в строках ее 2 и 3. Что и дает значения элементов строки 1 результата: 2, 1, 1, 1.

Следующая строка результата, очевидно, получается как аналогичная сумма элементов строк 1 и 3, и т.д.

Кстати, матрица MS^2 также симметрична.

Маршруты. Циклы. Связность графов

Проверим, действительно ли, например, существуют 2 маршрута длины 1 из w_1 в w_1.



$<w_1, w_2, w_1>$,

$<w_1, w_3, w_1>$.

Найдем еще и 3-ю степень MS:

$$MS^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & \boxed{4} & 1 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

Маршруты. Циклы. Связность графов

Проверим существование 4 маршрутов $w_2 \to w_3$ длины 3

$$\langle w_2, w_1, w_2, w_3 \rangle,$$
$$\langle w_2, w_3, w_1, w_3 \rangle,$$
$$\langle w_2, w_3, w_2, w_3 \rangle,$$
$$\langle w_2, w_3, w_4, w_3 \rangle.$$

Теорема о количестве маршрутов доказывается по индукции (полная математическая индукция).

Маршруты. Циклы. Связность графов

На основе степеней ($k = 0, \ldots, n - 1$) матрицы смежности строится **матриц связности** MSW.

Это квадратная, порядка n, бинарная матрица, симметричная относительно главной диагонали.

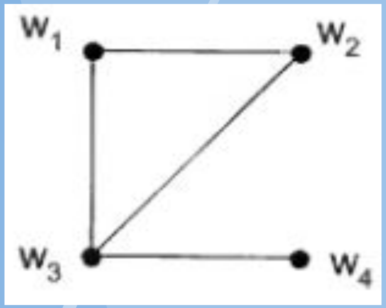
Элемент MSW_{ij} указывает на наличие (1) или отсутствие (0) маршрута любой длины из вершины w_i в вершину w_j.

$$MSM = \sum_{k=0}^{n-1} MS_{бин}^{k}$$

Индекс «бин» означает – все матрицы MS^k бинаризованы, т. е. преобразованы по правилу, «нуль – не нуль».

Маршруты. Циклы. Связность графов

В примере для графа рис.1:



$$MSM = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Маршруты. Циклы. Связность графов

Теорема о связности графа:

Для связности графа, т.е. для взаимной достижимости любых его двух вершин, необходимо и достаточно, чтобы матрица связности MSW была полностью единичной.

Доказательство теоремы очевидно. Остается выяснить, почему предельное значение показателя степени MS, т.е. максимальная длина маршрута, n – 1.

Маршруты. Циклы. Связность графов

Из рис. 9 видно, что в самом неблагоприятном случае это значение обеспечивает достижение самой удаленной вершины:

$$1\langle w_1, w_2, w_3, w_4\rangle = 3.$$

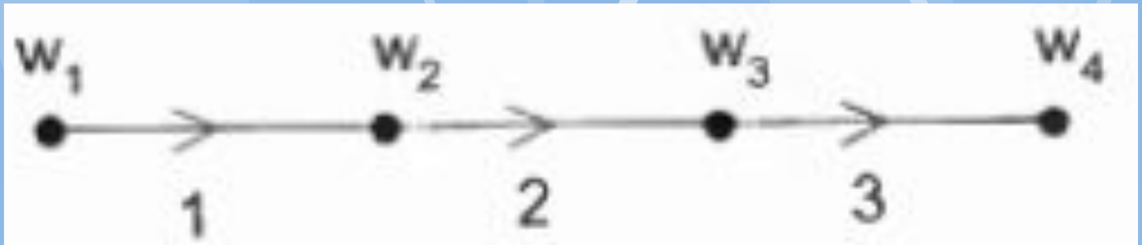


Рис.9. Самый длинный маршрут-путь

Маршруты. Циклы. Связность графов

Если граф несвязный, он распадается на **компоненты связности** (рис.10).

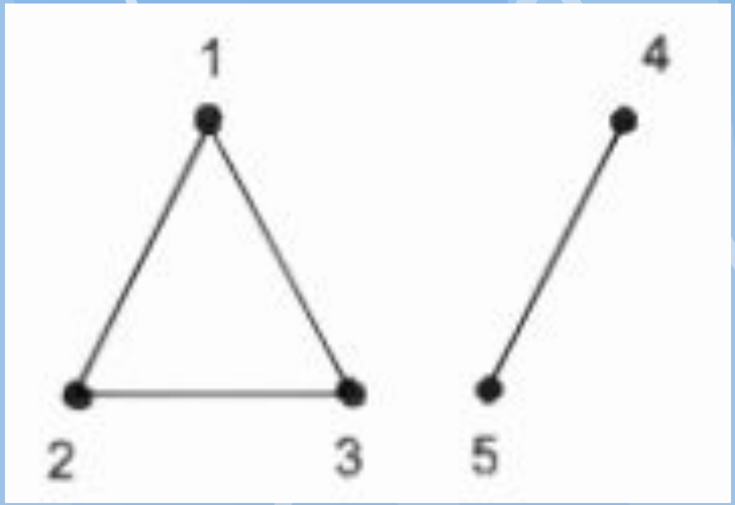


Рис.10. Несвязный граф

В случае, если компоненты связности – деревья, получается **лес**. Если к тому же это остовный подграф, то – остовный лес.

Лекция окончена