Лекция N2

Тема:

Матрицы: элементарные преобразования строк, приведение к ступенчатому виду и виду Гаусса. Ранг матрицы

<u>Опр. 1</u> Элементарными преобразованиями строк матрицы называются:

1) **Перестановка местами двух строк**

2) **Замена строки суммой этой строки и некоторой другой, умноженной на число**

3) **Умножение строки на ненулевое число** α

Аналогично вводятся элементарные преобразования столбцов.

<u>Опр.2</u> Опорным элементом строки называется первый слева ненулевой элемент этой строки.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 2 4 – опорные элементы

У нулевой строки опорного элемента нет

Опр. 3 **Матрица называется** **ступенчатой**, **если опорный элемент в каждой последующей строке расположен правее, чем в предыдущей.**

Если строка нулевая, то все последующие строки также нулевые.

Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Опр. 4 Матрица имеет **вид Гаусса**, если

1) она ступенчатая

2) все опорные элементы равны единице

3) над опорными элементами только нули

<u>Пример.</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 4 Любая матрица может быть приведена к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований.

Опр. 5 Строки и столбцы матрицы, в которых расположены ее опорные элементы, называются **базисными**.

Опр. 6 **Рангом матрицы** **называется число ненулевых строк в ступенчатом виде матрицы.**

Обозначается $r(A)$.

Пример.

Привести матрицу к ступенчатому виду и найти ранг.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

+ -3

$\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \rightarrow$

3 2

$\left(\frac{1}{16}\right) \rightarrow$

$\cdot\left(\frac{1}{11}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

-1

Решение систем линейных уравнений.

Метод Гаусса

Пример.

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ 2x - y + z = 1, \\ -x + y - z = -1. \end{cases}$$

1) Составим расширенную матрицы системы

$$A\,|\,b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right).$$

2) Приведем матрицу к ступенчатому виду

$$\begin{array}{cccccc} & x & y & z & & \\ A|b= & \multicolumn{5}{l}{\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right)} \end{array}$$

-2

+

$\rightarrow$

$\rightarrow$

$\bullet\left(\frac{1}{2}\right)$

$$
\rightarrow \quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc} \quad x & \quad y & \quad z \end{array} \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)
\end{array}
\quad \rightarrow
$$

3) Составим новую систему

$$\begin{cases} x+z+y=3, \\ -z-3y=5, \\ y=1. \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{x=0}; \\ -z-3=-5; \quad \underline{z=2}; \\ \underline{y=1}; \end{array}$$

Система имеет единственное решение

Можно было продолжить преобразования, и привести систему к виду Гаусса.

Теорема Кронекера-Капелли.

1) Если $r(A) \neq r(A \mid b)$, то система не имеет решения

2) Если $r(A) = r(A \mid b) = n$, где n - число неизвестных, то система имеет единственное решение

3) Если $r(A) = r(A \mid b) \neq n$, то система имеет бесконечное множество решений.

Примеры

Пример 1. **Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса.**

$$\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 5x + 10y = 20. \end{cases}$$

-5

$$\to$$

Система имеет бесконечное множество решений. Найдем число свободных неизвестных $k = n - r = 2 - 1 = 1.$

Базисная неизвестная x **, свободная** y**.**

$$x + 2y = 4.$$

Обозначим свободную неизвестную $y = c.$
Получим $x = 4 - 2c.$

<u>Ответ:</u> $(4 - 2c, c)$**, где** $c \in (-\infty, +\infty).$

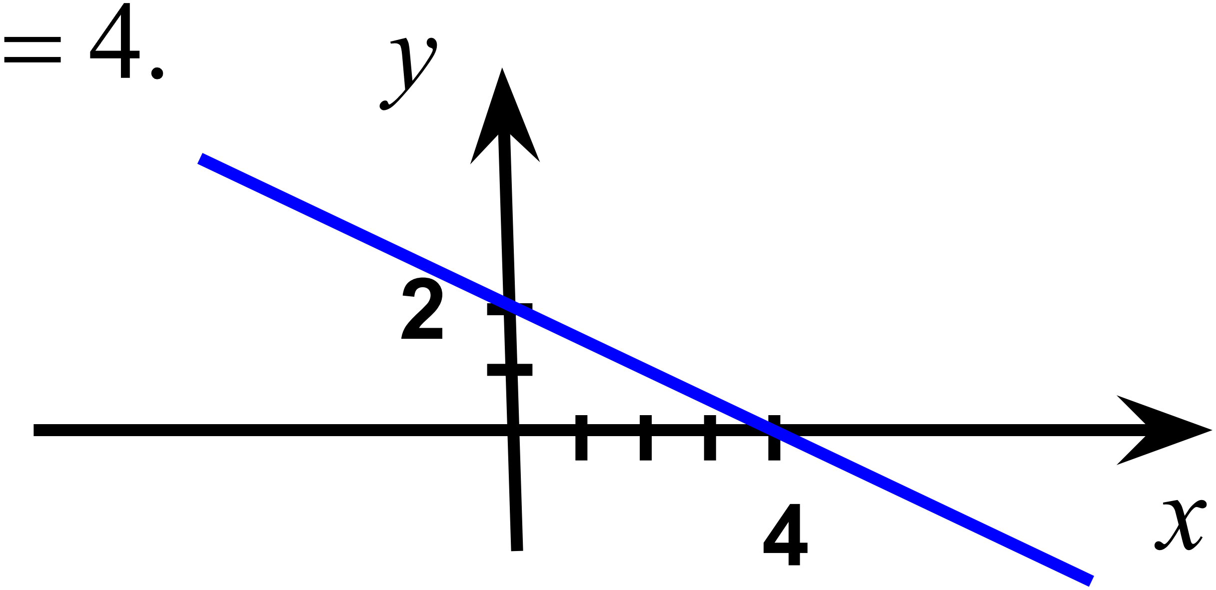
В этом примере система имеет бесконечное множество решений.

Запишем некоторые из них:

$$c = 0 \Rightarrow (4;0); \qquad c = 1 \Rightarrow (2;1).$$

Все решения являются точками прямой

$x + 2y = 4.$



<u>Пример 2.</u> Исследовать на совместность и решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 2, \\ x - 5y - z = 0, \\ 2x - 3y + 2z = -1. \end{cases}$$

-1 -2

$\rightarrow$

$$\rightarrow \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -7 & -4 & -2 \\ 0 & -7 & -4 & -5 \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Система несовместна (по теореме Кронекера-Капелли)

Мы рассмотрели два метода решения систем линейных уравнений:

1) Метод Крамера

2) Метод Гаусса

Метод Крамера предполагает вычисление определителей. Мы вычисляли определители 3-его порядка разложением по элементам первой строки.

Пример.

Способ 1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix} \quad -4 \quad 5$$

Способ 2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ -5 & 4 & 1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \\ -5 & 4 \end{matrix}\Bigg| =$$

Свойства определителей

1) Определитель не изменится, если поменять строки на соответствующие столбцы

2) Если у определителя 2 одинаковые строки или столбца, то он равен нулю.

3) Если у определителя нулевая строка или столбец, то он равен нулю.

Свойства определителей

4) Если две строки (столбца) поменять местами, то знак определителя изменится на противоположный.

5) Общий множитель строки (столбца) можно выносить за знак определителя.

6) Определитель не изменится, если к элементам строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на число.

Пример.

Вычислить:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \\ 1 & 128 & 2009 \end{vmatrix} =$$

(т.к. две одинаковые строки)