



Векторный анализ

Лекция 7



§ 7. Алгебраические структуры

Пусть дано некоторое множество $X \neq \emptyset$.

Отображение $\omega: X^n \rightarrow X$, где $n \in \mathbb{N}$, называется n -арной алгебраической операцией на X .

При $n = 2$ операция называется бинарной,

при $n = 1$ – унарной,

при $n = 0$ – нульарной (означает фиксирование некоторого элемента в X).

Алгебраическую операцию на множестве X обозначают специальным символом: $*$, $\times$, $\cdot$, $+$, $-$

и т. п.

Примеры алгебраических операций

1. $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел.

Действия с натуральными числами: сложение, вычитание, умножение, деление и т. д.

Операции сложения, умножения – бинарные алгебраические операции.

Операции вычитания, деления не являются алгебраическими операциями, т. к. результат операции может и не принадлежать множеству $\mathbb{N}$.

2. На множестве целых чисел $\mathbb{Z}$ алгебраическими (бинарными) операциями являются операции сложения, вычитания, умножения. Операция деления не является алгебраической операцией.

3. Все арифметические операции на множестве действительных чисел $\mathbb{R}$ являются алгебраическими операциями.

4. На множестве геометрических векторов V операции – сложение, вычитание, векторное умножение являются бинарными алгебраическими операциями; умножение вектора на число – унарной алгебраической операцией.

5. На множестве $M_{n \times n}$ матриц размера n операции – сложение, вычитание, умножение матриц являются бинарными алгебраическими операциями; умножение матрицы на число – унарной алгебраической операцией.

Операция $*$ на множестве X называется **коммутативной**, если $\forall a, b \in X \quad a*b = b*a$.

Операция $*$ называется **ассоциативной**, если $\forall a, b, c \in X \quad (a*b)*c = a*(b*c)$.

Пример

Операция сложения на множестве геометрических векторов V является и ассоциативной, и коммутативной; операция вычитания на этом же множестве — неассоциативная и некоммутативная операция.

Алгебраическая структура – система, состоящая из множества элементов X и операций $f_1, f_2, \dots, f_n$, определенных на X .

Обозначение: $(X; f_1, f_2, \dots, f_n)$.

Группоид – алгебраическая структура, определяемая одной бинарной операцией.

Группоид называется **коммутативным**, если бинарная операция коммутативна.

Полугруппа – группоид, операция которого ассоциативна, т.е. $\forall a, b, c \in X \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.

Элемент e группоида $(X; *)$ называется **нейтральным** (единичным или единицей), если $\forall a \in X \quad a * e = e * a = a$.

Элемент θ группоида $(X; *)$ называется **нулевым** (нулем), если $\forall a \in X \quad a * \theta = \theta * a = \theta$.

Полугруппа $(X; *)$ с единицей e называется **группой**, если $\forall a \in X \quad \exists b \in X : a * b = b * a = e$, при этом b называется **обратным элементом** для элемента a .



Коммутативная группа чаще называется **абелевой**.

В абелевой группе операцию обычно называют **сложением**, нейтральный элемент – **нулем** и обратный элемент – **противоположным элементом**.

Примеры

1. $(\mathbb{N}; +)$, $(\mathbb{N}; \cdot)$ – коммутативные полугруппы.
2. $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{R}; +)$, – абелевы группы.
3. $(\mathbb{Z}; \cdot)$ – коммутативная полугруппа с единицей, но не группа.



Кольцо – алгебраическая структура K с двумя бинарными операциями, одна из которых называется сложением $(+)$, другая – умножением $(\cdot)$, при этом должны выполняться следующие условия:

1. $\forall a, b \in K \quad (a + b) = (b + a);$
2. $\forall a, b, c \in K \quad a + (b + c) = (a + b) + c;$
3. $\exists ! \theta \in K \quad \forall a \in K \quad a + \theta = \theta + a = a;$
4. $\forall a \in K \quad \exists ! (-a) \in K \quad a + (-a) = (-a) + a = \theta;$
5. $\forall a, b, c \in K \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c;$
6. $\forall a, b, c \in K \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a.$

Заметим, что $(K; +)$ – абелева группа;
 $(K; \cdot)$ – полугруппа.



Примеры

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ числовые кольца;
2. $P[x]$ – кольцо многочленов от неизвестного x с действительными коэффициентами.
3. Множество функций, определенных на $\mathbb{R}$, с операциями сложения и умножения.
4. $M_{n \times n}$ – множество матриц размера n .



Кольцо называется **коммутативным**, если операция умножения коммутативна.

Коммутативное кольцо P , в котором есть единица и любой ненулевой элемент имеет обратный, называется **полем**.

Аксиомы поля:

А. Аксиомы сложения.

1. $\forall a, b \in P \quad a + b = b + a;$
2. $\forall a, b, c \in P \quad (a + b) + c = a + (b + c);$
3. $\exists! \theta \in P: \quad a + \theta = a;$
4. $\forall a \in P \quad \exists! (-a) \in P: a + (-a) = \theta.$

Б. Аксиомы умножения:

5. $\forall a, b \in P \quad a \cdot b = b \cdot a;$

6. $\forall a, b, c \in P \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c);$

7. $\forall a \in P \quad e \cdot a = a;$

8. $\forall a \in P (a \neq \theta) \exists a^{-1} \in P : a \cdot a^{-1} = e;$

В. Аксиома дистрибутивности:

9. $\forall a, b, c \in P \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$



Бесконечные поля называются *числовыми*, а их элементы — числами.

Примеры числовых полей:

- поле рациональных чисел;
- поле действительных чисел;
- поле комплексных чисел.