Тема 3. Математические основы финансово-экономических расчетов при принятии финансово-кредитных решений

Вопросы

1. Базовые понятия финансовой математики. Способы начисления процентов.
2. Простые и сложные ставки ссудных процентов.
3. Простые и сложные учётные ставки.
4. Эквивалентность процентных ставок различного типа.
5. Аннуитет.

1. Базовые понятия финансовой математики. Способы начисления процентов.

- ***Проценты*** - это доход от предоставления капитала в долг в различных формах (ссуды, кредиты и т. д.), либо от инвестиций производственного или финансового характера.
- ***Процентная ставка*** - величина, характеризующая интенсивность начисления процентов.
- ***Наращение (рост) первоначальной суммы долга*** - увеличение суммы долга за счет присоединения начисленных процентов (дохода).
- ***Множитель (коэффициент) наращения*** - это величина, показывающая, во сколько раз вырос первоначальный капитал.
- ***Период начисления*** - промежуток времени, за который начисляются проценты (получается доход).
- Период начисления может разбиваться на интервалы начисления.
- ***Интервал начисления*** - минимальный период, по прошествии которого происходит начисление процентов.

Существуют ***два способа*** определения и начисления процентов: декурсивный и антисипативный (предварительный).

При ***декурсивном*** способе проценты начисляются в конце каждого интервала начисления исходя из величины предоставляемого капитала.

При ***антисипативном способе*** проценты начисляются в начале каждого интервала начисления исходя из наращенной суммы.

При обоих способах начисления процентов процентные ставки могут быть либо ***простыми*** (если они применяются к одной и той же первоначальной денежной сумме в течение всего периода начисления), либо ***сложными*** (если по прошествии каждого интервала начисления она применяются к сумме долга и начисленных за предыдущие интервалы процентов).

2. Простые и сложные ставки ссудных процентов.

Простые ставки ссудных (декурсивных) процентов применяются обычно в краткосрочных финансовых операциях, когда интервал начисления совпадает с периодом начисления (и составляет, как правило, срок менее одного года), или когда после каждого интервала начисления кредитору выплачиваются проценты.

Введем следующие обозначения:

i – величина годовой ставки процентов;

I - общая сумма процентных денег за весь период начисления;

P - величина первоначальной денежной суммы;

S - наращенная сумма;

Кн - коэффициент наращения;

n - продолжительность периода начисления в годах;

д - продолжительность периода начисления в днях;

К - продолжительность года в днях.

- Величина ***K*** является ***временной базой*** для расчета процентов.
- В зависимости от способа определения продолжительности финансовой операции рассчитывается либо ***точный***, либо ***обыкновенный*** (коммерческий) процент.
- Точный процент получают, когда за временную базу берут фактическое число дней в году (365 или 366) и точное число дней ссуды.
- Определение современной величины ***P*** наращенной суммы ***S*** называется ***дисконтированием***, а определение величины наращенной суммы ***S*** - ***компаудированием***.

$S = P(1 + i \cdot n)$ - компаудирование по простой ссудной ставке

$P = \frac{S}{(1 + i \cdot n)}$ - дисконтирование по простой ссудной ставке

Если продолжительность ссуды менее одного года можно использовать следующую формулы:

$$S = P(1 + i \cdot \frac{\delta}{K})$$

$$P = \frac{S}{(1 + i \cdot \frac{\delta}{K})}$$

Преобразуя формулы (т. е. заменяя входящие в них выражения на эквивалентные и выражая одни величины через другие), получаем еще несколько формул для определения неизвестных величин в различных случаях

$$n = \frac{S - P}{P \cdot i} \qquad i = \frac{S - P}{P \cdot n}$$

$$\delta = \frac{S - P}{P \cdot i} \cdot K \qquad i = \frac{S - P}{P \cdot \delta} \cdot K$$

Иногда на разных интервалах начисления применяются разные процентные ставки. Если на последо-вательных интервалах начисления $n_1, n_2, \dots, n_N$ используются ставки процентов $i_1, i_2, \dots, i_N$,

то доход кредитора в конце интервала составит:

$$I_1 = P \cdot n_1 \cdot i_1$$

, и т. д. в конце второго интервала:

$$I_2 = P \cdot n_2 \cdot i_2$$

При *N* интервалах начисленная наращенная сумма составит:

$$S = P(1 + \sum_{t=1}^{N} n_t \cdot i_t)$$

Если после очередного интервала начисления доход (т. е. начисленные за данный интервал проценты) не выплачивается, а присоединяется к денежной сумме, имеющейся на начало этого интервала, для определения наращенной суммы применяют ***формулы сложных процентов.***

Сложные ссудные проценты в настоящее время являются весьма распространенным видом применяемых в различных финансовых операциях процентных ставок:

$$S = P(1+i)^n \qquad P = \frac{S}{(1+i)^n}$$

Если срок ссуды n в годах не является целым числом, множитель наращения определяют по выражению:

$$K_{\text{н}} = (1+i)^{n_a} \cdot (1+i \cdot n_b)$$

тогда

$$S = P \cdot (1+i)^{n_a} \cdot (1+i \cdot n_b)$$

где $n = n_a + n_b$;

n_a - целое число лет;

n_b - оставшаяся дробная часть года.

Начисление сложных процентов может осуществляться не один, а несколько раз в году. В этом случае оговаривается номинальная ставка процентов

j - годовая ставка, по которой определяется величина ставки процентов, применяемой на каждом интервале начисления.

При *m* равных интервалах начисления и номинальной процентной ставке *j* эта величина считается равной *j/m*.

Если срок ссуды составляет *n* лет, то получаем выражение для определения наращенной суммы:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn}$$

Здесь mn – общее число интервалов начисления за весь срок ссуды.

Если общее число интервалов начисления не является целым числом (*mn* - целое число интервалов начисления, *l* - часть интервала начисления), то выражение принимает вид:

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \left(1 + l\,\frac{j}{m}\right)$$

3. Простые и сложные учетные ставки

При ***антисипативном способе*** начисления процентов сумма получаемого дохода рассчитывается исходя из наращенной суммы. Так как в данном случае проценты начисляются в начале каждого интервала начисления, заемщик, естественно, получает эту сумму за вычетом процентных денег. Доход, полученный по учетной ставке, т. е. разница между размером кредита и непосредственно выдаваемой суммой называется ***дисконтом.***

Пусть теперь

d(%) - простая годовая учетная ставка;

Dг - сумма процентных денег, выплачиваемая за год;

D - общая сумма процентных денег;

S - сумма, которая должна быть возвращена;

P - сумма, получаемая заемщиком.

Тогда, согласно определениям, имеем следующие формулы:

$$D_г = d \cdot S \qquad D = n \cdot D_г = n \cdot d \cdot S$$

$$P = S - D = S(1 - n \cdot d) = S\left(1 - \frac{\delta}{K} \cdot d\right)$$

$$S = \frac{P}{1 - n \cdot d} = P \div \left(1 - \frac{\delta}{K} \cdot d\right)$$

На практике учетные ставки применяются главным образом при учете (т. е. покупке) векселей и других денежных обязательств.

Из приведенных формул можно вывести еще две формулы для определения периода начисления и учетной ставки при прочих заданных условиях:

$$n = \frac{S - P}{S \cdot d} \qquad d = \frac{S - P}{S \cdot n} = \frac{S - P}{S \cdot \delta} \cdot K$$

Компаудирование и дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по следующим формулам:

$$S = \frac{P}{(1 - d)^n} \qquad P = S(1 - d)^n$$

Так, для периода начисления, не являющегося целым числом, имеем:

$$K_{\text{Н}} = \frac{1}{(1-d)^{n_a} \cdot (1-d \cdot n_b)}$$

Для начисления процентов m раз в году формула имеет следующий вид:

$$S = \frac{P}{\left(1-\frac{g}{m}\right)^{mn}}$$

или

$$S = \frac{P}{\left[\left(1-\frac{g}{m}\right)^{mn} \cdot \left(1-l\frac{g}{m}\right)\right]}$$

При этом *mn* - целое число интервалов начисления за весь период начисления, *l* - часть интервала начисления.

4. Эквивалентность процентных ставок различного типа

- ***Эквивалентные процентные ставки*** - это такие процентные ставки разного вида, применение которых при различных начальных условиях дает одинаковые финансовые результаты.
- Эквивалентные процентные ставки необходимо знать в случаях, когда существует возможность выбора условий финансовой операции и требуется инструмент для корректного сравнения различных процентных ставок.

4. Эквивалентность процентных ставок различного типа

- Для нахождения эквивалентных процентных ставок используют ***уравнения эквивалентности***, принцип составления которых заключается в следующем. Выбирается величина, которую можно рассчитать при использовании различных процентных ставок (обычно это наращенная сумма S). На основе равенства двух выражений для данной величины и составляется уравнение эквивалентности, из которого путем соответствующих преобразований получается соотношение, выражающее зависимость между процентными ставками различного вида.

Повторим формулы для определения наращенной суммы при различных способах начисления

$$S = P(1 + i \cdot n) \qquad S = P(1 + i)^n$$

$$S = \frac{P}{1 - n \cdot d} \qquad S = \frac{P}{(1 - d)^n}$$

$$S = P \cdot \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mn} \qquad S = \frac{P}{\left(1 - \frac{g}{m}\right)^{mn}}$$

Приравнивая эти формулы попарно, можно получить соотношения, выражающие зависимость между любыми двумя различными процентными ставками.

Рассмотрим несколько случаев.

$$1+ni=\frac{1}{1-nd} \qquad i=\frac{d}{1-nd} \qquad d=\frac{i}{1+ni}$$

$$1+ni=(1+i_c)^n \qquad i=\frac{(1+i_c)^n-1}{n} \qquad i_c=\sqrt[n]{1+ni}-1$$

$$1+ni=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} \qquad i=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n}$$

$$j=m\left(\sqrt[m*n]{1+ni}-1\right)$$

Для различных случаев сложных процентов получаем следующее уравнение эквивалентности:

$$(1+i_c)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} \qquad i_c = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{m} - 1$$

$$j = m(\sqrt[m]{1+i_c} - 1)$$

Полученная по последней формуле годовая ставка сложных процентов, эквивалентная номинальной процентной ставке, называется ***эффективной (действительной) ставкой сложных процентов.***

Эффективную ставку сложных процентов полезно знать, чтобы оценить реальную доходность финансовой операции, или сравнить процентные ставки в случае, когда используются различные интервалы начисления.

Далее для установления эквивалентности между сложными учетными ставками и сложными ставками ссудных процентов имеем:

$$(1+i_c)^n = \frac{1}{(1-d_c)^n} \qquad i_c = \frac{d_c}{1-d_c} \qquad d_c = \frac{i_c}{1+i_c}$$

Аналогичным образом получаем зависимости между любыми другими эквивалентными процентными ставками.

5. Аннуитет

- **Аннуитет**, т.е. ежегодный платеж – это инвестиции, приносящие вкладчику определенный доход через регулярные промежутки времени. Он означает серию платежей одинаковой суммы, регулярно поступающих через равные промежутки времени в течение определенного числа лет. В основном это вложение капитала в акции, облигации, негосударственные пенсионные фонды, в недвижимость, приносящую доход и др.

Расчёт аннуитетного платежа

- Рассчитать месячный **аннуитетный платеж** можно по следующей формуле:

$$R = A*(i + \frac{i}{(1+i)^n - 1})$$

- , где
- R – месячный платёж, A – первоначальная сумма кредита, *i* – (1/12) процентной ставки, *n* – количество месяцев.