Лекция 5. ПОТЕНЦИАЛ И РАБОТА ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ. СВЯЗЬ НАПРЯЖЕННОСТИ С ПОТЕНЦИАЛОМ

5.1. Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$

В предыдущей теме было показано, что взаимодействие между покоящимися зарядами осуществляется через *электростатическое поле*. Описание электростатического поля мы рассматривали с помощью *вектора напряженности* $\vec{E}$, равного силе, действующей в данной точке на помещенный в неё пробный единичный положительный заряд

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

Существует и другой способ описания поля – с помощью ***потенциала****.* Однако для этого необходимо сначала *доказать*, что ***силы*** электростатического поля ***консервативны***, а само *поле* ***потенциально***.

Рассмотрим поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом q'. В любой точке этого поля на пробный точечный заряд q действует сила

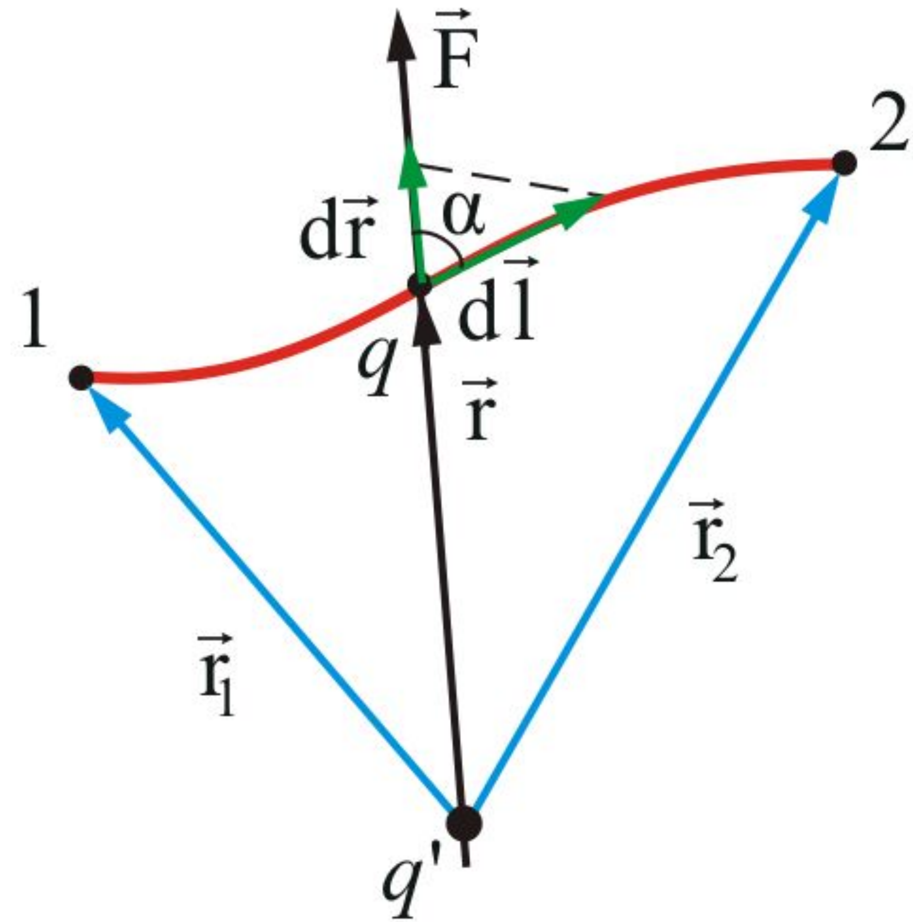


Рис. 5.1

$$\vec{\mathbf{F}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r} = F(r)\frac{\vec{\mathbf{r}}}{r},$$

где $F(r)$ – модуль вектора силы , $\vec{\mathbf{r}}$ – единичный вектор, определяющий положение заряда q относительно q', ε_0 – электрическая постоянная.

Для того, чтобы доказать, что *электростатическое поле потенциально*, нужно доказать, что *силы электростатического поля консервативны*.

Из раздела «Физические основы механики» известно, что *любое стационарное поле центральных сил является консервативным, т.е. работа сил этого поля не зависит от формы пути, а только от положения конечной и начальной точек.*

Вычислим работу, которую совершает электростатическое поле, созданное зарядом, по перемещению заряда q из точки 1 в точку 2.

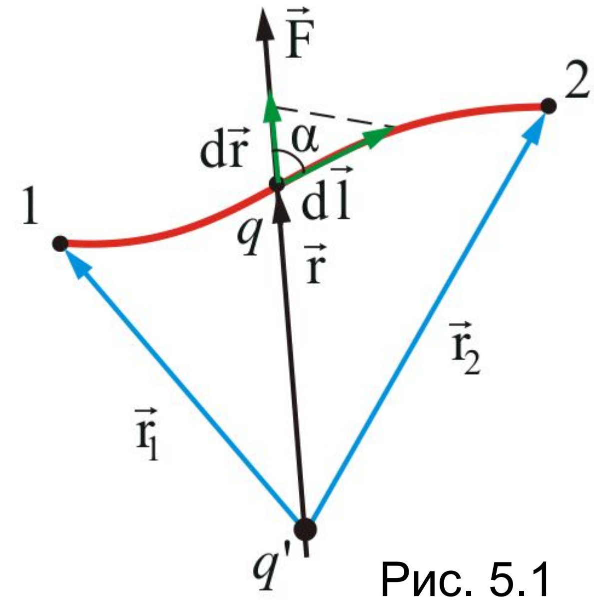


Рис. 5.1

Работа на пути dl равна:

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}l\cos\alpha = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\mathrm{d}l\cos\alpha,$$

$$\mathrm{d}A = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r. \qquad (5.1.1)$$

где dr – приращение радиус-вектора при перемещении на dl;

$$\mathrm{d}r = \mathrm{d}l\cos\alpha,$$

Полная работа при перемещении из точки 1 в точку 2 равна интегралу:

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathbf{d}r}{r^2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r_1}^{r_2} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right).$$

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right). \qquad (5.1.2)$$

Работа электростатических сил не зависит от формы пути, а только лишь от координат начальной и конечной точек перемещения.

*Следовательно, силы поля **консервативны**, а само поле – **потенциально.***

Если в качестве пробного заряда, перенесенного из точки 1 заданного поля в точку 2, взять положительный единичный заряд q, то элементарная работа сил поля будет равна:

$$\mathbf{d}A = q\vec{\mathbf{E}}\mathbf{d}\vec{\mathbf{l}}.$$

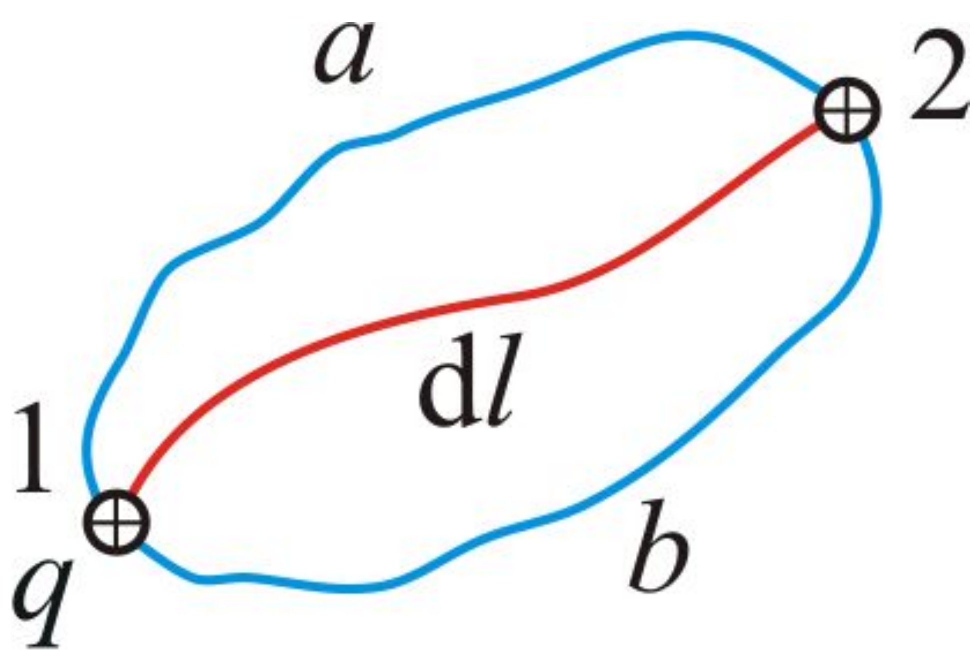


Рис. 5.2

Тогда вся работа равна:

$$A = q\int_1^2 \vec{E}d\vec{l}. \qquad (5.1.3)$$

Такой интеграл по замкнутому контуру называется ***циркуляцией вектора***

Из независимости линейного интеграла от пути между двумя точками следует, что по *произвольному замкнутому пути*:

$$\boxed{\oint \vec{E}d\vec{l} = 0.} \qquad (5.1.4)$$

Это утверждение и называют ***теоремой о циркуляции*** $\vec{E}$.

Для доказательства теоремы разобьем произвольно замкнутый путь на две части: $1a2$ и $2b1$ (рис.5.2).

Из сказанного выше следует, что

$$\int_1^2 E\mathrm{d}l = -\int_2^1 E\mathrm{d}l.$$

(Интегралы по модулю равны, но знаки противоположны). Тогда работа по замкнутому пути:

$$A = q\oint \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = q\int_1^2 \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} - q\int_2^1 \vec{E}\mathrm{d}\vec{l} = 0.$$

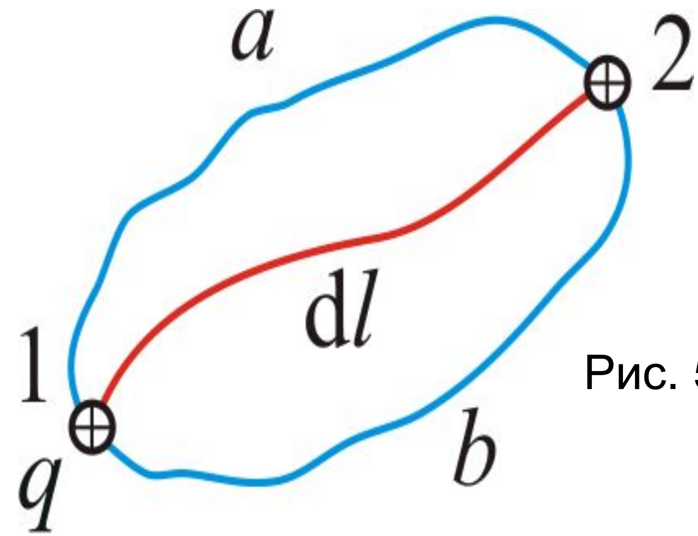


Рис. 5.2

Теорема о циркуляции позволяет сделать ряд важных выводов, практически не прибегая к расчетам.

Рассмотрим два простых примера, подтверждающих это заключение.

Пример1. *Линии электростатического поля не могут быть замкнутыми*. В самом деле, если это не так, и какая-то линия $\vec{E}$ – замкнута, то, взяв циркуляцию вдоль этой линии, мы сразу же придем к противоречию с *теоремой о циркуляции вектора* $\vec{E}$: $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$. А в данном случае направление интегрирования в одну сторону, поэтому циркуляция вектора $\vec{E}$ не равна нулю, т.е. $\oint \vec{\mathbf{E}} d\vec{\mathbf{l}} \neq 0$

Пример 2. Возможна ли конфигурация электростатического поля как на рисунке 5.3,а?

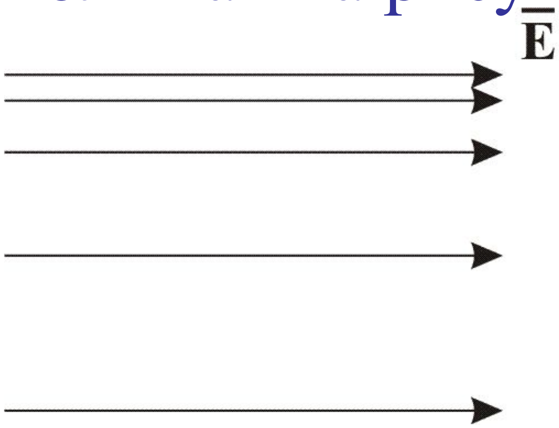


Рис. 5.3,а

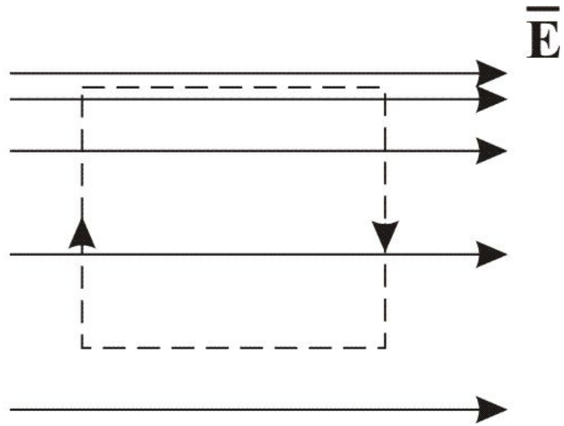


Рис. 5.3,б

Нет невозможна! Применим теорему о циркуляции вектора к замкнутому контуру, показанному пунктиром на рис. 5.3,б.

Стрелки здесь показывают направление обхода. На вертикальных участках $\vec{E}$ перпендикулярно $\vec{l}$ и $A = 0$. Остаются два одинаковых по длине горизонтальных участка. Из рисунка видно, что вклады в циркуляцию на этих участках противоположны по знаку, но не равны по модулю: больше там, где линии гуще, поэтому циркуляция отлична от нуля, что противоречит теореме о циркуляции.

5.2. Работа сил электростатического поля. Потенциальная энергия

Мы сделали заключение, что электростатическое поле потенциально. Следовательно, можно ввести функцию состояния, зависящую от координат – ***потенциальную энергию***.

Исходя из принципа суперпозиции сил ,

$$\vec{F} = \sum_k \vec{F}_k$$

можно показать, что общая работа A будет равна сумме работ каждой силы:

$$A = \sum_k A_k. \qquad (5.2.1)$$

Здесь каждое слагаемое не зависит от формы пути, следовательно, не зависит от формы пути и сумма.

Работу сил электростатического поля можно выразить через убыль потенциальной энергии – разность двух функций состояний:

$$A_{12} = W_1 - W_2. \qquad (5.2.2)$$

Это выражение для работы можно переписать в виде

$$A_{12} = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 r_2}. \qquad (5.2.3)$$

Сопоставляя формулу (5.2.2) и (5.2.3), получаем ***выражение для потенциальной энергии*** заряда *q′* в поле заряда *q*:

$$\boxed{W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r} + \text{const.}} \qquad (5.2.4)$$

5.3. Потенциал. Разность потенциалов

Разные пробные заряды q_1, q_2,… будут обладать в одной и той же точке поля разными энергиями W_1, W'_2 и так далее. Однако отношение $W / q_{k\,\text{пр.}}$ будет для всех зарядов одним и тем же. *Поэтому можно вести* ***скалярную величину, являющуюся энергетической характеристикой собственно поля – потенциал***:

$$\varphi = \frac{W}{q_k}. \qquad (5.3.1)$$

$$\varphi = \frac{W}{q_k}.$$

- *Из этого выражения следует, что* ***потенциал*** *численно равен потенциальной энергии, которой обладает в данной точке поля единичный положительный заряд.*

Подставив в (3.3.1.) значение потенциальной энергии (5.2.4), получим для ***потенциала точечного заряда*** следующее выражение:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r}. \quad (3.3.2)$$

Потенциал, как и потенциальная энергия, определяют с точностью до постоянной интегрирования.

физический смысл имеет не потенциал, а разность потенциалов, поэтому договорились считать, что ***потенциал точки, удаленной в бесконечность, равен нулю***.

Когда говорят «потенциал такой-то точки» – имеют в виду *разность потенциалов между этой точкой и точкой, удаленной в бесконечность*.

Другое определение потенциала:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} \quad \text{или} \quad A_\infty = q\varphi$$

т.е. потенциал численно равен работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки в бесконечность

(*или наоборот – такую же работу нужно совершить, чтобы переместить единичный положительный заряд из бесконечности в данную точку поля*). При этом $\varphi > 0$, если $q > 0$.

Если поле создается системой зарядов, то, используя принцип суперпозиции, получаем:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k q'}{r_k}. \qquad (5.3.3)$$

Тогда и для потенциала $\varphi = \sum_k \varphi_k$ или

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_k \frac{q_k}{r_k} \qquad (5.3.4)$$

т.е. потенциал поля, создаваемый системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

А вот напряженности складываются при наложении полей – векторно.

Выразим работу сил электростатического поля через разность потенциалов между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = W_1 - W_2 = \varphi_1 q - \varphi_2 q = q(\varphi_1 - \varphi_2).$$

Таким образом, работа над зарядом q равна произведению заряда на убыль потенциала:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \qquad (5.3.6)$$

где U – *напряжение*.

$$A = qU$$

Формулу $A_{\infty} = q\varphi$ можно использовать для установления единиц потенциала:

за единицу φ принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу равную единице.

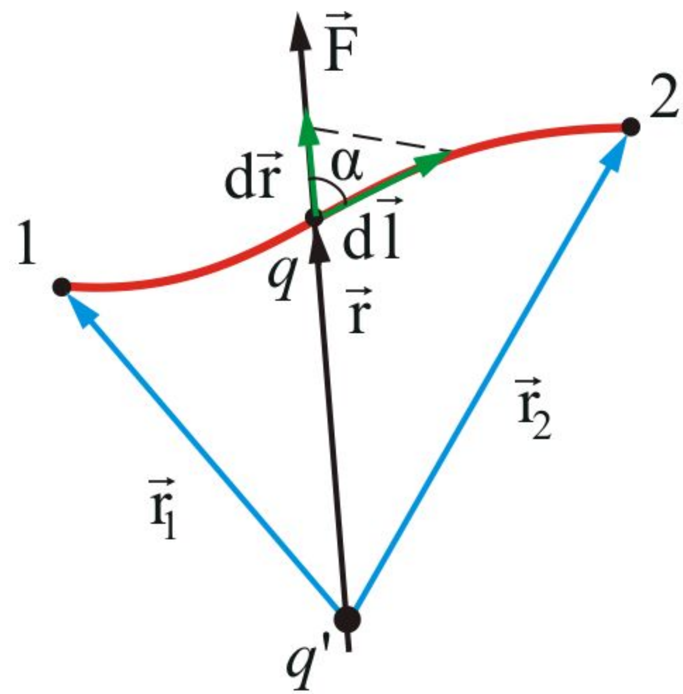
В СИ единица потенциала $1\,\text{В} = 1\,\text{Дж}/1\,\text{Кл}$

Электрон - вольт (эВ) – *это работа, совершенная силами поля над зарядом, равным заряду электрона при прохождении им разности потенциалов* 1 В, то есть:

$$\boxed{1\ \text{эВ} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл} \cdot \text{В} = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Дж}.}$$

5.4. Связь между напряженностью и потенциалом

Изобразим перемещение заряда *q* по произвольному пути *l* в электростатическом поле .



Работу, совершенную силами электростатического поля на бесконечно малом отрезке $d\vec{l}$ можно найти так:

$$dA = F_l \, dl = E_l q \, dl, \quad (5.4.1)$$

эта работа, если она совершена электростатическим полем, равна убыли потенциальной энергии заряда, перемещенного на расстоянии dl:

$$\mathrm{d}A = -q\mathrm{d}\varphi; \quad E_l q \mathrm{d}l = -q\mathrm{d}\varphi$$

отсюда

$$E_l = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}l}. \quad (5.4.2)$$

Для ориентации dl (направление перемещения) в пространстве, надо знать проекции на оси координат;

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial \kappa}{\partial z}\mathbf{k},$$

где **i, j, k** – орты осей – единичные векторы.

По определению градиента ***сумма первых производных от какой-либо функции по координатам есть градиент этой функции***

$$\mathbf{grad}\,\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathbf{k},$$

gradφ– ***вектор, показывающий направление наибыстрейшего увеличения функции***.

Коротко связь между $\vec{E}$ и φ записывается так:

$$\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi \quad (3.4.4)$$

или так:

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (3.4.5)$$

где ∇ (набла) означает символический вектор, называемый оператором Гамильтона.

Знак минус говорит о том, что вектор направлен в сторону уменьшения потенциала электрического поля.

5.5. Безвихревой характер электростатического поля

Из условия $\vec{E} = -\nabla\varphi$ следует одно важное соотношение, а именно, ***величина, векторного произведения*** $[\nabla, \vec{E}]$ ***для стационарных электрических полей всегда равна нулю***. Действительно, по определению, имеем

$$[\nabla, \vec{E}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \varphi = 0$$

,

поскольку определитель содержит две одинаковые строки.

Величина $[\nabla, \vec{E}]$ *называется* ***ротором*** *или* ***вихрем***

Мы получаем ***важнейшее уравнение электростатики***:

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{E} = 0} \qquad (5.5.1)$$

Таким образом *кулоновское* ***электростатическое поле – безвихревое.***

Согласно теореме Стокса, присутствует следующая связь между контурным и поверхностным интегралами:

$$\oint_L (\vec{E}, d\vec{l}) = \oint_S \mathrm{rot}\vec{E}\, d\vec{S} = 0$$

где контур L ограничивающий поверхность S, ориентация которой определяется направлением вектора положительной нормали $\vec{n}$: $d\vec{S} = \vec{n}\, dS$

Поэтому ***работа при перемещении заряда по любому замкнутому пути в электростатическом поле равна нулю.***