

# СРЕДНИЕ ВЕЛИЧИНЫ

*Средние величины* - это обобщающие показатели, в которых находят выражение действия общих условий, закономерности изучаемых явлений.

Статистические средние рассчитываются на основе **массовых данных**.

Выделим следующие понятия и обозначения:

$\bar{X}$  - осредняемый признак (признак по которому находится средняя);

$X_i$  или  $x_1, x_2, \dots, x_n$  – индивидуальное значение осредняемого признака у каждой единицы или вариант;

$f_i$  - частота - повторяемость индивидуальных значений признака (его вес);

$W_i$  - частность – относительная частота, т.е. отношение частоты повторения индивидуального значения признака к сумме частот.

$$W_i = \frac{f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

$n$  – число вариантов.

# a) Средняя арифметическая

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{- средняя арифметическая простая;}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i} \quad \text{- средняя арифметическая взвешенная;}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i w_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \text{- средняя арифметическая доли}$$

Например: определить среднюю заработную плату работников турфирмы, если имеются следующие данные:

| Зарботная плата работников, тыс. руб. | Число человек |
|---------------------------------------|---------------|
| до 5                                  | 5             |
| 5-7                                   | 7             |
| 7-9                                   | 8             |
| 9-11                                  | 11            |
| свыше 11                              | 9             |

# Решение:

Для вычисления средней заработной платы составим расчетную таблицу:

| Заработная плата работников, тыс. руб. | Число человек | Расчетные показатели |         |
|--|---------------|----------------------|---------|
|  |               | $X'$                 | $X'f_i$ |
| до 5                                   | 5             | 4                    | 20      |
| 5-7                                    | 7             | 6                    | 42      |
| 7-9                                    | 8             | 8                    | 64      |
| 9-11                                   | 11            | 10                   | 110     |
| свыше 11                               | 9             | 12                   | 108     |
| Итого                                  | 40            | -                    | 344     |

Определим среднюю заработную плату по формуле средней арифметической взвешенной:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i f_i}{\sum_{i=1}^n f_i}$$

Получаем:

$$\bar{X} = \frac{344}{40} = 8,6 \text{ тыс. руб.} - \text{средняя}$$

заработная плата  
работников турфирмы.

# Основные свойства средней арифметической:

1. Средняя от постоянной величины равна ей самой:

$$\bar{A} = A$$

2. Произведение средней на сумму частот равно сумме произведений вариантов на частоты:

$$\bar{X} \sum f = \sum xf$$

3. Изменение каждого варианта на одну и ту же величину изменяет среднюю на ту же величину:

$$\frac{\sum (x \pm A) f}{\sum f} = \overline{X} \pm A$$

4. Изменение каждого варианта в одно и то же число раз изменяет среднюю во столько же раз:

$$\frac{\sum Ax f}{\sum f} = A \overline{X}$$

5. Изменение каждого из весов в одно и то же количество раз не изменяет величины средней:

$$\frac{\sum x(Af)}{\sum Af} = \frac{A \sum xf}{A \sum f} = \frac{\sum xf}{\sum f} = \bar{X}$$

6. Алгебраическая сумма отклонений всех вариантов от средней равна нулю:

$$\sum (x - \bar{X})f = 0$$

7. Средняя суммы равна сумме средних:

$$\overline{X + Y} = \overline{X} + \overline{Y}$$

8. Сумма квадратов отклонений вариантов от средней арифметической меньше, чем от любой другой величины:

$$\sum (x - \overline{X})^2 = \min$$

## *б) Средняя гармоническая*

*Средняя гармоническая* – это величина, обратная средней арифметической. Она применяется, когда статистическая информация не содержит частот по определенным вариантам совокупности, представлена как их произведение.

$$\overline{X} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}} \quad - \text{ средняя гармоническая простая;}$$

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{x_i}}$$

- средняя гармоническая  
взвешенная (можно определить  
частоту или вес);

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{x_i}}$$

- средняя гармоническая  
доли (можно определить  
часть)

Например: Определить среднюю цену изделия, если:

| Вид изделия | Цена изделия, руб. | одного тыс. | Стоимость всех изделий, тыс. руб. |
|-------------|--------------------|-------------|-----------------------------------|
| А           | 4                  |             | 80                                |
| Б           | 8                  |             | 240                               |
| В           | 10                 |             | 600                               |

Воспользуемся средней гармонической:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n f_i}{\sum_{i=1}^n \frac{f_i}{x_i}}$$

Средняя цена изделия:

$$\bar{X} = \frac{80 + 240 + 600}{\frac{80}{4} + \frac{240}{8} + \frac{600}{10}} = 8,364 \text{ тыс. руб.}$$

Определить среднюю во многих случаях удобнее через *исходное соотношение средней (ИСС)* или ее логическую формулу:

*ИСС =*

$$= \frac{\text{Суммарное значение или объем осредняемого признака}}{\text{Число единиц или объем совокупности}}$$

Пример:

Рассчитать среднюю заработную плату работников в целом по трем предприятиям сферы обслуживания.

| Численность персонала, чел. | Месячный фонд заработной платы, тыс. руб. | Средняя заработная плата, тыс. руб. |
|-----------------------------|---|-------------------------------------|
| 1                           | 2   | 3                                   |
| 540                         | 5648,4                                    | 10,46                               |
| 275                         | 3327,5                                    | 12,10                               |
| 458                         | 5175,4                                    | 11,30                               |
| 1273                        | 14151,3                                   |                                     |

Средняя заработная плата может быть получена через следующее соотношение:

$$ИСС = \frac{\text{Совокупный фонд заработной платы}}{\text{Общая численность персонала}}$$

1. Предположим, что мы располагаем только данными гр. 1 и 2 ., тогда:

$$\bar{X} = \frac{14151,3}{1273} = 11,12 \quad \text{тыс. руб.}$$

2. Если мы располагаем данными о средней заработной плате и численности работников (гр. 1 и 3), то средняя может быть рассчитана следующим образом:

$$\bar{X} = \frac{10,46 \cdot 540 + 12,10 \cdot 275 + 11,30 \cdot 458}{1273} = 11,12$$

тыс. руб.

3. Допустим , что в нашем распоряжении только данные о фонде заработной платы и средней численности персонала (гр. 2 и 3), средняя заработная плата:

$$\bar{X} = \frac{14151,3}{\frac{5648,4}{10,46} + \frac{3327,5}{12,10} + \frac{5175,4}{11,30}} = 11,12$$

тыс. руб.

## *в) Средняя геометрическая*

Средняя геометрическая величина используется также для определения равноудаленной величины от максимального и минимального значений признака.

$$\overline{X} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}$$

Например, страховая фирма заключает договоры на оказание клиентам различных услуг медицинского страхования. В зависимости от категории медицинского учреждения, ассортимента услуг, конкретного рискованного случая страховая сумма выплат может изменяться от 100 до 10000 долл. В год.

Средняя сумма выплат по страховке:

$$\sqrt{100 \cdot 10000} = 1000 \quad \text{долл.}$$

## *г) Средняя квадратическая*

Формула средней квадратической используется для измерения степени колеблемости индивидуальных значений признака вокруг средней арифметической в рядах распределения.

$$\overline{X} = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n}}$$