Курс «Нейронные сети и системы нечеткой логики»

Лекция 5

Введение в теорию нечеткой логики

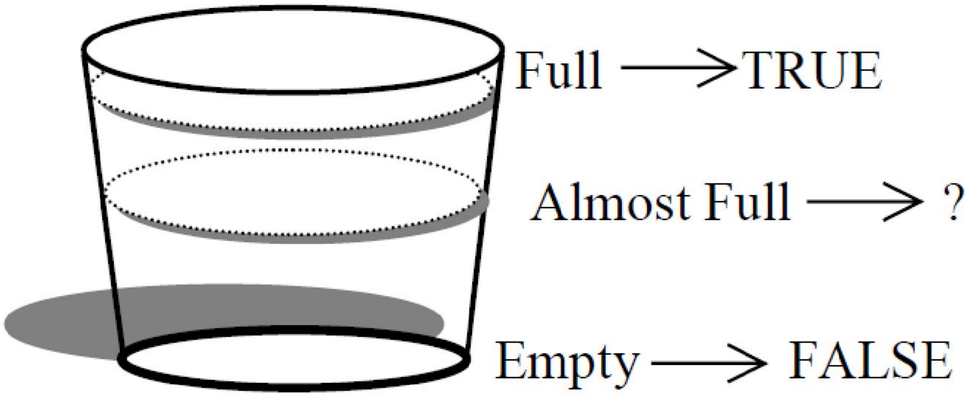
Нечеткие множества

Классическая теория множеств: если элемент удовлетворяет строгим логическим условиям, то он принадлежит к множеству, в противном случае он к нему не принадлежит.

Недостаток – резкое смена состояния при незначительном отклонении параметров элемента.

Нечеткое множество (fuzzy set) – степень принадлежности элемента к множеству может лежать в пределах от «0» (не принадлежит) до «1» (принадлежит) в зависимости от значений отдельных параметров этого элемента.

Переход от одного класса к другому осуществляется плавно, в итоге множество не имеет четко очерченных границ.



История возникновения

Увеличение сложности рассматриваемых систем неизбежно приводит к усложнению способов их описания и управления. При этом классическая логика часто не позволяет в достаточной степени точности передать свойства этой системы.

А. Эйнштейн: «Пока математические законы соотносятся с реальностью, они не являются определенными. Если же они строго определены, то не соотносятся с реальностью».

Постепенно ученые и исследователи приходили к выводу, что помимо логических величин «1» и «0» необходимо ввести промежуточные, которые бы отображали вероятность возникновения той или иной ситуации.

Впервые эту идею в полной мере реализовал Л. Заде (Lotfi Zadeh), предложив оперировать не строгими логическими величинами, а лингвистическими переменными.

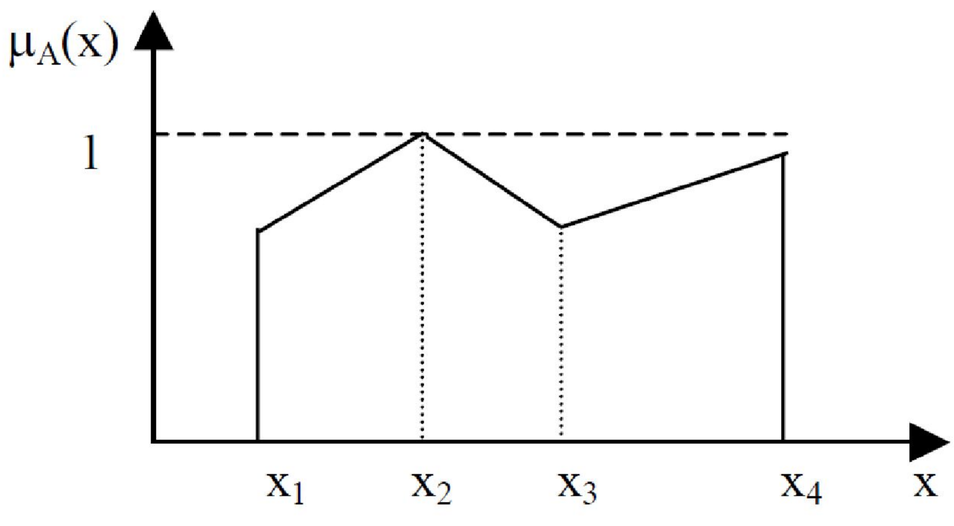
Лингвистические переменные

Классическая логика оперирует строгими соотношениями, например, T<0.

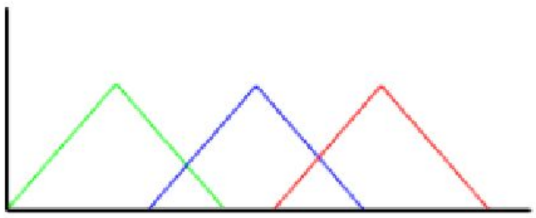
Таким образом, даже незначительное изменение этой величины приводит к резкому изменению результата выполнения логической операции. Применительно к системам управления – релейные регуляторы обязательно имеют небольшой гистерезис для ограничения максимальной частоты переключения.

Нечеткая логика оперирует так называемыми «лингвистическими переменными»: «вода холодная», «скорость высокая», «ошибка большая».

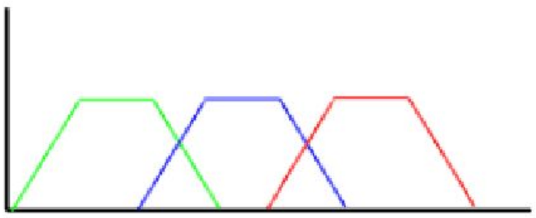
Эти лингвистические переменные представляют собой нечеткие множества, элементами которых являются значения некоторой физической величины. При чем, каждому значению этой величины ставится в соответствие некоторая функция принадлежности, принимающая значения от 0 до 1 и показывающая, насколько эта величина принадлежит тому или иному множеству.



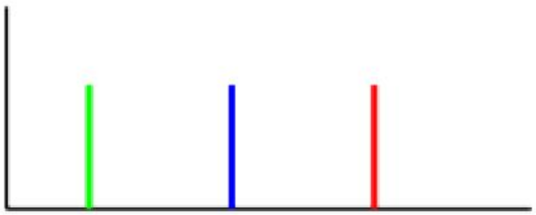
Стандартные функции принадлежности



triangular

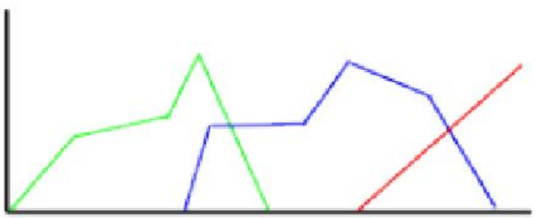


trapezoidal



singleton

Gaussian



Piecewise linear

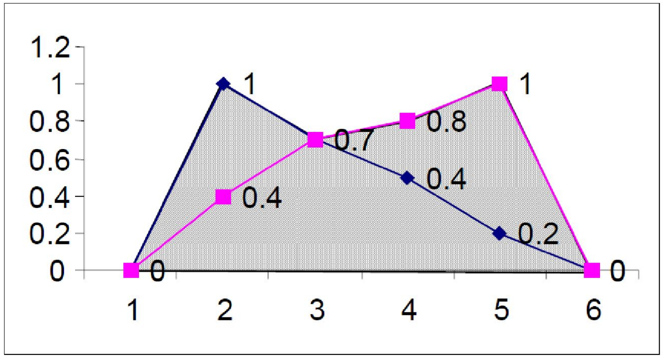
Вся область значений регулируемой величины разбивается на нечеткие множества, каждому из которых ставится в соответствие некоторая функция принадлежности. Лингвистическая переменная со своим графиком функции принадлежности обычно называют термами.

Операции над нечеткими множествами

Объединение (логическое «ИЛИ»):

$$\mu_C(x) = \max[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

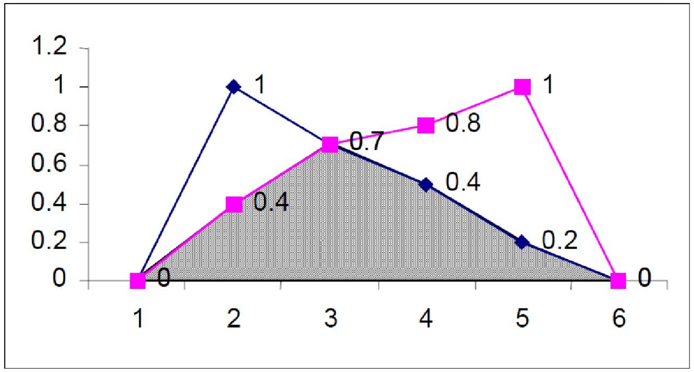
$$\mu_C(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) * \mu_B(x)$$



Пересечение (логическое «И»):

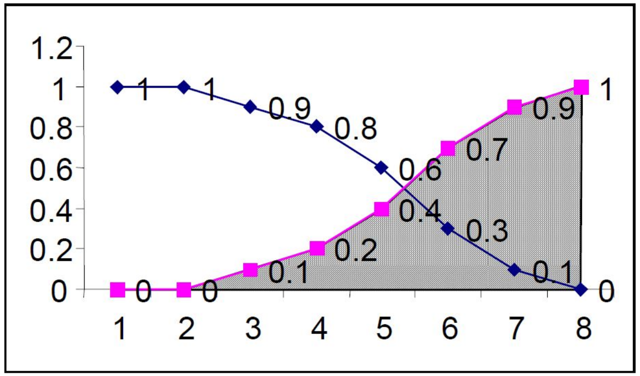
$$\mu_C(x) = \min[\mu_A(x), \mu_B(x)]$$

$$\mu_C(x) = \mu_A(x) * \mu_B(x)$$



Дополнение (логическое «НЕ»):

$$\mu_{\sim A}(x) = 1 - \mu_A(x)$$



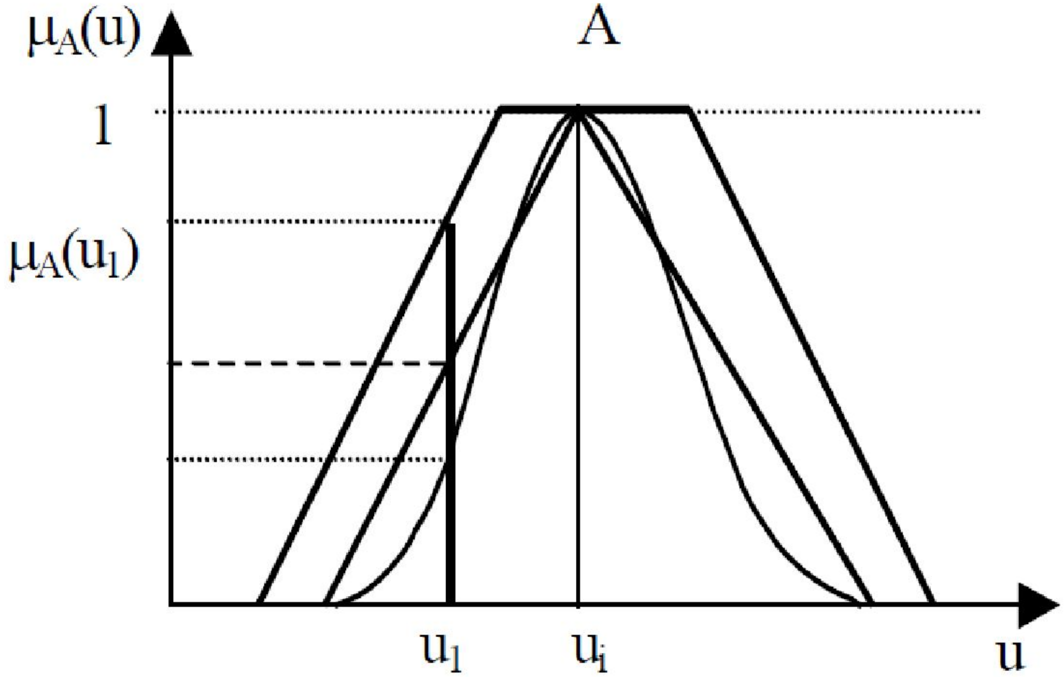
Система нечеткой логики

1. Фаззификация – соотнесение физической величины на входе с лингвистическими переменными и получением значений функций принадлежности.

2. Инференция – вычисление функций принадлежности для выходной величины по заданным логическим правилам.

3. Дефаззификация – получение физических значений выходной величины из лингвистических переменных.

Фаззификация



1. На вход системы поступает некоторая физическая величина.

2. Проводится вертикальная линия из точки, соответствующей текущему ее значению.

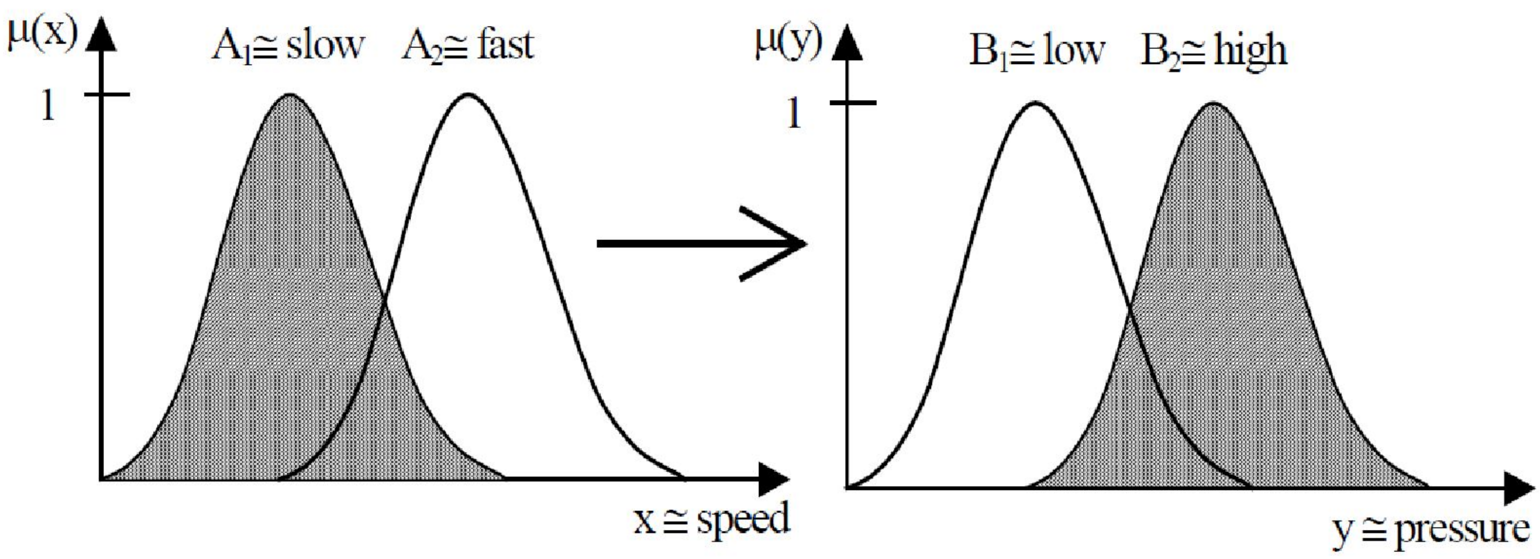
3. Значение функций принадлежности входной величины к нечетким множествам определяется в точке пересечения ее графика с этой вертикальной линией.

Инференция

Обработка данных в системах нечеткой логики осуществляется с помощью причинно-следственных пар «ЕСЛИ»-«ТО». Например, **ЕСЛИ** *a=b*, **ТО** *y=x*.

С помощью этих правил осуществляется переход от лингвистических переменных входных величин к переменным выходных величин.

Например, **ЕСЛИ** *скорость=низкая*, **ТО** *давление=высокое.*



Инференция

Обычно правила в системах нечеткой логики состоят из многих компонентов, которые можно классифицировать по следующим типам:

1. Конъюнкция условий:

ЕСЛИ $x=a_1$ **И** $x=a_2$ **ТО** $y=b$, что можно записать как **ЕСЛИ** $x=a_s$ **ТО** $y=b$. Функция принадлежности результирующему множеству выбирается по правилу:

$$\mu_{A^s}(x) = \min\left[\mu_{A^1}(x), \mu_{A^2}(x), \cdots, \mu_{A^n}(x)\right]$$

2. Дизъюнкция условий:

ЕСЛИ $x=a_1$ **ИЛИ** $x=a_2$ **ТО** $y=b$, что можно записать как **ЕСЛИ** $x=a_s$ **ТО** $y=b$. Функция принадлежности результирующему множеству выбирается по правилу:

$$\mu_{A^s}(x) = \max\left[\mu_{A^1}(x), \mu_{A^2}(x), \cdots, \mu_{A^n}(x)\right]$$

Инференция

Процесс инференции можно разделить на три этапа:

1) **Агрегация** – объединение с помощью логических операций отдельных термов левой части нечеткого правила в один.

2) **Импликация** – составление нечеткого множества для каждого активного правила исходя из некоторой базовой функции принадлежности и степени принадлежности текущего набора входных величин некоторой лингвистической переменной.

3) **Аккумуляция** – объединение нескольких нечетких множеств, полученных в результате импликации, в одно, которое будет использовано при дефаззиикации.

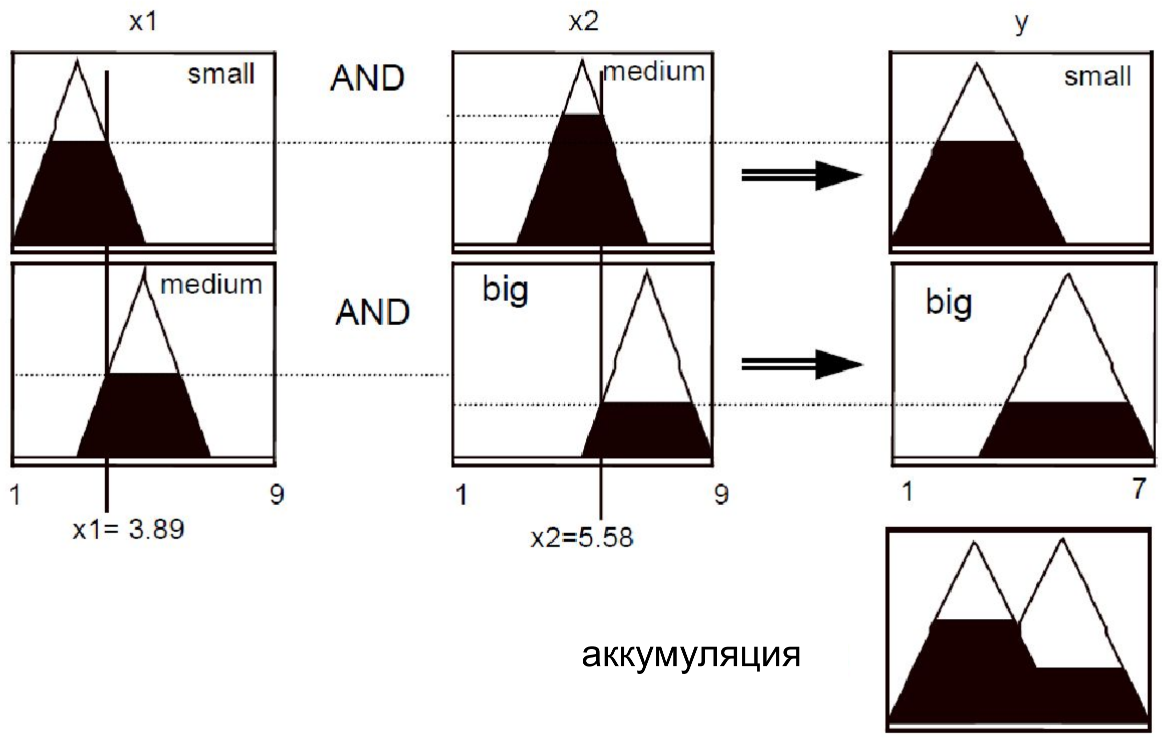
Агрегация может осуществляться по методу минимума/логического умножения (для условий, объединенных через И) или же максимума/логической суммы.

Импликация может осуществляться по методу минимума или по методу умножения.

Объединение правил (аккумуляция)

В большинстве случаев термы лингвистических переменных выбирают так, чтобы они накладывались друг на друга. В этом случае часто возникает ситуация, когда одновременно работают несколько правил, следовательно, возникает несколько возможных значений выходной величины.

В этом случае их объединение может осуществляться по правилу логического сложения или умножения, то есть объединения или пресечения множеств.



$$\mu(y) = \max^{i}\left[\min\left[\mu(x_1^i), \mu(x_2^i)\right]\right]$$

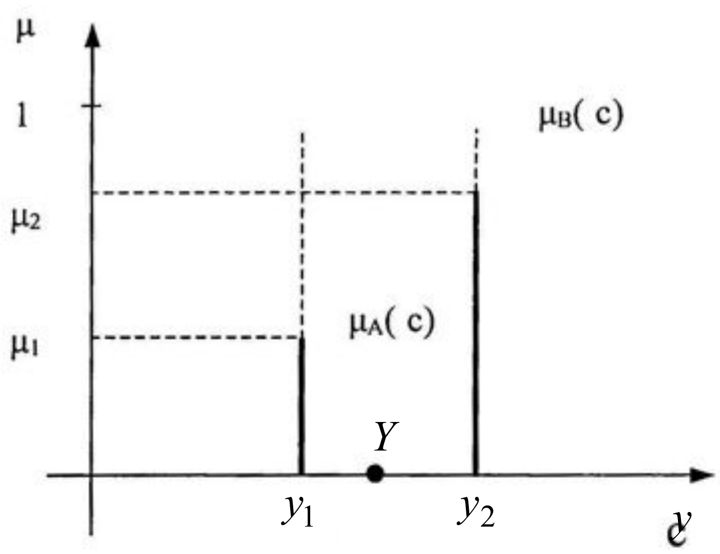
Дефаззификация

Последним этапом работы системы с нечеткой логикой является дефаззификация, в ходе которой вычисляется численное значение выходной величины из лингвистических переменных.

Существует множество методов дефаззификации, каждый из которых имеет преимущества в некоторых специфических областях.

Метод высот

Простейший из всех методов дефаззификации. Выходное значение системы вычисляется как средневзвешенное значение произведения функций принадлежности на пиковые значение отдельно взятых термов. Говоря о методе высот обычно подразумевают функции принадлежности типа singleton.



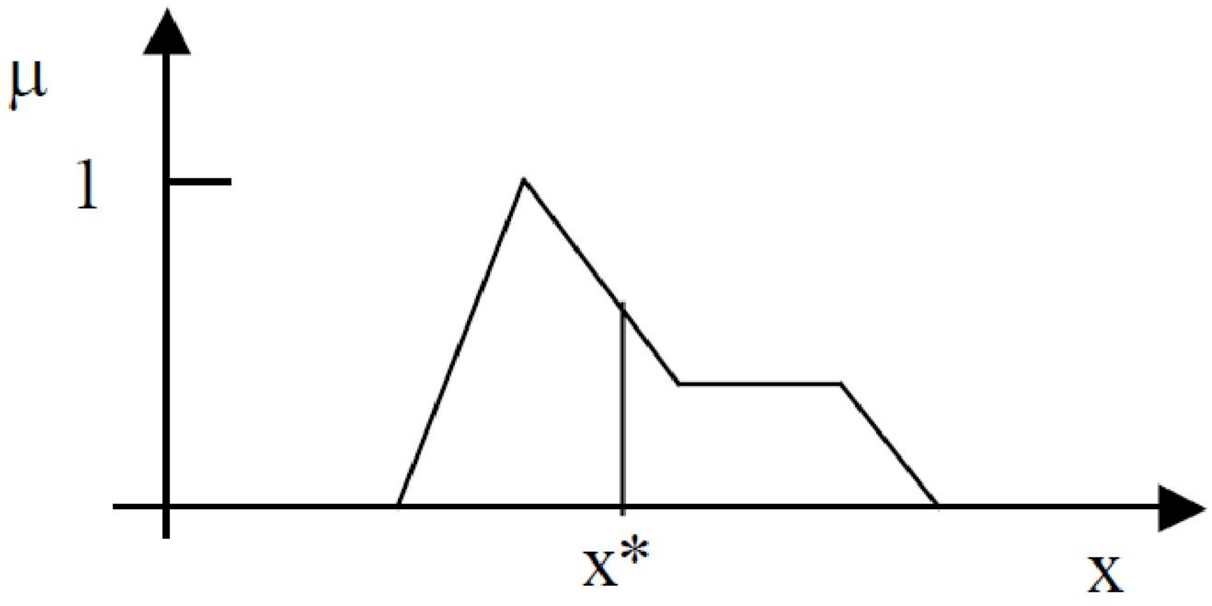
$$Y = \frac{\sum \mu_i y_i}{\sum \mu_i}$$

Методы дефаззификации

Метод центра тяжести

Все активные выходные термы объединяются в одну фигуру, при этом каждый из термов обрезается пропорционально значению функции активации. Для результирующей фигуры находится центр тяжести, горизонтальная координата которого будет значением выходной величины.

$$x^* = \frac{\int \mu_c(x).xdx}{\int \mu_c(x)dx}$$



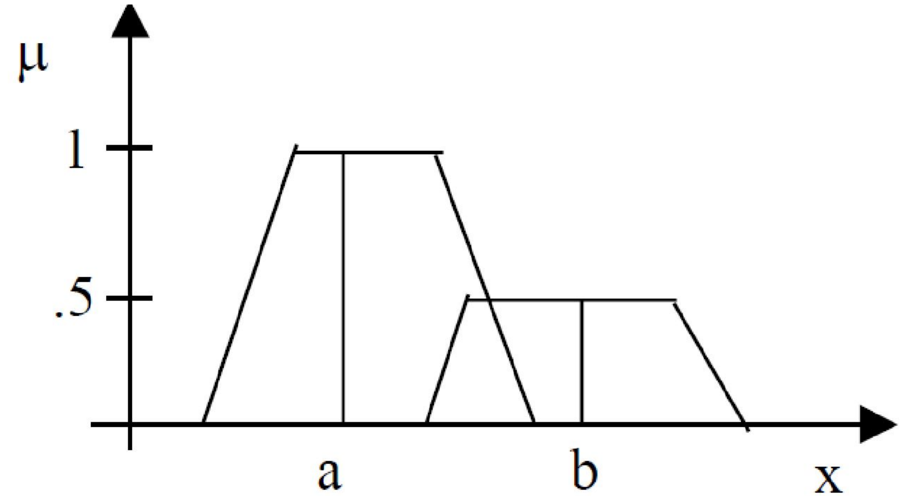
Методы дефаззификации

Метод средневзвешенного значения

Применим только для симметричных функций принадлежности. Значение выходной величины вычисляется как средневзвешенное значение произведения функций принадлежности на горизонтальные координаты пиков этих функций.

$$x^* = \frac{\sum \mu_c(x).x}{\sum \mu_c(x)}$$

$$x^* = \frac{\{a(1) + b(0.5)\}}{(1 + 0.5)}$$

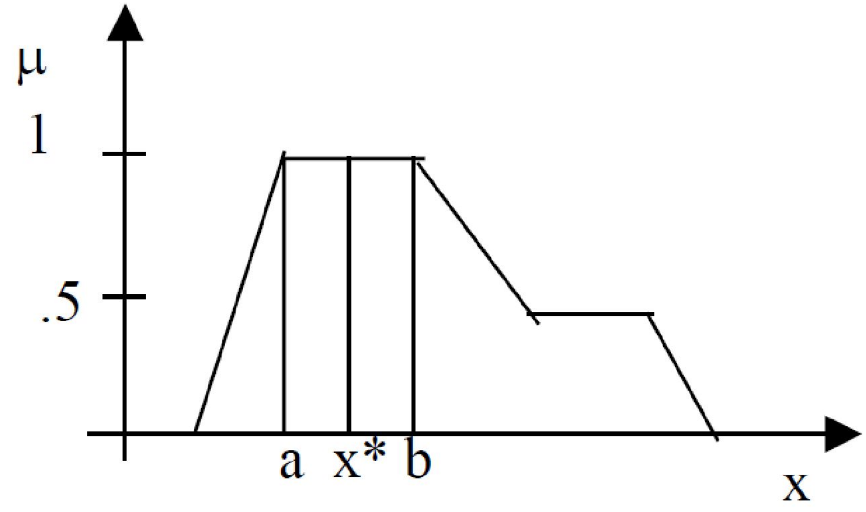


Методы дефаззификации

Метод среднего максимума

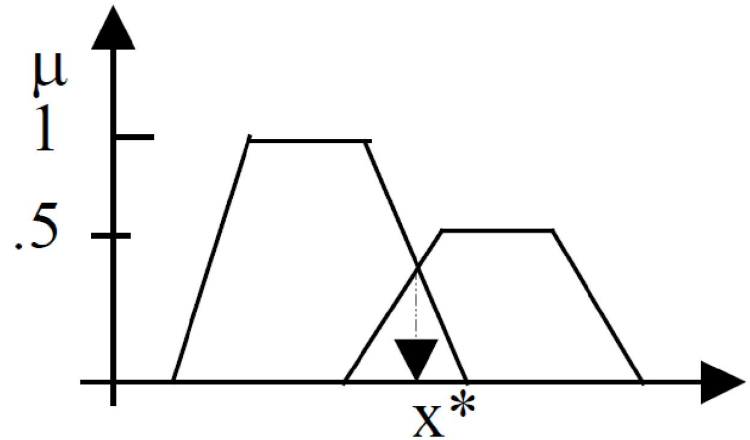
$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{N} \mu_{\max}(x_i)}{N}$$

$$x^* = \frac{(a+b)}{2}$$



Метод центра суммы

$$x^* = \frac{\sum_{i=1}^{m} x_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k(u_i)}{\sum_{i=1}^{m} \cdot \sum_{k=1}^{n} \mu_k(x_i)}$$



Особенности систем нечеткой логики

1) Робастность – нет необходимости предоставлять точную математическую модель объекта и осуществлять фильтрацию сигналов. При правильной настройке выходом системы нечеткой логики будет гладкая функция, независимо от степени изменения входных сигналов.

2) Система нечеткой логики настраивается исходя из желаний пользователя, что позволяет подстраивать качество работы всей системы путем внесения небольших изменений в нечеткие множества.

3) Система нечеткой логики может оперировать любым сигналом, предоставляющим информацию о поведении системы, без необходимости вычисления его производных.

4) Система нечеткой логики может оперировать с любым количеством входных сигналов и генерировать любое количество выходных сигналов. Однако при этом значительно усложняется процесс настройки, поэтому рекомендуется сложные системы разбивать на несколько более простых.

5) Системы нечеткой логики могут использоваться для регулирования нелинейных систем, для которых настройка классических регуляторов связана со значительными трудностями.