ЭЛЕМЕНТЫ СИММЕТРИИ В КРИСТАЛЛАХ

ЛЕКЦИЯ 3

ВОПРОСЫ ЛЕКЦИИ

- Симметрическая фигура
- Симметрические преобразования I рода (оси симметрии)
- Симметрические преобразования II рода (плоскости симметрии и центр симметрии)
- Сложные оси симметрии (зеркальные и инверсионные)
- Порядок записи формулы симметрии (группы симметрии) кристалла

СИММЕТРИЧЕСКАЯ ФИГУРА

Симметрической фигурой называется такая фигура, в которой равные части расположены так, что фигура совмещается целиком сама с собой при помощи некоторых операций симметрических преобразований.

Всякая симметричная фигура состоит из закономерно повторяющихся равных частей (на рис.3.1а $AB = A_1B_1$ $BC = B_1C$);
рис.3.1б пример несимметричной фигуры.

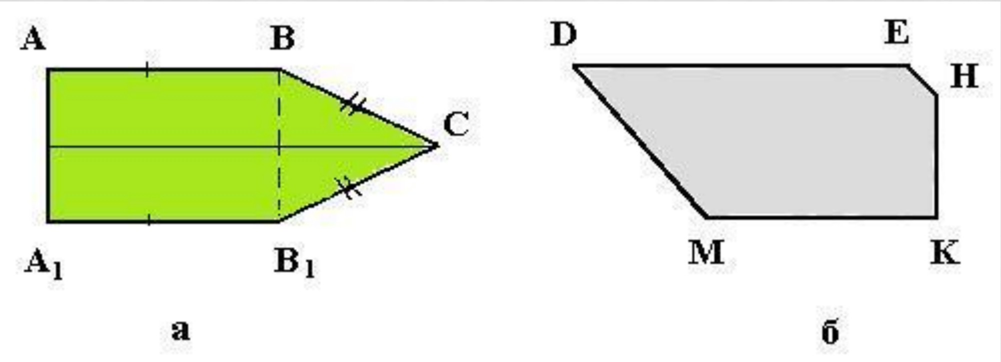


Рис.3.1.

Операция совмещения частей симметричной фигуры и фигуры в целом называется **симметрическим преобразованием**.

Операции вращения (повороты) относятся к симметрическим преобразованиям I рода,
а операции отражения – к симметрическим преобразованиям II рода.

Симметрические преобразования выражаются через геометрические образы, которые называются **элементами симметрии**.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ I РОДА (ОСИ СИММЕТРИИ)

Осью симметрии называется прямая линия, при повороте вокруг которой на некоторый определённый угол α фигура совмещается сама с собой.

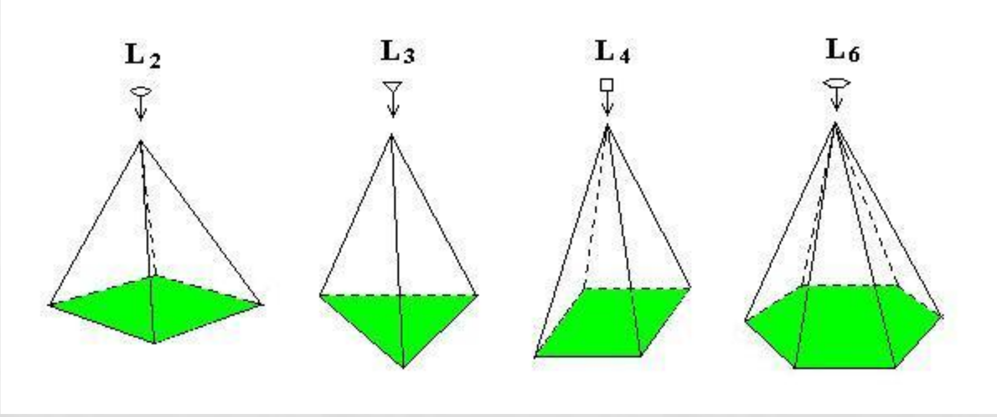
Наименьший угол поворота α, приводящий фигуру к самосовмещению, называется <u>элементарным углом поворота оси</u>. 360/α = n, где n – целое число.

Число n, показывающее сколько раз элементарный угол поворота оси содержится в 360^0, называется <u>порядком оси.</u>

Элементарный угол поворота оси первого порядка (n = 1) равен 360^0. Так как каждая фигура, будучи повернута вокруг любого направления на 360^0, совмещается сама с собой, то всякая фигура обладает бесконечным количеством осей первого порядка. Такие оси не являются характерными, поэтому они обычно не упоминаются.

В кристаллических многогранниках возможны не любые оси симметрии, а только оси первого, второго, третьего, четвертого и шестого порядка. Для обозначения осей симметрии употребляется буква Ln, а порядок оси указывается маленькой цифрой n, располагаемой справа от буквы (например, L_4 - ось четвертого порядка).

Рис.3.2



Оси симметрии пятого и выше шестого порядка в неорганических кристаллах невозможны.
Это положение является одним из основных законов кристаллографии и называется <u>законом симметрии кристаллов.</u>
Как и др. геометрические законы кристаллографии, закон симметрии кристаллов объясняется решетчатым строением кристаллического вещества.
Докажем, что ось пятого порядка не удовлетворяет законам пространственной решетки и тем самым докажем ее невозможность в кристаллических многогранниках.
Предположим, что ось пятого порядка в пространственной решетке возможна. Пусть эта ось будет перпендикулярна плоскости чертежа, пересекая ее в точке О (рис.3.3.). В частном случае точка О может совпадать с одним из узлов решетки.

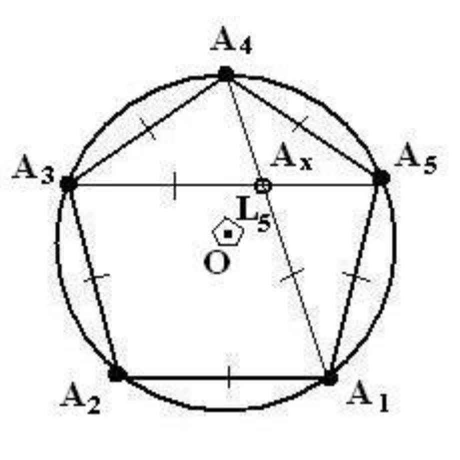


Рис.3.3.

Возьмем ближайший от оси узел решетки A_1, лежащий в плоскости чертежа. Так как вокруг оси пятого порядка все повторяется пять раз, то ближайших к ней узлов в плоскости чертежа должно быть всего пять A_1,A_2,A_3,A_4,A_5. Располагаясь на одинаковых расстояниях от точки О в вершинах правильного пятиугольника, они совмещаются друг с другом при повороте вокруг О на 360/5=72°.
Эти пять узлов, лежащие в одной плоскости, образуют плоскую сетку пространственной решетки, и поэтому к ним применимы все основные свойства решетки. Если узлы A_1 и A_2 принадлежат ряду плоской сетки с промежутком A_1A_2, то через любой узел решетки можно провести ряд, параллельный ряду A_1A_2. Проведем такой ряд через узел A_3. Этот ряд, проходящий и через узел A_5, должен иметь промежуток, равный A_1A_2, т. к. в пространственной решетке все параллельные ряды обладают одинаковой плотностью. Однако отрезок A_3A_5 больше промежутка A_1A_2. Следовательно, на расстоянии $A_3A_x = A_1A_2$ от узла A_3 должен находиться еще один узел A_x. Однако дополнительный узел A_x оказывается лежащим внутри круга, но не совпадает с точкой О. Причем, как видно из рис.2.4.2., узел A_x расположен ближе к оси О, чем узел A_1, взятый по условию ближайшим к оси пятого порядка.

Таким образом, сделанное допущение о возможности оси пятого порядка в пространственных решетках приводит к противоречию и поэтому является ошибочным. Поскольку существование оси пятого порядка несовместимо с основными свойствами пространственной решетки, то такая ось невозможна и в кристаллах.
Аналогичным образом доказывается невозможность существования в кристаллах осей симметрии выше шестого порядка и, наоборот, возможность в кристаллах осей второго, третьего, четвертого и шестого порядка, присутствие которых не противоречит свойствам пространственных решеток.

В кристаллических многогранниках оси симметрии могут проходить
через центры противоположных граней перпендикулярно к ним,
через середины противоположных ребер перпендикулярно к ним (только L_2),
через вершины многогранника
и через вершины и центры граней

Кристалл может иметь несколько осей симметрии одного порядка, количества которых указывается коэффициентом перед буквой. Например, в прямоугольном параллелепипеде присутствует $3L_2$, т. е. три оси симметрии второго порядка; в тригональной призме имеется L_3 и три оси второго порядка $3L_2$ (рис.3.4).

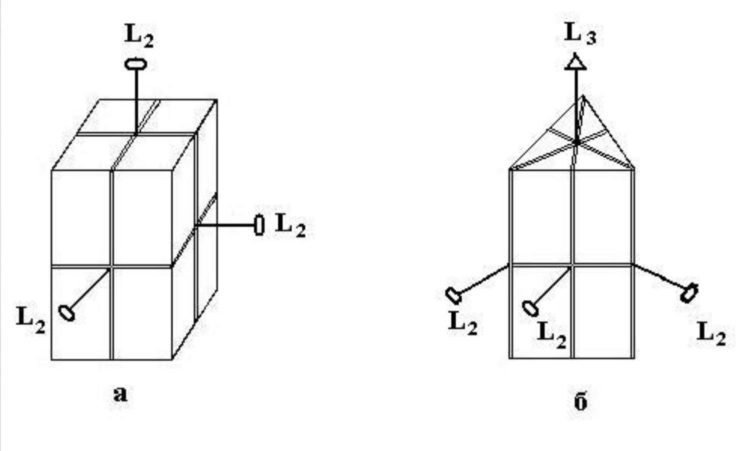


Рис.3.4. а) Многогранник с симметрией $3L_23PC$;
б) Многогранник с симметрией L_33L_24P

Самым представительным набором осей симметрии $3L_4$, $4L_3$ и $6L_2$ обладает куб,
т. е. три оси симметрии четвертого порядка, четыре оси третьего порядка и шесть осей второго порядка (рис.3.5)

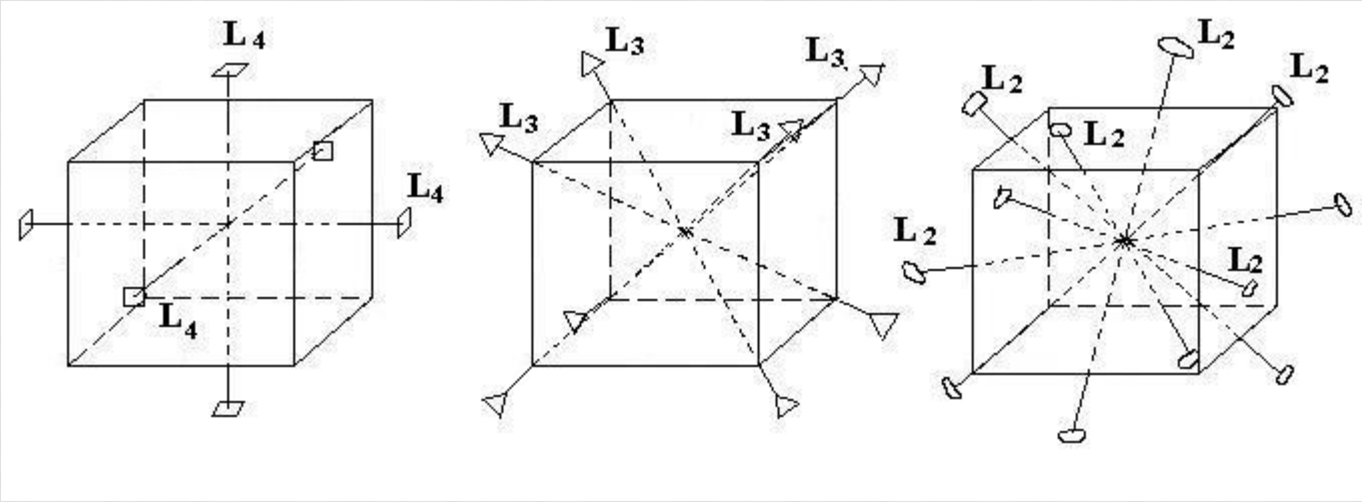


Рис.3.5. Оси симметрии в кубе

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ II РОДА (ПЛОСКОСТИ СИММЕТРИИ И ЦЕНТР СИММЕТРИИ)

Плоскостью симметрии называется плоскость, которая делит фигуру на две равные части, расположенные друг относительно друга как предмет и его зеркальное отражение. Плоскость симметрии обозначается буквой Р.

Для отражения некоторой фигуры ABD в плоскости Р (рис.3.6) из каждой её точки опускают перпендикуляры на плоскость отражения и продолжают их по другую сторону плоскости на расстояния, равные расстояниям отражаемых точек до плоскости Р. В результате получаем новую фигуру $A_1B_1D_1$.

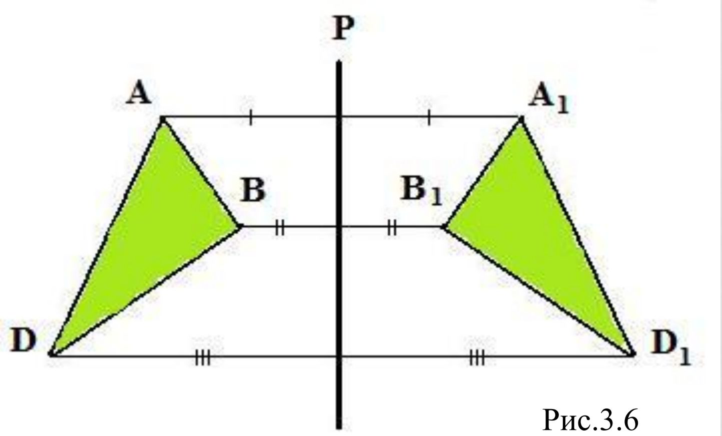


Рис.3.6

Не каждая плоскость, делящая фигуру пополам, является плоскостью симметрии.
Например, в прямоугольнике только две плоскости, параллельные его сторонам (P_1 и P_2) являются плоскостями симметрии (рис. 3.7).

Плоскости, идущие вдоль диагоналей прямоугольник плоскостями симметрии не являются, т. к. образующиеся треугольники зеркально не равны.

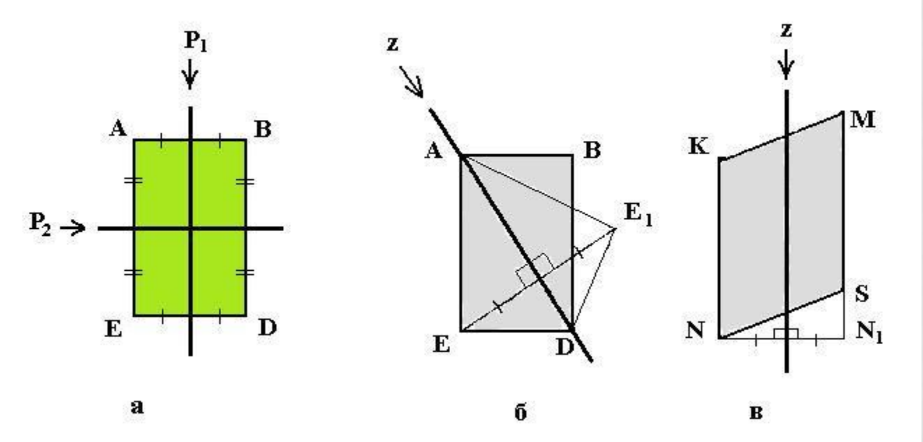


Рис.3.7

Центром симметрии (инверсии) называется такая точка внутри фигуры, при отражении в которой всех точек последняя совмещается сама с собой. Центр симметрии обозначается С.

Чтобы произвести отражение какой-либо точки фигуры в центре инверсии С, нужно соединить эту точку и точку С прямой линией (рис. 3.8). Как видно из рис. 3.8 плоскости треугольников параллельны, но стороны имеют противоположные направления. Треугольники ABD и $A_1B_1D_1$, связанные центром инверсии С, равны друг другу и обратно параллельны.

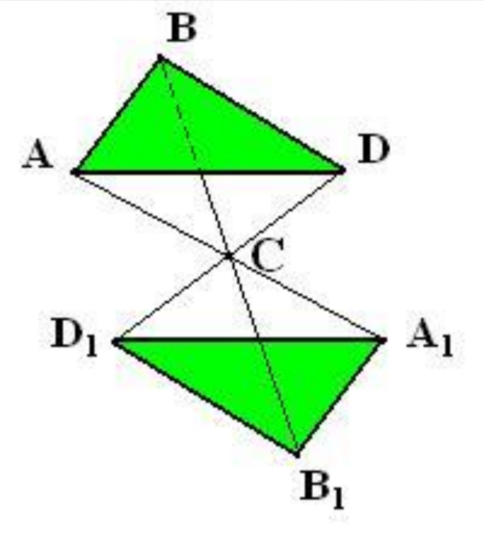


Рис.3.8.

Центр инверсии называют центром обратного равенства, потому что каждая грань при наличии центра инверсии должна иметь равную себе и обратно параллельную грань.
На рис.3.9. Приведены примеры многогранников с центром инверсии и без него.

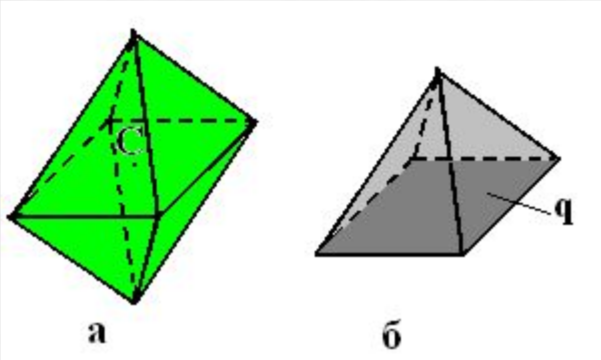


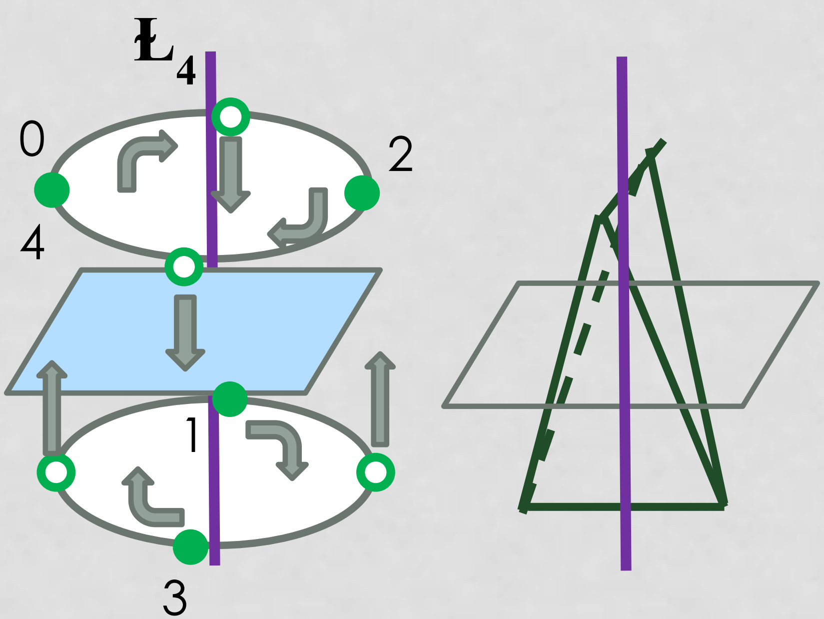
Рис.3.9.
а) Тетрагональная дипирамида имеет центр инверсии С: все грани попарно равны и обратно параллельны;
б) Тетрагональная пирамида не имеет центра инверсии, т.к. для грани **q** нет парной параллельной грани.

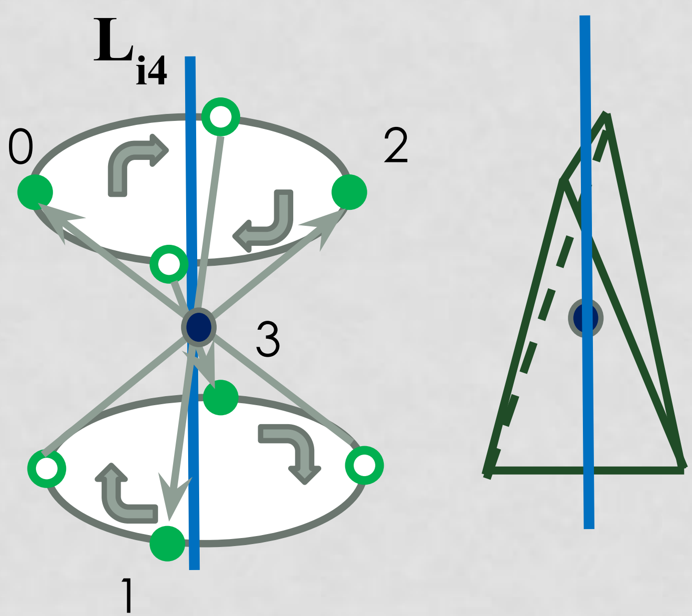
СЛОЖНЫЕ ОСИ СИММЕТРИИ (ЗЕРКАЛЬНЫЕ И ИНВЕРСИОННЫЕ)

Сложные оси симметрии позволяют совмещать равные фигуры (части фигуры) путем двойной операции – поворота (симметрическое преобразование I рода) и отражения (симметрическое преобразование II рода) .

Зеркально-поворотной осью называется прямая линия, при повороте вокруг которой на некоторый угол α с последующим или предварительным отражением в перпендикулярной к ней плоскости, фигура совмещается сама с собой. Обозначается Łn, где n=1,2,3,4,6 (порядок оси).

Инверсионной осью симметрии называется прямая линия, при повороте вокруг которой на некоторый определенный угол α с последующим отражением в центральной точке фигуры, как в центре инверсии, фигура совмещается сама с собой. Обозначается Lin, где n=1,2,3,4,6 (порядок оси).





Рассмотрев действия сложных осей симметрии, можно прийти к следующему выводу:
Операция каждой зеркальной оси с элементарным углом поворота α может быть заменена операцией инверсионной оси с элементарным углом поворота β=180°-α.

1. $Ł_1 = L_{i2} = P$

2. $Ł_2 = L_{i1} = C$

3. $Ł_3 = L_{i6} = L_3P$

4. $Ł_4 = L_{i4}$

5. $Ł_6 = L_{i3} = L_3C$

При описании симметрии кристаллов чаще используют инверсионные оси симметрии. В случае записи инверсионной оси симметрии, замещающие ее простые элементы симметрии уже не учитывают.

ПОРЯДОК ЗАПИСИ ФОРМУЛЫ СИММЕТРИИ (ГРУППЫ СИММЕТРИИ) КРИСТАЛЛА

1. Вначале определяют оси высших порядков, затем оси второго порядка. Ось первого порядка записывается только в том случае, если не обнаружено никаких других элементов симметрии.
2. Далее записывают плоскости симметрии если они есть.
3. Самым последним записывается центр инверсии, если он есть.
4. Инверсионные оси следует искать лишь тогда, когда найдены простые оси, плоскости и центр инверсии (или проверено, что их нет)