Черкаський державний технологічний університет

Тема: «Інтерполювання функцій однієї змінної»

Дисципліна
“Інформаційні технології аналізу систем”

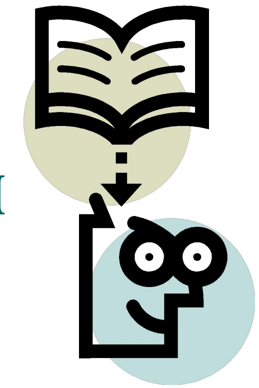
Лекція 10-11

Викладач: Герасименко І. В.

Питання:

1. Постановка задачі інтерполювання функцій.
2. Геометричний смисл задачі інтерполювання функцій.
3. Лінійна і квадратична інтерполяція.
4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.
5. Приклади інтерполювання функцій.
6. Екстраполювання функцій.
7. Засоби інтерполювання функцій в системах комп’ютерної математики.

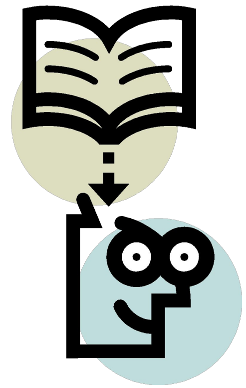
1. Постановка задачі інтерполювання функцій.



З усіх способів задання функції найбільш зручним у багатьох випадках є **аналітичний спосіб** у вигляді формули. Цей спосіб дає можливість обчислити значення функції для будь-якого фіксованого значення аргументу, а отже, і скласти таблицю її значень у деяких точках.

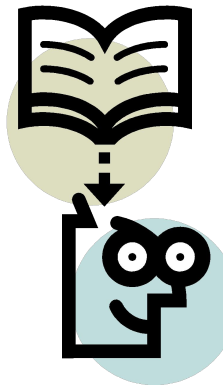
Складання таблиці значень функції називають **табулюванням функції**.

1. Постановка задачі інтерполювання функцій.



У практичних задачах значення функції, що представляють деяку фізичну величину, часто одержують у результаті експерименту у вигляді таблиці або графіка. Досить часто виникає необхідність знайти значення функції при значеннях аргументів, що відсутні в таблиці. Така задача, яку образно можна назвати задачею "читання таблиці між рядками", й одержала назву **задачі інтерполювання** (*inter* – між, *polio* – прикладати).

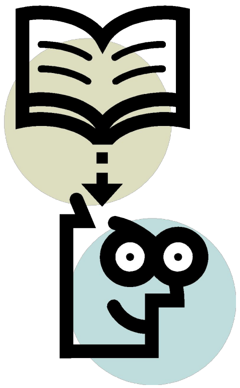
1. Постановка задачі інтерполювання функцій.



Задача інтерполювання функції розв'язується шляхом побудови деякого аналітичного виразу, який співпадає зі значеннями таблично заданої функції в скінченній кількості табличних значень аргументу.

Тому, задача інтерполювання функції в деякому розумінні обернена до задачі табулювання функції: **при табулюванні від аналітичного способу задання функції переходять до табличного, а при інтерполюванні – за табличними значеннями функції будується деякий аналітичний вираз**, тобто формула, що задає шукану функцію наближено.

1. Постановка задачі інтерполювання функцій.



Постановка задачі. Нехай деяка функція задана таблично, тобто для заданих значень аргументу x_i задані значення функції $y_i = f(x_i)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$.

Треба знайти аналітичний вираз деякої функції $F_n(x)$, котра наближала би дану функцію $f(x)$, тобто у точках x_i приймала би значення y_i $(i = 0,1,2,\ldots,n)$:

$$F_n(x_i) = f(x_i), i = 0,1,\ldots,n.$$

2. Геометричний смисл задачі інтерполювання функцій.

Геометричний смисл задачі інтерполювання функцій полягає у тому, щоб знайти деяку криву $F_n(x)$, котра проходила би через задану систему точок (x_i, y_i) $(i = 0,1,2,\dots,n)$ (рис. 1).

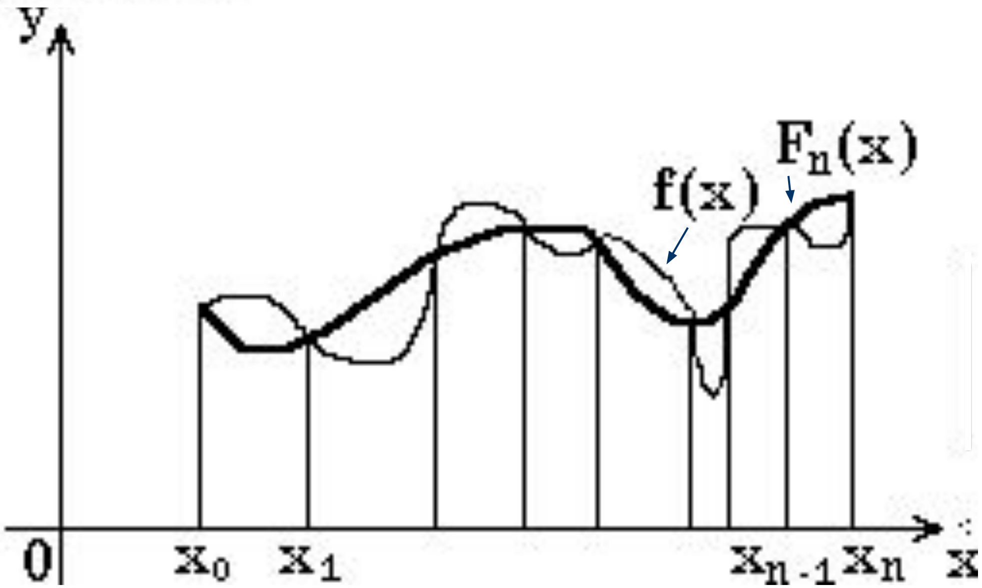
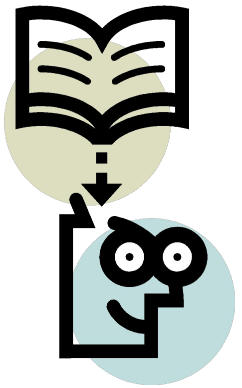


Рис.1.

2. Геометричний смисл задачі інтерполювання функцій.

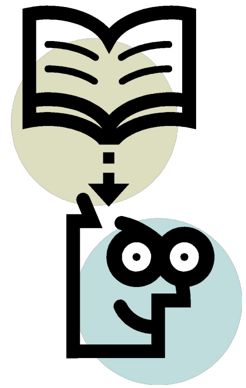


Інтуїтивно зрозуміло, що через задані точки можна провести нескінченну кількість різних кривих. Отже, задача відшукання функції $f(x)$ за скінченною кількістю її значень є невизначеною.

Але ця задача стає однозначною, якщо в якості наближеної функції $F_n(x)$ для функції $y = f(x)$, заданної $n+1$-им своїм значенням, обрати многочлен

$$y = F_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

2. Геометричний смисл задачі інтерполювання функцій.

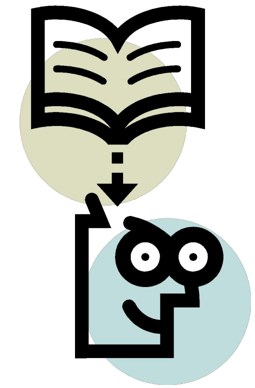


При цьому многочлен повинен задовольняти таким умовам:

1) в точках x_i $(i = 0,1,2,\dots,n)$ значення многочлена $F_n(x_i)$ співпадає зі значеннями функції $f(x_i)$, тобто $F_n(x_i) = f(x_i) = y_i$ $(i = 0,1,2,\dots,n)$;

2) в будь-якій іншій точці $\tilde{x} \in (x_0; x_n)$ виконується наближена рівність $F(\tilde{x}) \approx f(\tilde{x})$.

2. Геометричний смисл задачі інтерполювання функцій.

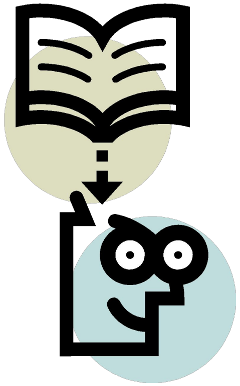


Інтерполювання за допомогою алгебраїчних многочленів називається **поліноміальним** або **параболічним інтерполюванням**,

многочлен $F_n(x)$ називається **інтерполяційним многочленом**,

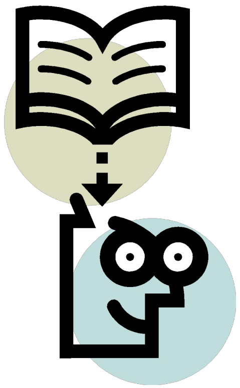
а точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ називаються **вузлами інтерполювання**.

2. Геометричний смисл задачі інтерполювання функцій.



Отже, основна ідея інтерполювання полягає в заміні функції, заданої таблицею її значень, інтерполяційним многочленом, що являє собою наближений аналітичний вираз даної функції $f(x)$. Одержаний інтерполяційний многочлен використовують не лише для аналітичного наближення таблично заданої функції, але й у тому випадку, якщо функція задана досить складним аналітичним виразом, яким незручно користуватися в процесі розрахунків, диференціювання або інтегрування.

3. Лінійна і квадратична інтерполяція.



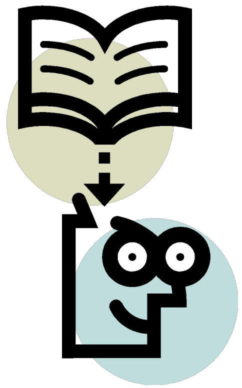
Найпростішими випадками інтерполювання многочленом $F_n(x)$ є випадки, коли $n=1$ і $n=2$.

При $n=1$ маємо многочлен першого степеня $F_1(x)=a_1x+a_0$, тобто лінійну функцію, тому інтерполювання многочленом $F_1(x)$ називається **лінійним інтерполюванням**.

Нехай для невідомої функції $f(x)$ маємо її значення у двох точках x_0, x_1:

$$f(x_0)=y_0,\ f(x_1)=y_1.$$

3. Лінійна і квадратична інтерполяція.



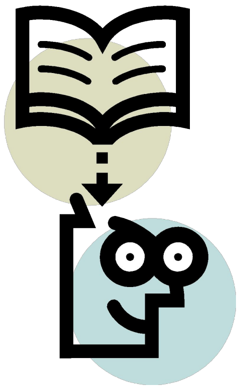
Графік лінійної функції $F_1(x) = a_1 x + a_0$ повинен проходити через ці точки, тому невідомі коефіцієнти a_1 і a_0 можна знайти з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_1 x_1 + a_0 = y_1 \end{cases}.$$

Розв'язавши цю систему одержимо:

$$a_1 = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1}, a_0 = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1},$$

3. Лінійна і квадратична інтерполяція.



тоді

$$F_1(x) = \frac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \cdot x + \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{x_0 - x_1},$$

або

$$F_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1, \qquad (*)$$

відповідно функцію $f(x)$ можна представити наближеною рівністю:

$$f(x) \approx \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot y_1,$$

яка називається **формулою лінійного інтерполювання**.

3. Лінійна і квадратична інтерполяція.

Геометричний смисл: заміна дуги кривої $y = f(x)$ на $[x_0, x_1]$ відрізком прямої лінії $y = F_1(x)$, що проходить через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1) (рис. 2).

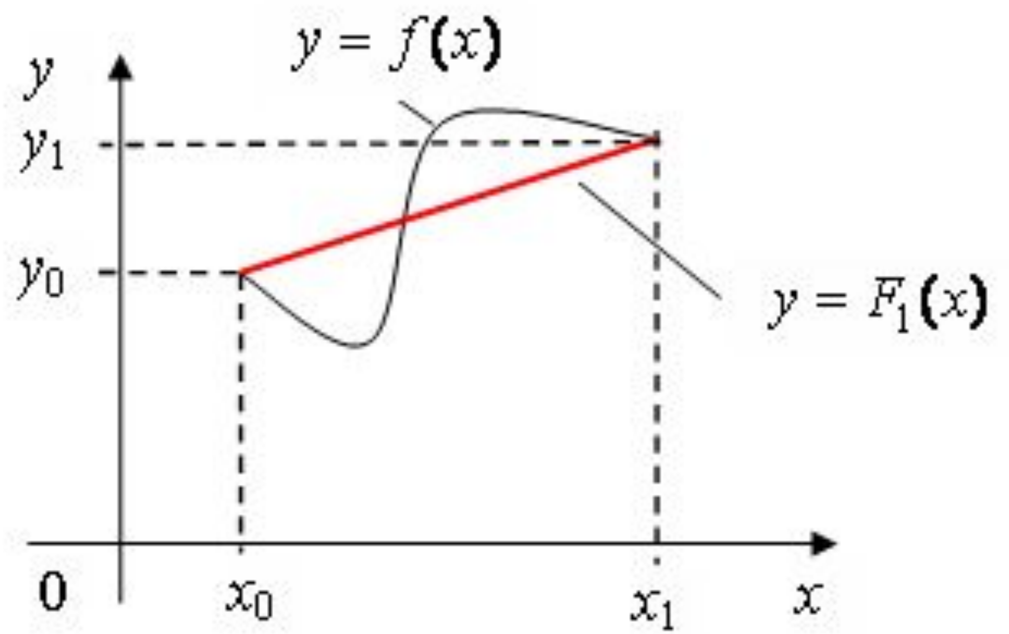
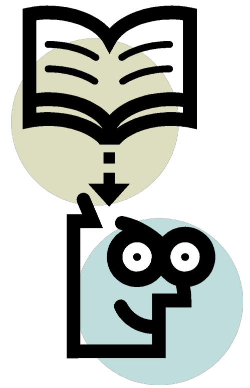


Рис. 2.

3. Лінійна і квадратична інтерполяція.



Більш точні результати можна одержати, якщо замість лінійної інтерполяції використовувати квадратичну інтерполяцію $(n = 2)$, тобто якщо дугу кривої $y = f(x)$ заміняти не відрізком прямої лінії, а параболою

$$F_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 .$$

Нехай для невідомої функції $f(x)$ маємо її значення у трьох точках x_0, x_1, x_2:

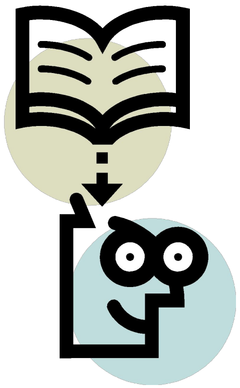
$$f(x_0) = y_0,\ f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2 .$$

3. Лінійна і квадратична інтерполяція.

Графік інтерполяційного многочлена повинен проходити через ці точки, тому невідомі коефіцієнти a_2, a_1 і a_0 можна знайти з системи рівнянь:

$$\begin{cases} a_2 x_0^2 + a_1 x_0 + a_0 = y_0 \\ a_2 x_1^2 + a_1 x_1 + a_0 = y_1 \\ a_2 x_2^2 + a_1 x_2 + a_0 = y_2 \end{cases}$$

3. Лінійна і квадратична інтерполяція.



Наближене значення функції $f(x)$ в будь-якій точці $x \in (x_0, x_2)$ обчислюється за формулою:

$$f(x) \approx \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 + \qquad (**)$$

$$+ \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2$$

Цю формулу називають **формулою квадратичного інтерполювання**.

3. Лінійна і квадратична інтерполяція.

Геометричний смисл: заміна дуги кривої $y = f(x)$ на $[x_0, x_2]$ дугою параболи $y = F_2(x)$, що проходить через точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) (рис. 3).

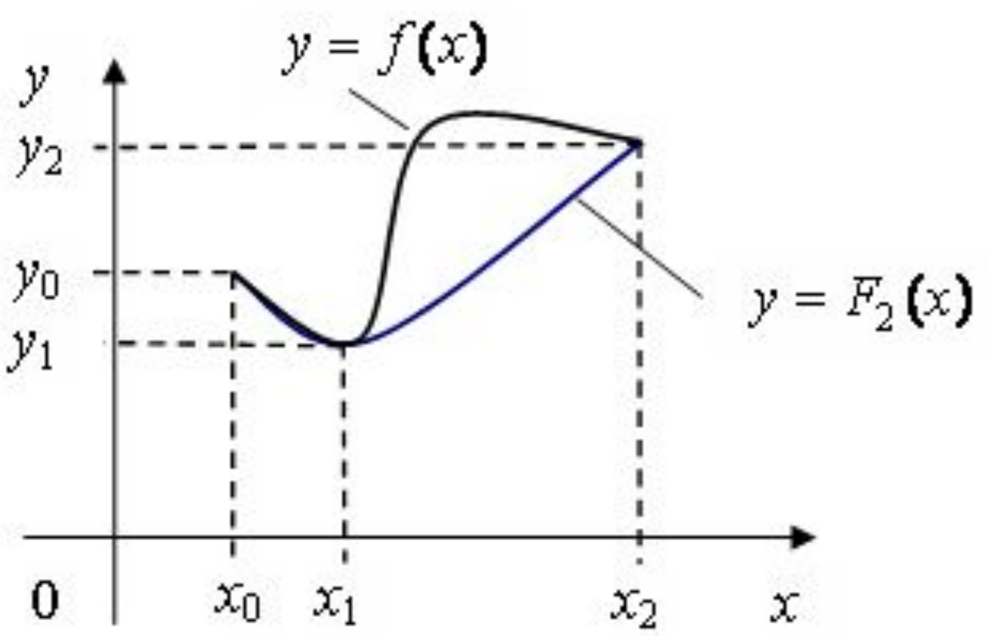
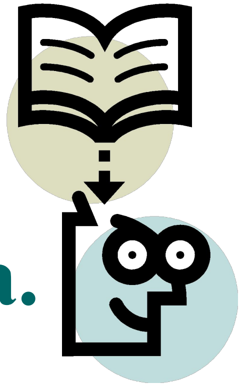


Рис. 3.

4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.



Нехай деяка функція $f(x)$ задана своїми значеннями в $(n+1)$-му вузлі інтерполювання $x_0, x_1, \dots, x_n$:

$$f(x_i) = y_i,\ i = 0,1,\dots,n. \qquad (1)$$

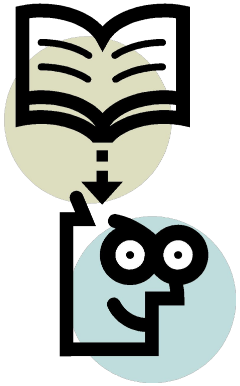
В якості інтерполяційного многочлена візьмемо многочлен n-го степеня виду:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0, \quad (2)$$

причому значення $P_n(x)$ у вузлах інтерполювання повинні співпадати зі значеннями заданої функції, тобто:

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i,\ i = 0,1,\dots,n. \qquad (3)$$

4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.

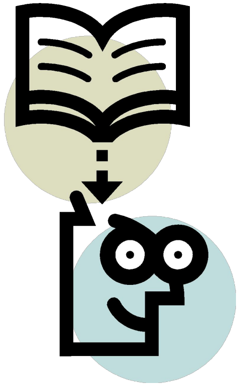


Ця умова визначає систему з $(n+1)$-го лінійного рівняння виду:

$$\begin{cases} a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0^1 + a_0 = y_0, \\ a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1^1 + a_0 = y_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n^1 + a_0 = y_n \end{cases} \qquad (4)$$

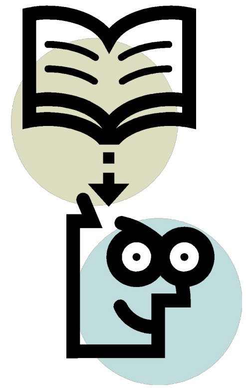
для знаходження $(n+1)$ коефіцієнта $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ шуканого многочлена $P_n(x)$.

4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.



Оскільки вузли інтерполювання різні (det $\neq 0$), то одержана система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок. Отже, інтерполяційний многочлен виду (2) існує і є єдиним, але у залежності від способу побудови форма запису його може бути різною, наприклад у формі *Ньютона* або *Гаусса*. Єдиність інтерполяційного мнолочлена виду (2) можна довести *методом відсупротивного*.

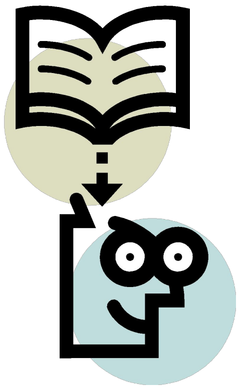
4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.



Для побудови многочлена $P_n(x)$ будемо будувати допоміжні многочлени $F_i(x), i=0,1,\ldots,n$ степені n.

Многочлен $F_0(x)$ побудуємо так, щоб у вузлі інтерполювання $x = x_0$ він прийняв значення $F_0(x_0)=1$, а в інших вузлах $x_i(i=1,\ldots,n)$ $F_0(x_1)=F_0(x_2)=\ldots=F_0(x_n)=0$.

4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.

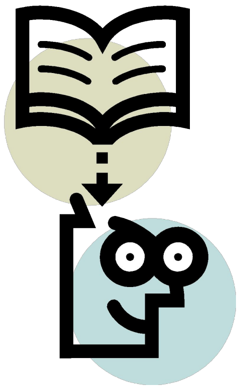


Такий многочлен має вигляд:

$$F_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)}.$$

Дійсно, вузли інтерполювання $x_1, x_2, \dots, x_n$ є коренями многочлена $F_0(x)$, тому, $F_0(x_i)=0$ $(i=1,2,\dots,n)$, а в точці $x=x_0$ чисельник дорівнює знаменнику, отже, $F_0(x_0)=1$.

4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.



Далі будуємо многочлен

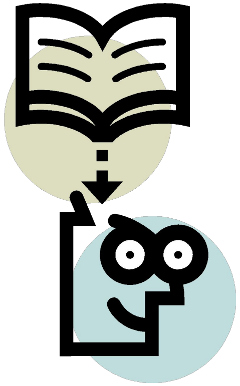
$$F_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)\ldots(x - x_n)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)\ldots(x_1 - x_n)}.$$

Зрозуміло, що

$$F_1(x_1) = 1, \text{ а } F_1(x_0) = F_1(x_2) = F_1(x_3) = \ldots = F_1(x_n) = 0.$$

Аналогічним чином можна побудувати многочлени $F_2(x), F_3(x), \ldots, F_n(x)$, рівні 1 відповідно у вузлах $x_2, x_3, \ldots, x_n$ і рівні нулю в усіх інших вузлах інтерполювання.

4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.



У загальному вигляді многочлени $F_i(x)$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ можно записать так:

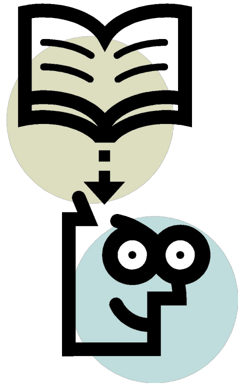
$$F_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)},$$

$$i = 0,1,2,\ldots,n.$$

Покажемо далі, що шуканий многочлен має вигляд:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} F_i(x) y_i. \qquad (5)$$

4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.

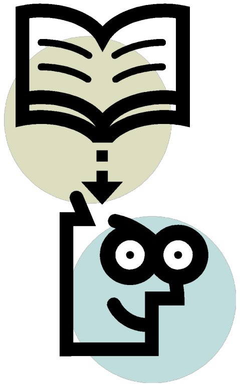


Дійсно, добутки $F_i(x)y_i$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ перетворюються в нуль у всіх вузлах інтерполювання, крім вузла x_i, де вони рівні y_i, оскільки $F_i(x_i) = 1$, тобто

$$P_n(x_i) = y_i \quad (i = 0,1,2,\ldots,n).$$

Крім того, степінь многочлена $P_n(x)$ рівна n, оскільки кожний доданок суми $F_i(x)y_i$ є многочленом степені n.

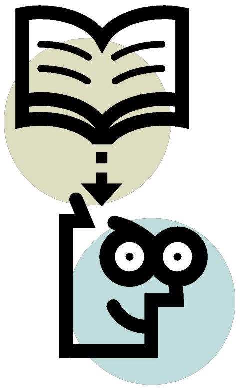
4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.



Побудований многочлен (5) називають **інтерполяційним многочленом Лагранжа** і записують так:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i. \quad (6)$$

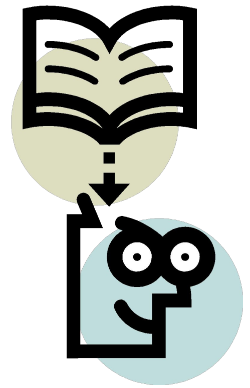
4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.



Інтерполяційна формула Лагранжа для наближеного обчислення значень функції $f(x)$ у проміжних точках $\tilde{x} \in (x_0; x_n)$, $\tilde{x} \neq x_i$ $(i = 0,1,2,\ldots,n)$ має вигляд:

$$f(\tilde{x}) \approx \sum_{i=0}^{n} \frac{(\tilde{x}-x_0)(\tilde{x}-x_1)\ldots(\tilde{x}-x_{i-1})(\tilde{x}-x_{i+1})\ldots(\tilde{x}-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} y_i. \quad (7)$$

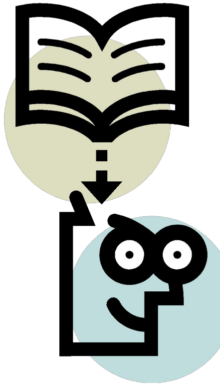
4. Параболічне інтерполювання. Інтерполяційна формула Лагранжа.



У частинному випадку, якщо є два вузли інтерполювання x_0 і x_1, то з формули (6) одержуємо формулу лінійного інтерполювання (*), а якщо три вузли x_0, x_1, x_2, то формулу квадратичного інтерполювання (**).

Оскільки крива, яка є графіком многочлена $P_n(x)$, називається параболою n-го порядку, то інтерполювання многочленом Лагранжа називають **параболічним інтерполюванням**.

5. Приклади інтерполювання функцій.

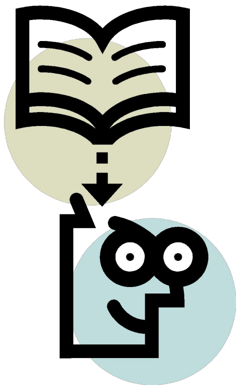


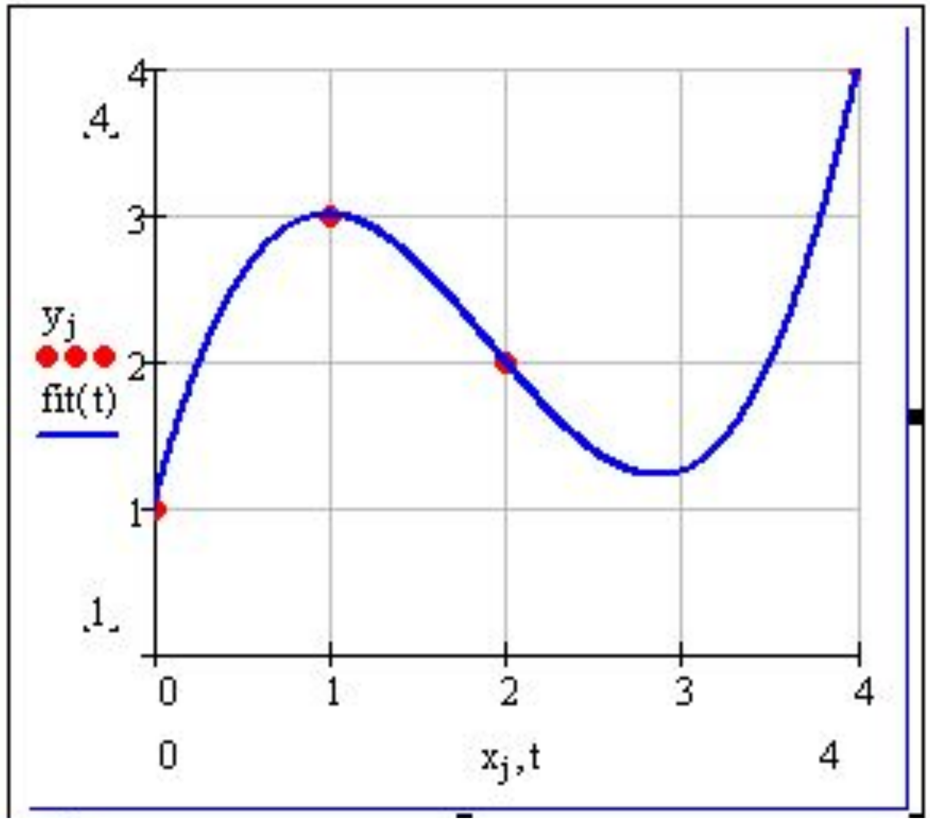
Зрозуміло, що, чим більше вузлів інтерполювання на відрізку $[x_0; x_n]$, тим точніше інтерполяційний многочлен наближає задану функцію.

Приклад 1. Для функції, значення якої в чотирьох точках задані таблицею побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа:

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	3	2	4

5. Приклади інтерполювання функцій.

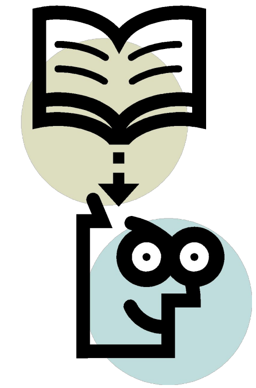




Відповідь: $P_3(x) = \frac{13}{24}x^3 - \frac{75}{24}x^2 + \frac{55}{12}x + 1$,

де a_3=0.541(6) a_2=-3.125 a_1=4.58(3), a_0=1.

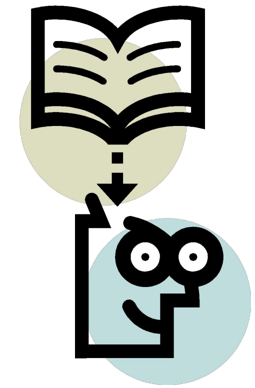
6. Екстраполювання функцій.



Інтерполяційні формули застосовуються для знаходження значень функції для проміжних значень аргументів, відсутніх у таблиці. Проте за цими формулами можна знаходити і значення функцій для значень аргументі, що розташовані за межами таблиці.

Знаходження значень функції $y=f(x)$ для значень аргументу x, що розташовані за межами таблиці, називається *екстраполюванням* або *екстраполяцією*.

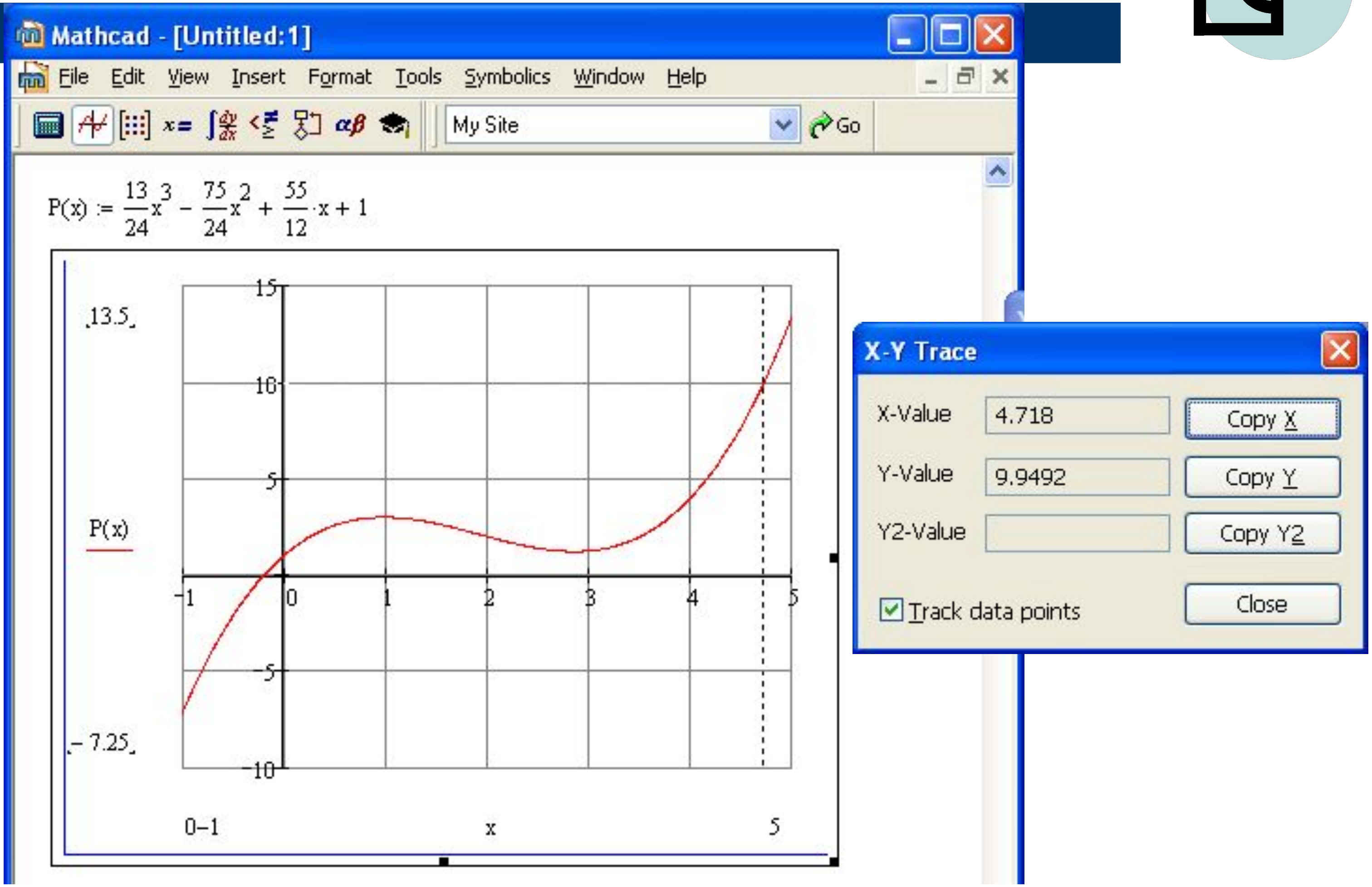
6. Екстраполювання функцій.



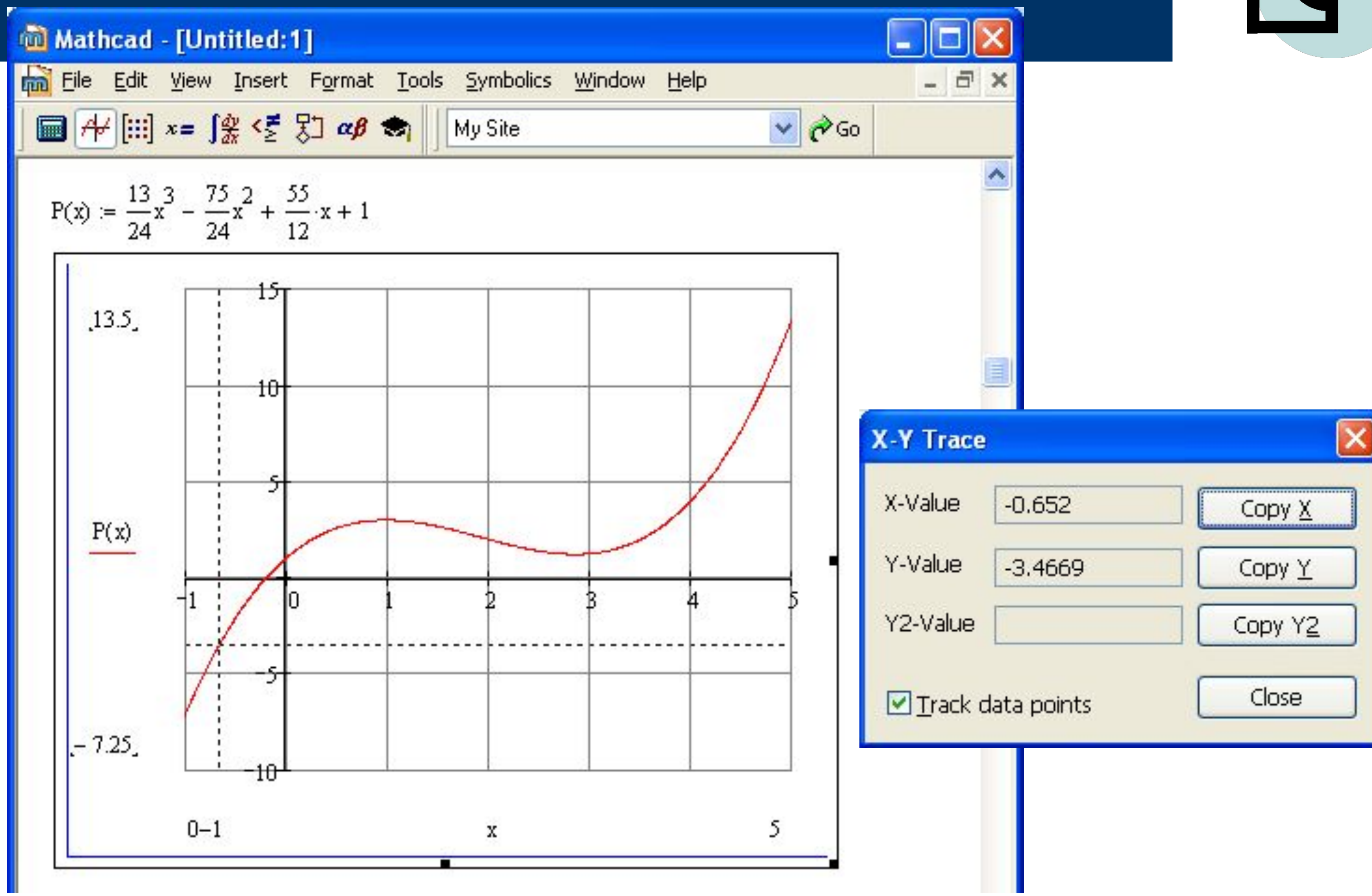
Операція екстраполювання, взагалі кажучи, менш точна, ніж операція інтерполювання, і її слід застосовувати тоді, коли:

- функція біля кінців таблиці змінюється плавно;
- відстань від кінців таблиці, на якій екстраполюють, невелика (менша ніж відстань між сусідніми вузлами).

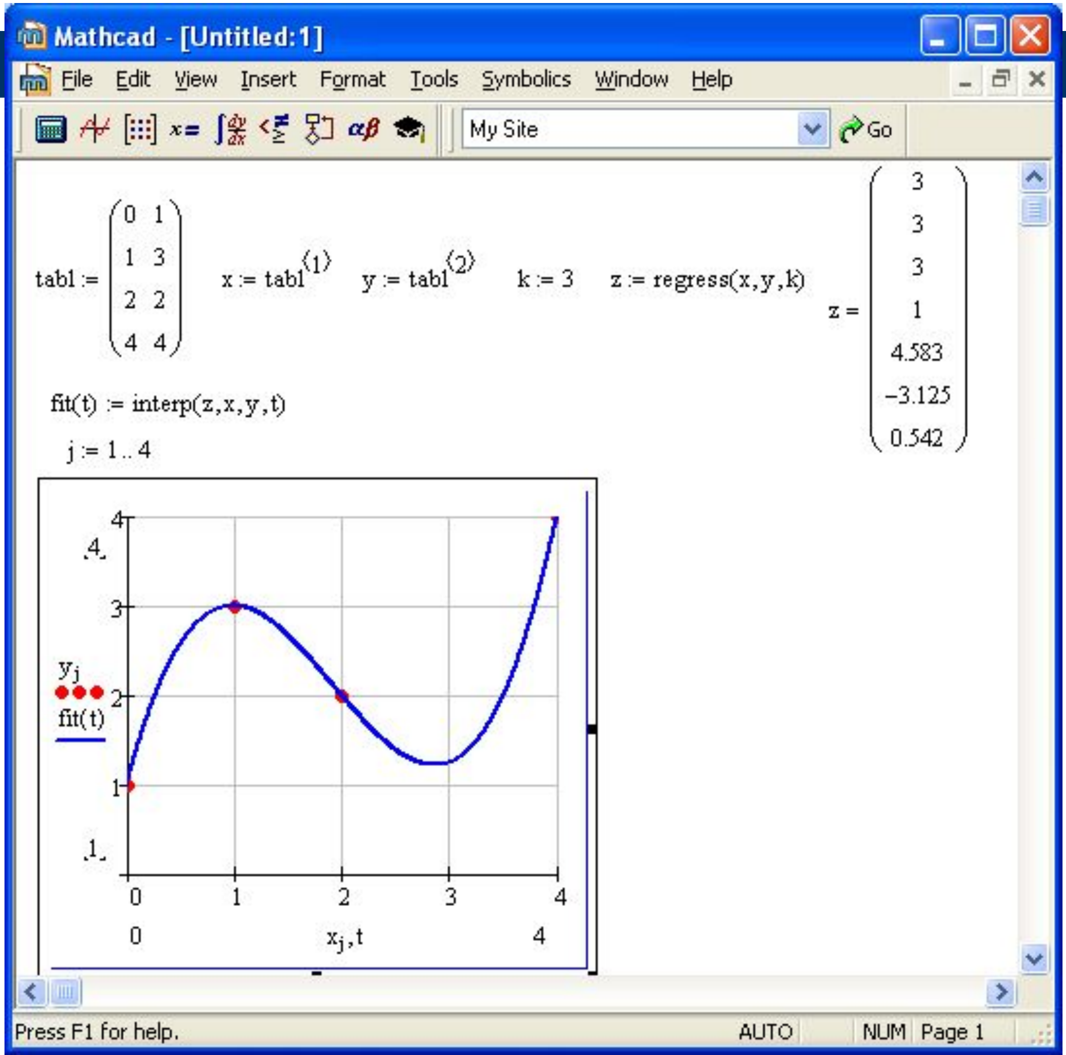
6. Приклад екстраполювання вперед.



6. Приклад екстраполювання назад.



7. Засоби інтерполювання функцій в системах комп’ютерної математики.



Ваші запитання

8(0472) 730271

herasymenkoinna@gmail.com

Дякую за увагу!