# Графи, орієнтовані графи, дерева

$\overline{((A\&(\overline{B}))}$

**Лекція**

*Матеріал для презентації взято з підручника*
*Андерсон Д.А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ.. – М.: Изд. дом «Вильямс», 2003, с. 392-421.*

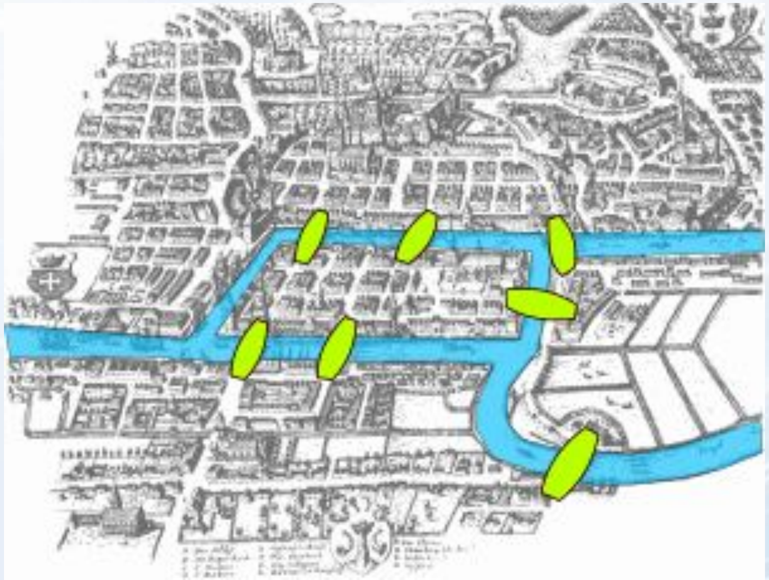
# План:

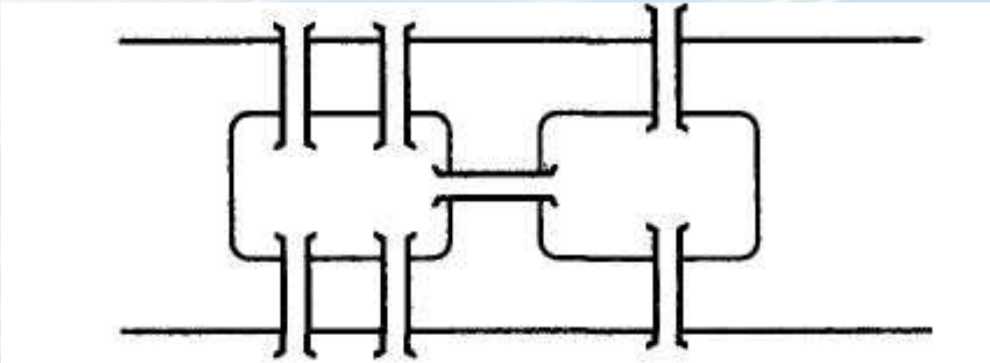
# З ІСТОРІЇ

Теорія графів бере початок з рішення відомим математиком Ейлером задачі про **Кенігсбергські мости** в 1736 році.

У той час у місті Кенігсберзі було два острови, з'єднаних 7 мостами з берегами річки Преголь і один з одним.

Завдання полягає в наступному: здійснити прогулянку по місту таким чином, щоб, пройшовши рівно по одному разу по кожному мосту, повернутися в те ж місце, звідки починалася прогулянка.



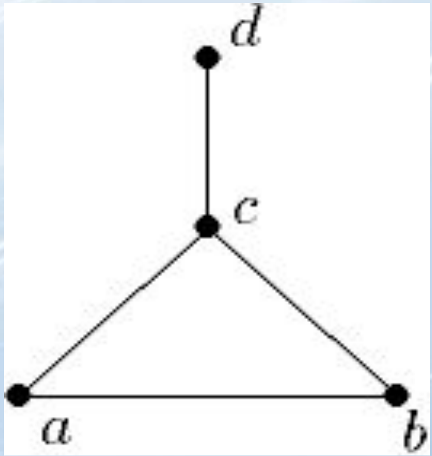


# ГРАФИ

Теорія графів і, особливо, алгоритми на графах широко застосуються у програмуванні. Теорія графів надає дуже зручну мову для опису програмних та багатьох інших моделей.

**(*Простим*) *графом*** (graph) називають пару $G = (V, E)$, де $V$ – непорожня скінченна множина елементів довільної природи (***множина вершин***), а $E$ - множина двоелементних підмножин множини $V$ (***множина ребер***). Позначають $G(V, E)$ або $<V, E>$, $|V| = p$, $|E| = q$.

$G = (V, E)$; $V = \{a, b, c, d\}$;
$E=\{\{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}$.



## *Геометрична інтерпретація*

Граф зображують у вигляді діаграми, на якій вершини позначають точками, а ребра - лініями між цими точками.

**1.** Граф $G(V, E)$, де $V = \{a, b, c\}$ і $E=\{\{a, b\}, \{b, c\}\}$ зображують як на рис. 1 або рис. 2.

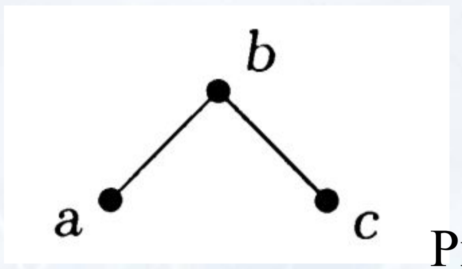



Рис. 1

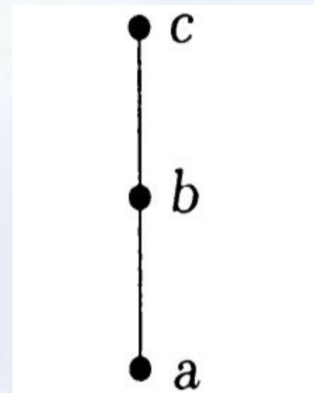



Рис. 2

**2.** Граф $G(V, E)$, де $V = \{a, b, c, d, e\}$ і $E = \{\{a,b\}, \{a,e\}, \{b,e\}, \{b,d\}, \{b,c\}, \{c,d\}\}$, може бути зображений діаграмою на рис. 3.

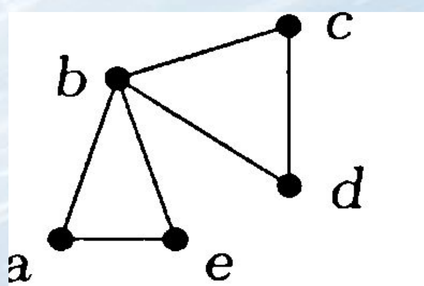
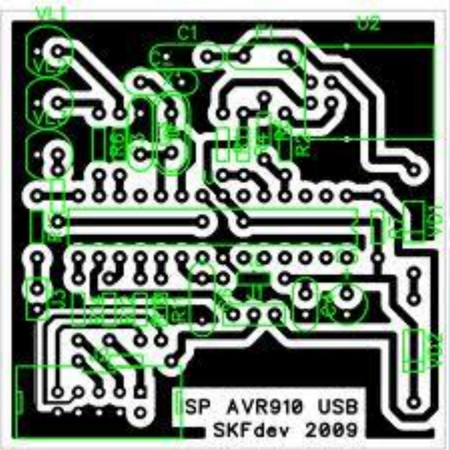
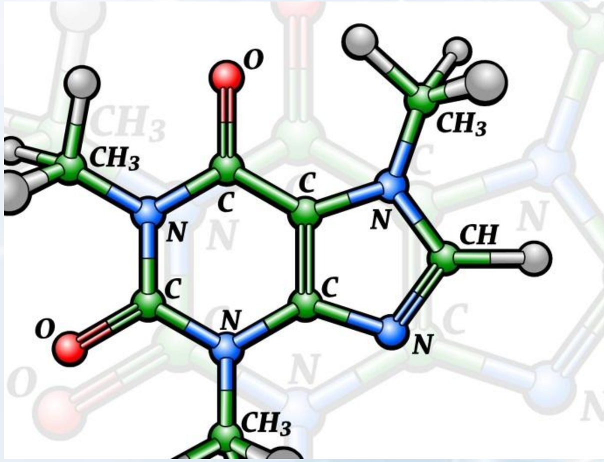



Рис. 3

# Використання графів





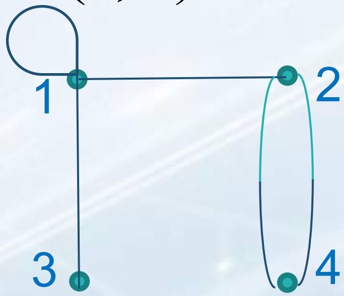



# *Основні типи графів*

***Мультиграф*** - граф з кратними ребрами - пара $(v_i, v_j)$ зустрічається в $E$ більше 1 разу. ($E$ - *сукупність* невпорядкованих пар різних елементів із $V$).

***Псевдограф*** - граф з петлями - ребрами виду $e = (v, v)$.

Граф на рисунку $G = (V, E)$; $V = (1, 2, 3, 4)$;
$E = <(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 4)>$
- псевдомультиграф:




Граф без кратних ребер і петель називають ***простим графом***.

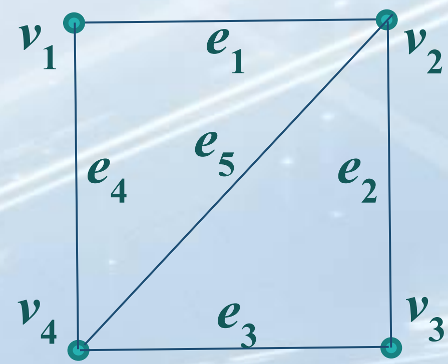
Граф називають ***розміченим*** (***поміченим***), якщо задано множину міток $S$, функцію розмітки вершин $f$: $V \to S$ і (або) функцію розмітки ребер $g$: $E \to S$. Графічно це зображують надписування міток на вершинах і дугах.

# *Суміжність та інцидентність*

Якщо $\{a, b\} \in E$, то елементи $a$ і $b$ множини $V$ ***з'єднані*** ребром $\{a, b\}$, вершини $a$ і $b$ є його ***кінцями***, ребро $\{a, b\}$ ***інцидентне*** до кожної з вершин $a$ і $b$, а вершини $a$ і $b$ ***суміжні***. Ребра, інцидентні одній вершині, називають ***суміжними***.

Множину вершин, суміжних з вершиною $v$, називають ***множиною суміжності*** вершини $v$ і позначається $\Gamma(v)$. Якщо $A \subset V$, то $\Gamma(A)$ - множина всіх вершин, суміжних з вершинами з $A$.

У наведеному графі
вершини $v_1$ і $v_2$ - суміжні,
а $v_1$ і $v_3$ - не суміжні,
ребра $e_1$ і $e_5$ - суміжні,
а $e_1$ і $e_3$ - не суміжні,
вершина $v_2$ і ребро $e_1$ - інцидентні.



# *Валентність*

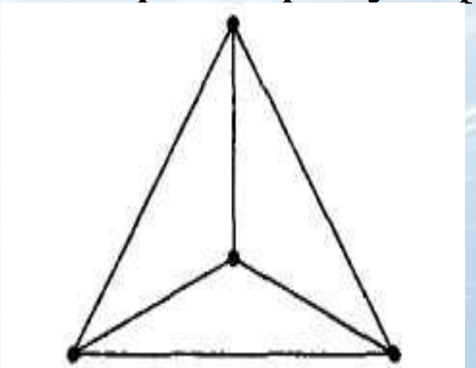
***Степенем*** (***валентністю***) вершини $v$ ($deg(v)$ або $d(v)$), називають кількість ребер, інцидентних цій вершині. Вершину степені 0 ($d(v) = 0$) називають ***ізольованою***. Якщо степінь вершини $d(v) = 1$, то вершину називають ***кінцевою***, або ***висячою***.

Для простого графа

$$\forall\ v \in V\ \ 0 \le d(v) \le p - 1$$

Якщо степені всіх вершин рівні $k$, то граф називають ***регулярним*** степені $k$. ***Степінь регулярності*** позначають $r(G)$. Для нерегулярних графів $r(G)$ не визначено.

На рисунку наведена діаграма регулярного графа.



# ТЕОРЕМИ

**ТЕОРЕМА 1.** (***Ейлера***) Сума степенів вершин графа парна і рівна подвоєній кількості ребер $\sum_{v\in V} d(v) = 2q.$

**ДОВЕДЕННЯ**

При підрахунку суми степенів вершин $\forall$ ребро враховується два рази: для одного кінця ребра і для іншого. □

**ТЕОРЕМА 2.** У будь-якому графі кількість вершин непарного степеня парна.

**ДОВЕДЕННЯ**

Нехай $V_1$ і $V_2$ - множини вершин парної і непарної степені відповідно. Тоді

$$2q = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{v\in V_1} d(v) + \sum_{v\in V_2} d(v).$$

$\sum_{v\in V} d(v)$ - парна за теоремою 1, $\sum_{v\in V_1} d(v)$ - парна $\Rightarrow$ $\sum_{v\in V_2} d(v)$ – парна, а це можливо, якщо $|V_2|$ парна, оскільки сума непарних чисел парна $\Leftrightarrow$ коли кількість доданків парна. □

# ПІДГРАФ

Граф $G'(V', E')$ називають ***підграфом*** графа $G(V, E)$ (познач. $G'(V', E') \subseteq G(V, E)$), якщо $V' \subseteq V$ і/або $E' \subseteq E$. Таким чином, кожна вершина в $G'$ є вершиною в $G$, і кожне ребро в $G'$ є ребром в $G$.

Чи є графи рис. 2, 3 і 4 підграфами графа рис. 1.

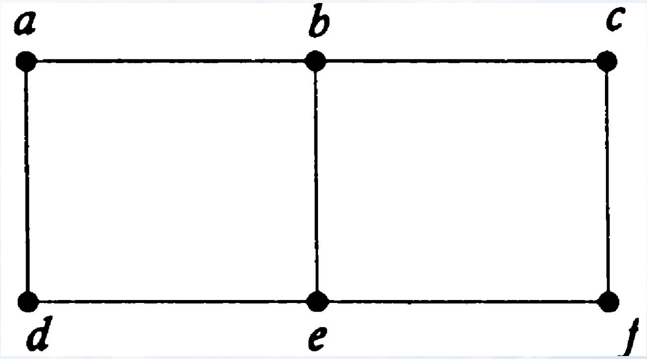



Рис. 1

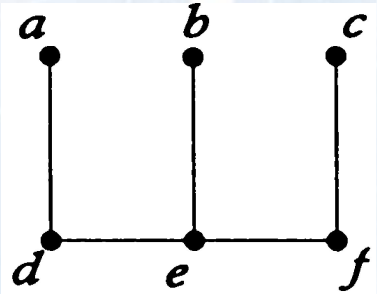



Рис. 2

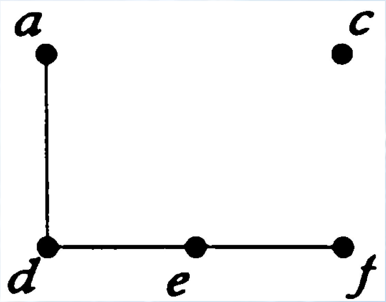



Рис. 3

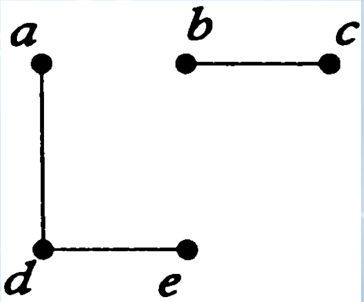



Рис. 4

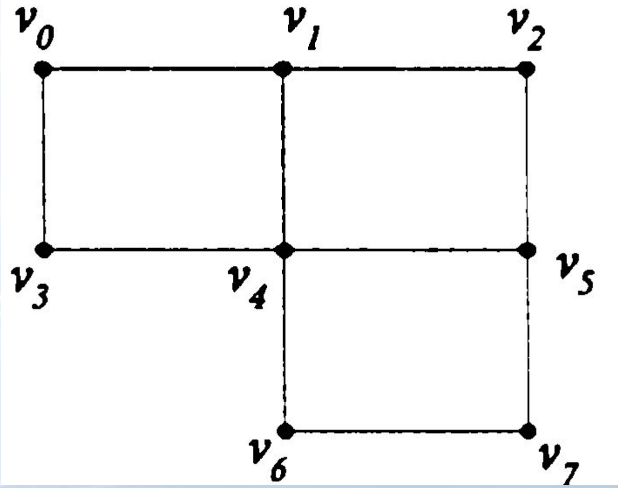
# ШЛЯХ

Нехай $G(V, E)$ - граф з вершинами $v_0, v_1, \ldots, v_k$ і ребрами $e_1, e_2, \ldots, e_k$.

***Шляхом довжини k*** з $v_0$ у $v_k$ (між $v_0$ і $v_k$) називають послідовність $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \ldots v_{k-1} e_k v_k$ таку, що $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ (познач. $v_0 v_1 v_2 \ldots v_k$ ). Шлях довжини $k$ має $k$ ребер.

Кожні два послідовних ребра шляху суміжні.

***Простим шляхом*** з $v_0$ в $v_k$ називається шлях, у якому не повторюються вершини.




У графі на рисунку з $v_0$ у $v_7$ ведуть шляхи

$v_0 v_1 v_2 v_5 v_7$ довжини 4 (простий)

$v_0 v_1 v_2 v_5 v_4 v_1 v_2 v_5 v_7$ довжини 8

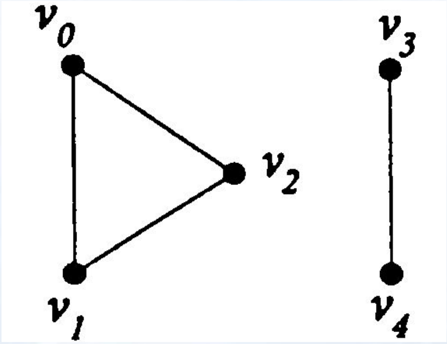
$v_0 v_1 v_4 v_5 v_4 v_5 v_7$ довжини 6

$v_0 v_3 v_4 v_6 v_7$ довжини 4 (простий)

# ЗВ'ЯЗНІСТЬ

Граф $G$ називають ***зв'язним***, якщо є шлях між будь-якими двома його різними вершинами.

Граф на рисунку не зв'язний.




**ТЕОРЕМА.** Нехай $G(V, E)$ - граф. Якщо існує шлях з вершини $v_i$ у вершину $v_j$, тоді існує простий шлях з вершини $v_i$ у вершину $v_j$.

**НАСЛІДОК.** Граф $G$ є зв'язним тоді й тільки тоді, коли між будь-якими двома його вершинами існує простий шлях.

# *КОМПОНЕНТА*

Нехай $G(V, E)$ - граф. Підграф $G'$ графа $G$ називають ***компонентою*** графа $G$, якщо виконуються умови:

**1.** $G'$ - непустий зв'язний граф.

**2.** $G''$ - зв'язний підграф графа $G$ і $G' \subseteq G''$, тоді $G' = G''$. Звідси $G'$ - максимальний зв'язний підграф графа $G$.

Графи рис. 2 і 3 - компоненти графа рис. 1.

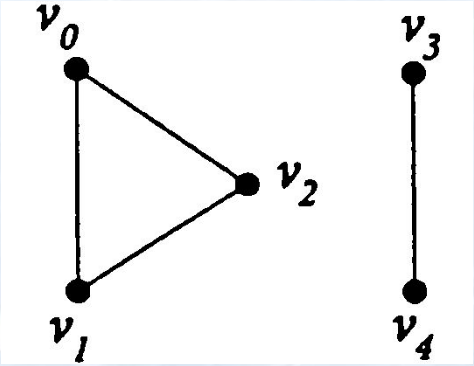



Рис. 1

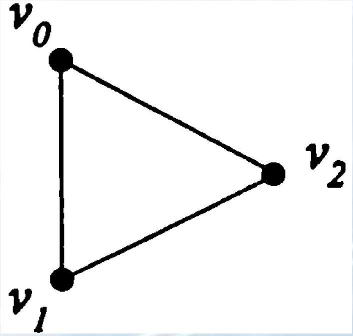



Рис. 2


Рис. 3

# ЦИКЛ

Нехай $G(V, E)$ - граф. Шлях ненульової довжини, що з'єднує вершину $v$ саму з собою і ребра якого не повторюються називають ***циклом***.

Цикл, що з'єднує вершину $v$ саму з собою і вершини якого не повторюються (крім $v$) називають ***простим циклом***.

Цикл називають ***n-циклом***, якщо він містить $n$ ребер і $n$ різних вершин.

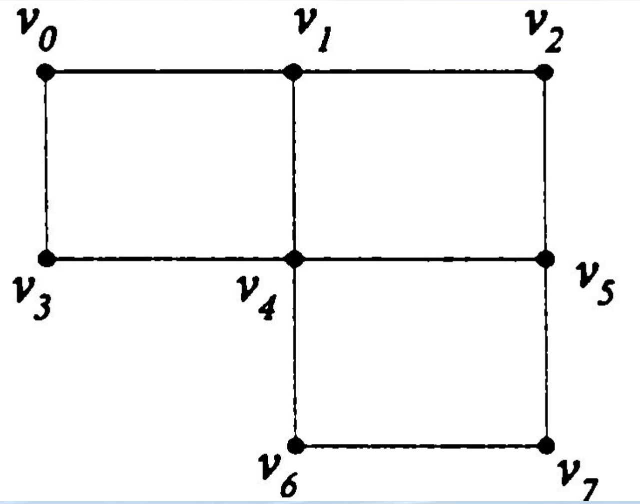
У графі на рисунку:

$v_0v_1v_4v_3v_0$ – простий цикл,

$v_0v_1v_4v_5v_7v_6v_4v_3v_0$ – цикл,

$v_1v_2v_5v_7v_6v_4v_1$ – простий цикл

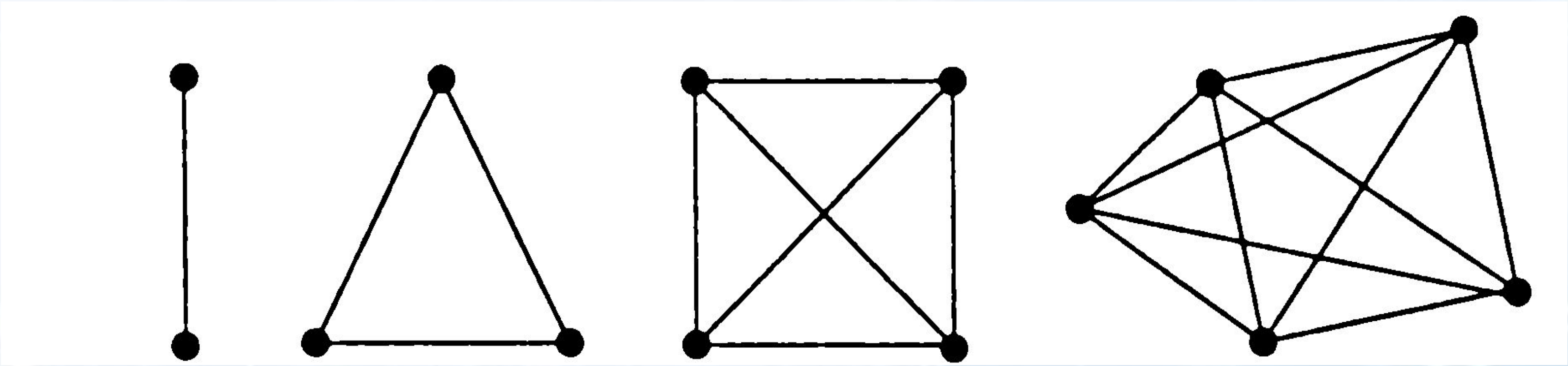
$v_0v_1v_2v_5v_7v_6v_4v_3v_0$ – простий цикл



# ПОВНИЙ ГРАФ

Граф називають ***повним***, якщо будь-які дві його вершини з'єднані ребром. Повний граф з $n$ вершинами позначають через $K_n$.

На рисунку показані графи $K_2$, $K_3$, $K_4$ і $K_5$.

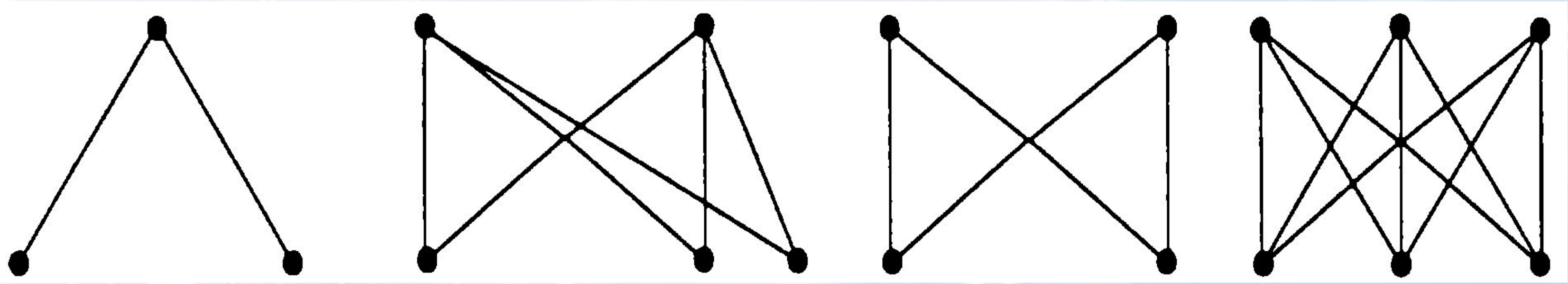


# ДВОДОЛЬНИЙ ГРАФ

Граф $G(V, E)$ називають ***дводольним***, якщо $V = A \cup B$, $A \cap B = \varnothing$, а кожне ребро має вигляд $\{a, b\}$, де $a \in A$ і $b \in B$.

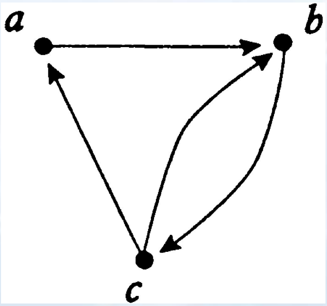
Дводольний граф називають ***повним дводольним*** графом $K_{m,n}$, якщо $A$ містить $m$ вершин, $B$ містить $n$ вершин і $\forall\ a \in A, b \in B$ $\{a, b\} \in E$, тобто, $\forall\ a \in A$ і $b \in B$ є ребро, яке їх з'єднує.

Графи $K_{1,2}$, $K_{2,3}$, $K_{2,2}$, $K_{3,3}$ представлені на рисунку.



# ОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ

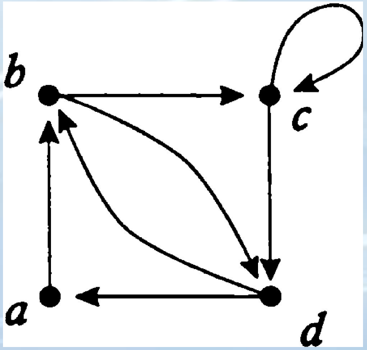
***Орієнтований граф* (*орграф*)** $G(V, E)$, складається з множини $V$ вершин і множини $E$ впорядкованих пар елементів з $V$, названої множиною ***орієнтованих ребер*** або ***дуг***. Якщо $(a, b) \in E$, то $(a, b)$ називають ***орієнтованим ребром*** (***дугою***), $a$ - ***початковою вершиною***, а $b$ - ***кінцевою вершиною*** ребра $(a, b)$.




Орграф $G(V, E)$, у якого $V = \{a, b, c\}$,

$E = \{(a, b), (b, c), (c, b), (c, a)\}$.

Поняття орієнтованого графа допускає наявність петель, ребер виду $(a, a)$.




Орграф, у якого $V = \{a, b, c, d\}$,

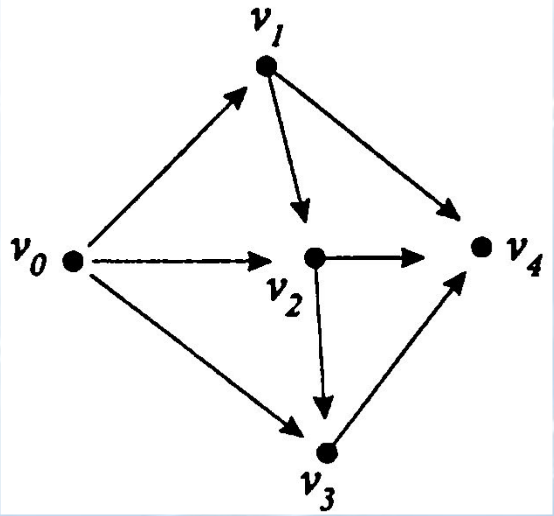
$E = \{(a, b), (b, c), (c, c), (b, d), (d, b), (c, d), (d, a)\}$.

# ВАЛЕНТНІСТЬ В ОРГРАФІ

***Степенем виходу*** вершини $v$ називають кількість ребер, для яких $v$ - початкова вершина ($outdeg(v)$). ***Степенем входу*** вершини $v$ називають кількість ребер, для яких $v$ - кінцева вершина ($indeg(v)$).

Якщо $indeg(v) = 0$, то вершину $v$ називають ***джерелом***. Якщо $outdeg(v) = 0$, то вершину $v$ називають ***стоком***.

В орієнтованому графі на рисунку




$indeg(v_0) = 0$, $outdeg(v_0) = 3$,

$indeg(v_1)= 1$, $outdeg(v_1) = 2$,

$indeg(v_2) = 2$, $outdeg(v_2) = 2$,

$indeg(v_3) = 2$, $outdeg(v_3) = 1$

$indeg(v_4) = 3$, $outdeg(v_4) = 0$.

Таким чином, вершина $v_0$ - джерело, а вершина $v_4$ - стік.

# РОЗМІЧЕНИЙ ГРАФ

Орієнтований граф з більш ніж одним ребром з однієї вершини в іншу називають ***орієнтованим мультиграфом***.

Якщо кожне ребро позначене, говорять, це ***розмічений граф***.

***Розмічений орієнтований граф*** $G(V, L, E)$ - це множина вершин $V$, множина міток $L$ і множина $E \subset V \times L \times V$, тобто ребро $e$ має вигляд $(a, l, b)$, де $l$ - мітка, а $a$, $b$ - вершини.

Графічно ребро $e = (a, l, b)$ розміченого графа позначається, як на рис. 1, 2. Граф на рис. 3 є прикладом типових розмічених графів, які називаються автоматами.

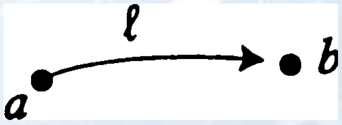



Рис. 1

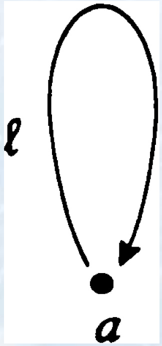



Рис. 2

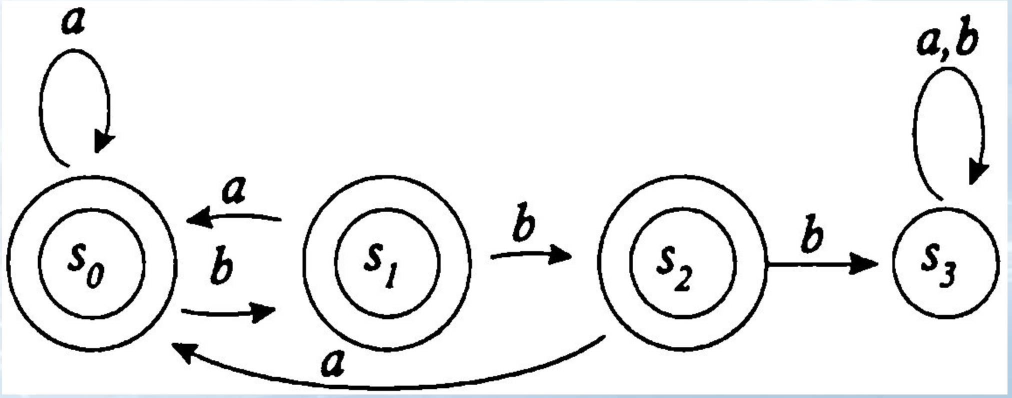



Рис. 3

# ОРІЄНТОВАНИЙ ПІДГРАФ

***Орієнтованим підграфом*** орграфа $G(V, E)$ називають орграф $G'(V', E')$, якщо $V' \subseteq V$ і/або $E' \subseteq E$, тобто кожна вершина $G'$ є вершиною $G$ і кожне орієнтоване ребро $G'$ є орієнтованим ребром $G$ $(G'(V, E') \subseteq G(V, E))$.

***Орієнтований шлях*** з $a$ у $b$ – це послідовність $v_0 v_1 v_2 \ldots v_n$, де $a = v_0$, $b = v_n$ і для $i = 1..n$ $(v_{i-1}, v_i)$ - орієнтоване ребро.

***Довжиною*** орієнтованого шляху називають кількість орієнтованих ребер, що входять у шлях.

Графи на рис. 1 і 2 - підграфи графа $G$ на рис. 3?

Орієнтовані шляхи в $G$:

$v_0 v_1 v_2 v_4$, $v_1 v_2 v_4$, $v_0 v_3 v_4$.

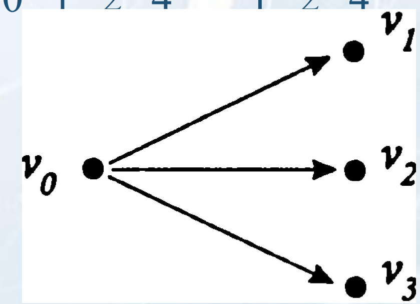


Рис. 1.

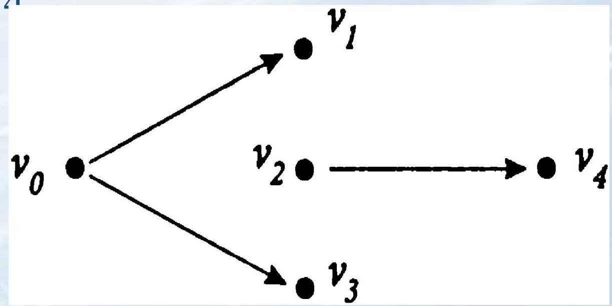


Рис. 2.

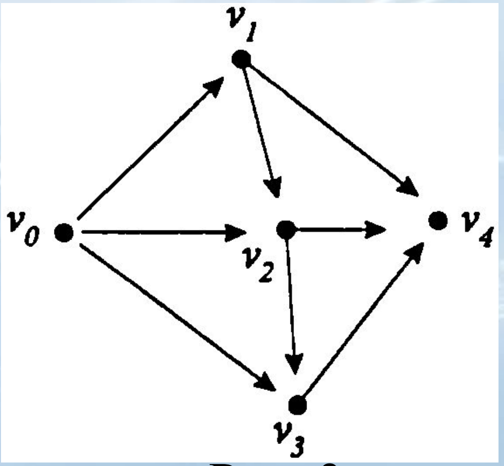


Рис. 3.

# *СПІВВІДНЕСЕНИЙ ГРАФ*

Неорієнтований граф $G^s$, отриманий з орграфа $G$ вилученням петель і заміною $\forall$ орієнтованого ребра неорієнтованим називають ***співвіднесеним***.

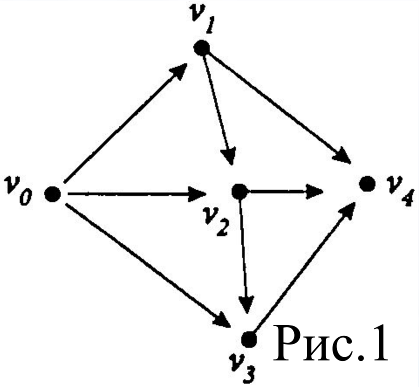



Рис.1

Для орграфа рис.1 співвіднесений граф на рис.2.

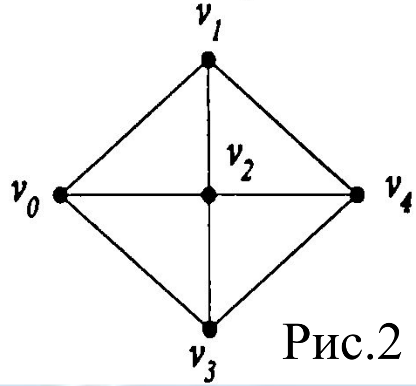



Рис.2

Нехай $G(V, E)$ - орграф.

Вилучимо петлі $E' = E - \{(v,v): v \in V\}$.

Отримаємо орпідграф $G'(V, E')$.

Нехай $R$ - симетричне замикання $E'$,

$E^s$ - множина ребер, що представляє відношення $R$.

Тоді граф $G^s(V, E^s)$ - *співвіднесений граф* орграфа $G(V, E)$.

Множину ребер $E$ неорієнтованого графа $G^s(V, E^s)$ можна визначити так:

$\{a, b\} \in E^s \Leftrightarrow$ для різних вершин $a$ і $b$ ребро $(a, b) \in G \vee (b, a) \in G$.

# ЗВ'ЯЗНИЙ ОРІЄНТОВАНИЙ ГРАФ

Орграф $G(V, E)$ називають ***зв'язним***, якщо його співвіднесений граф зв'язний. Орграф називають ***дуже зв'язним***, якщо $\forall$ пари вершин $a, b \in V$ $\exists$ орієнтований шлях з $a$ в $b$.

Орієнтований граф на рис. 1 зв'язний ?

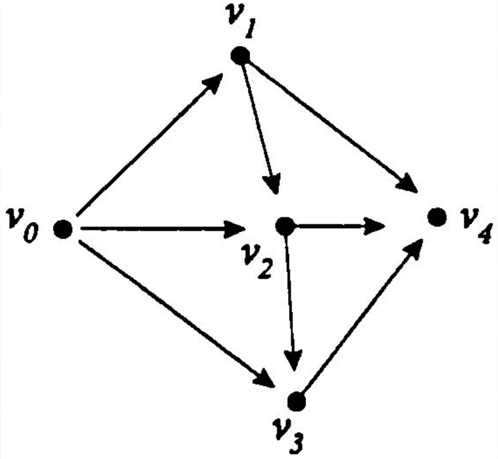



Рис. 1

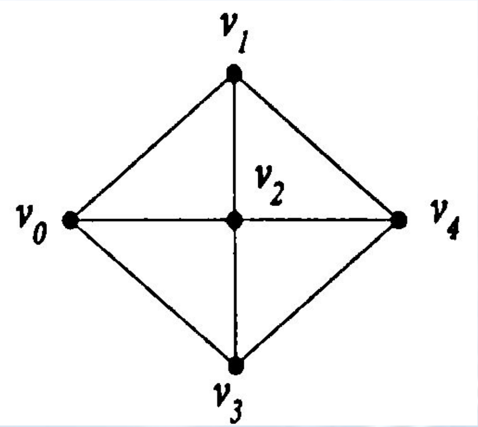



Рис.2

Орієнтований граф на рис. 1 зв'язний, оскільки його співвіднесений граф на рис. 2 зв'язний.

Орграф на рис. 1 не є дуже зв'язним, оскільки з $v_1$ в $v_3$ не існує орієнтованого шляху.

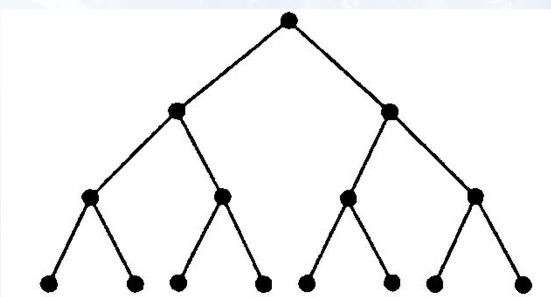
# ДЕРЕВА

***Дерево*** - це зв’язний граф без циклів.

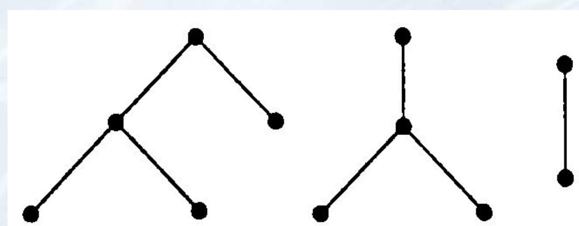
***Ліс*** - граф, компонентами якого є дерева.

Дерева використовуються як:

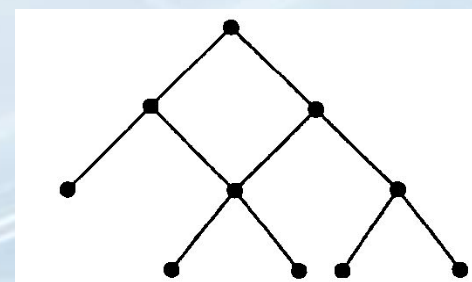
- інструмент при обчисленнях,
- зручний спосіб зберігання даних,
- спосіб сортування або пошуку даних, тощо.



дерево



ліс



не дерево

# ОРІЄНТОВАНЕ ДЕРЕВО

***Орієнтоване дерево*** - це вільний від петель орієнтований граф, співвіднесений граф якого є деревом.

Якщо існує шлях від вершини $a$ до вершини $b$, то він єдиний.

Якщо в орієнтованому дереві є ребро $(a, b)$, тоді не існує ребра $(b, a)$, у противному випадку шлях $aba$ був би циклом, і шлях з $a$ у $b$ не був би єдиним.

Множина $E$, що для дерева є як множиною ребер, так і відношенням, має властивість: якщо $(a, b) \in E$, то $(b, a) \notin E$.

Таке відношення є ***асиметричним***.

## *ТЕОРЕМА* 1

Для будь-яких вершин $a$ і $b$ дерева $T$ існує єдиний шлях з $a$ в $b$.

**ДОВЕДЕННЯ.**

Припустимо, що $\exists$ вершини $a$ і $b$ дерева $T$ | шлях з $a$ в $b$ не є єдиним, і покажемо, що в такому випадку $T$ не буде деревом.

Припустимо, що $\exists$ 2 різних шляхи:

$v_0 v_1 v_2 \dots v_n$ довжини $n$,

$v_0 v'_1 v'_2 \dots v'_m$ довжини $m$,

де $a = v_0$, $b = v_n = v'_m$.

У $\forall$ шляху $\exists$ 1-ша вершина, починаючи з якої відповідні вершини не збігаються, наприклад,

$$v_i \neq v_i'$$

і у $\forall$ зі шляхів $\exists$ точка, починаючи з якої вершини знову ті самі,

$$v_j = v_k'.$$

Тоді

$$v_{i\text{-}1} v_i v_{i+1} v_{i+2} \dots v_j v'_{k\text{-}1} v'_{k\text{-}2} \dots v'_i v_{i\text{-}1}$$

є циклом, тому граф $T$ не є деревом.

# ТЕОРЕМА 2

Якщо $\forall$ 2-х вершин графа $G$ $\exists$ єдиний шлях з вершини $a$ у вершину $b$, тоді $G$ - дерево.

**ДОВЕДЕННЯ.**

Припустимо, $G$ не є деревом. Тоді

1. або $G$ не є зв'язним,

2. або $G$ містить цикл.

Якщо граф $G$ не зв'язний, то $\exists$ вершини $a$, $b$ $\in$ $G$, для яких не $\exists$ шляху з $a$ в $b$.

Якщо $G$ містить цикл $v_0v_1v_2v_3v_4 \ldots v_{k-1}v_k$ $(v_0 = v_k)$ , то

$$v_2v_3\ldots\ldots v_{k-1}v_kv_0 \quad \text{і} \quad v_2v_1v_0$$

є шляхами з $v_2$ в $v_0$.

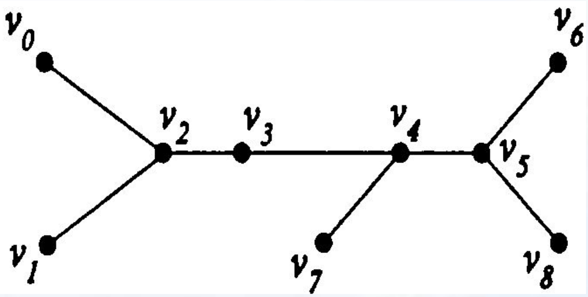
Поклавши $a = v_2$ і $b = v_0$ бачимо, що шлях між вершинами $a$ і $b$ не є єдиним.

•

***Дерево*** – це граф, у якому між двома його вершинами є тільки один шлях.

# *Кореневе дерево*

Задане дерево




Якщо підвісити його за вершину $v_3$, одержимо дерево рис. 1, якщо за вершину $v_4$ - дерево рис. 2.

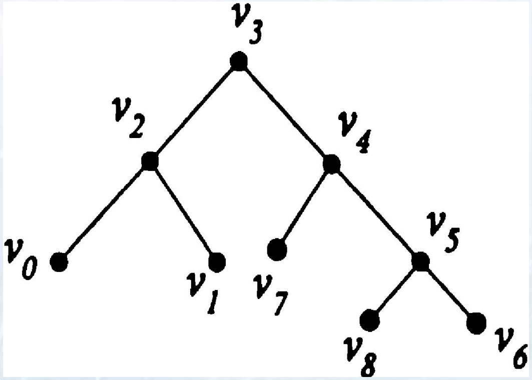



Рис. 1

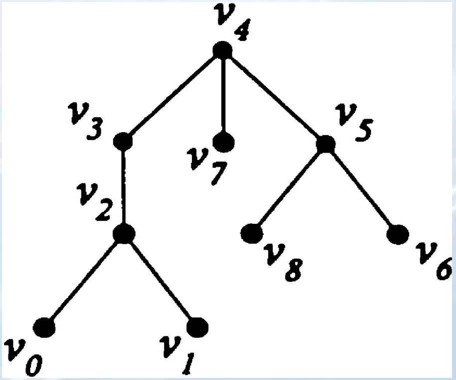
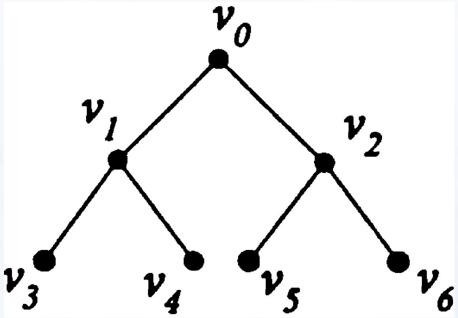


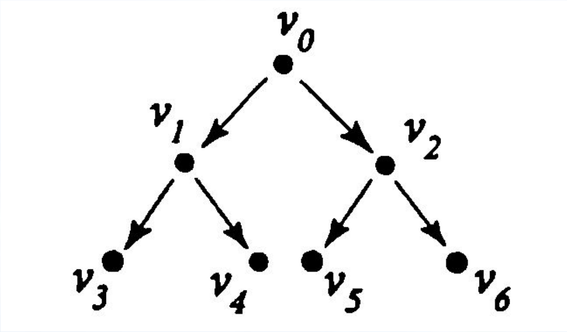

Рис. 2

Вершину зверху зображення називають ***коренем*** дерева. Дерево називають ***кореневим***, якщо визначено його корінь.

# *Кореневе орієнтоване дерево*

Кореневе дерево *T* можна замінити на орієнтоване *T'*.




Таке дерево називається ***кореневим орієнтованим деревом*** *T'*, ***породженим*** кореневим деревом *T*.

*T'* відрізняється від неорієнтованого дерева і його вигляд залежить від вибору кореня.

## *Елементи кореневого ордерева*

***Рівень*** вершини $v$ - це довжина шляху з кореня у вершину $v$.

***Висота*** дерева - це довжина самого довгого шляху від кореня дерева до листа.

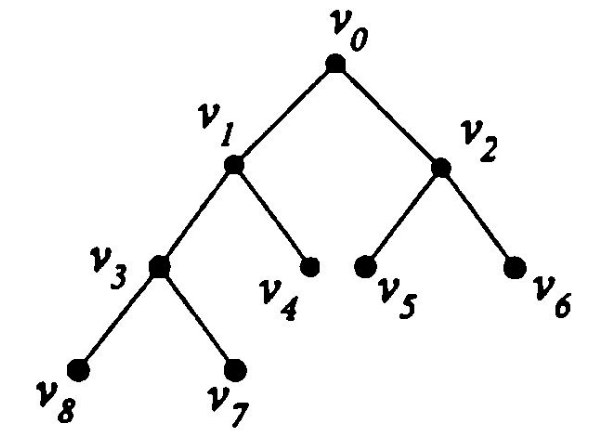
У кореневому ордереві $T'$:

- якщо $\exists$ орієнтоване ребро з $u$ у $v$, то вершина $u$ - ***батько*** вершини $v$, а $v$ - ***син*** вершини $u$;
- якщо $u$ - батько $v$ і $v'$, тоді $v$ і $v'$ - ***брати***;
- якщо $\exists$ орієнтований шлях з $u$ у $v$, то $u$ - ***предок*** вершини $v$, а $v$ - ***нащадок*** вершини $u$;
- якщо $\max$ зі степенів виходу вершин дерева $= m$, то ***дерево*** називають ***m-арним деревом***. При $m = 2$, дерево ***бінарне***.
- Вершини, які мають синів, називають ***внутрішніми***, інакше (вершини нульової напівстепені виходу) називають ***листами***.

У бінарному дереві кожен син батька позначається або як ***лівий син***, або як ***правий син***.

## Приклади

Граф на рисунку - *бінарне дерево*.




*Рівень* вершини $v_6$ = 2,

*рівень* вершини $v_8$ = 3.

*Висота* дерева = 3.

Вершина $v_1$ для $v_3$ і $v_4$ - *батько*.

Вершини $v_3$ і $v_4$, $v_1$ і $v_2$, $v_5$ і $v_6$ та $v_7$ і $v_8$ – *брати*.

Вершина $v_1$ для вершин $v_3$, $v_7$, $v_8$ - *предок*,

а $v_3$, $v_7$ і $v_8$ для вершини $v_1$ - *нащадки*

Вершина $v_8$ для вершини $v_3$ - *лівий син*,

а вершина $v_4$ для вершини $v_1$ - *правий син.*

## *ТЕОРЕМА* 3

Якщо дерево $T$ має $e$ ребер і $v$ вершин, то $v = e + 1$.

**ДОВЕДЕННЯ.**

Нехай є дерево $T$.

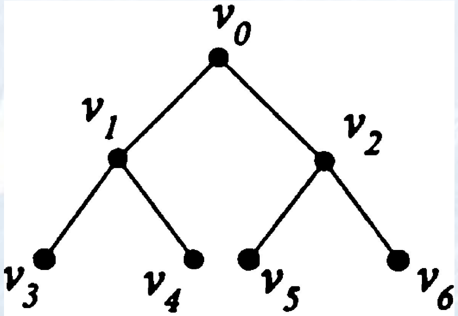
$\forall$ дерево можна представити як кореневе дерево, і це ніяким чином не міняє ні числа ребер, ні числа вершин.

Розглянемо орієнтоване дерево $T'$, породжене деревом $T$.

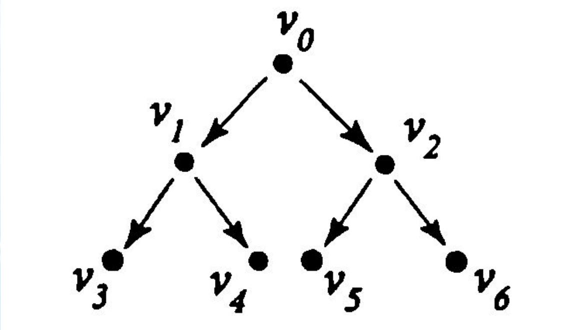
У $\forall$ ребра $T$ одна і тільки одна кінцева вершина.

$\Rightarrow$ число ребер $e$ = числу вершин $v$, крім кореневої вершини.

Якщо врахувати кореневу вершину, то вершин на 1 більше, ніж ребер, тобто $v = e + 1$.



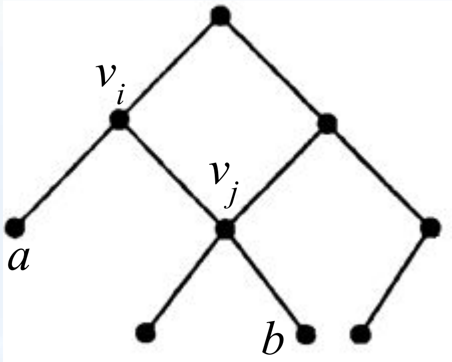

**$T$**




**$T'$**

# *ТЕОРЕМА* 4

Нехай у зв'язному графі $G(V, E)$ $e$ ребер, $v$ вершин і $v = e + 1$, тоді $G$ - дерево.




**ДОВЕДЕННЯ**.

Нехай в $G$ є цикл, у якому є ребро $\{v_i, v_j\}$.

Граф $G$ – зв'язний, $\forall$ $a$ і $b$ в $G$ $\exists$ шлях з $a$ в $b$ через ребро $\{v_i, v_j\}$.

Вилучимо ребро $\{v_i, v_j\}$ з $G$, але шлях з $a$ в $b$ існуватиме (ребро $\{v_i, v_j\}$ заміниться альтернативним шляхом з $v_i$ в $v_j$).

Якщо отриманий граф містить інші цикли, продовжуватимемо процес, поки всі цикли не будуть вилучені.

Одержимо зв'язний граф $G'(V, E')$ без циклів (дерево), в якому (за т. 3) $v = e' + 1$ (*), де $e' = |E'|$.

Якщо було вилучено $n$ ребер, то $e = e' + n$.

За умовою теореми $v = e + 1$ і за * ($v = e' + 1$), тоді $e = e'$ і $n = 0$.

Отже, жодне ребро не було вилучено, тому $G$ - дерево. •

# *Остове дерево*

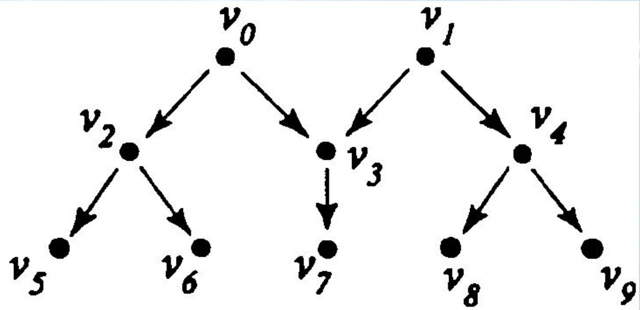
Говорять, що дерево $G'$, побудоване з графа $G$ у процесі попереднього доведення ***остове*** (***каркасне***) дерево графа $G$.

Дерево $T$ називають ***остовим*** деревом графа $G$, якщо $T$ - підграф графа $G$ і кожна вершина в $G$ - вершина в $T$.

**ТЕОРЕМА**. У кожного зв'язного графа існує підграф, який є остовим деревом.

Ордерево називають ***кореневим орієнтованим деревом***, якщо існує єдина вершина $v_0$ така, що $indeg(v_0) = 0$, і існує шлях з $v_0$ у кожну іншу вершину дерева.

На рисунку кореневе орієнтоване дерево ?

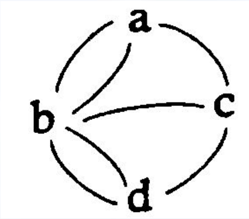


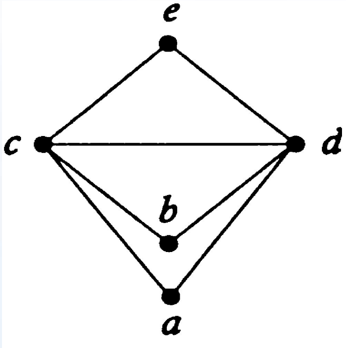

Ні.

# ШЛЯХИ І ЦИКЛИ ЕЙЛЕРА

Цикл, що включає всі ребра і вершини графа $G(V, E)$, називають ***ейлеровим циклом***.

Кажуть, граф $G$ має ***ейлерів цикл***.




**ТЕОРЕМА.** Зв'язний граф $G(V, E)$ з $|V| > 2$ має ейлерів цикл тоді й лише тоді, коли степені всіх його вершин парні.

**ДОВЕДЕННЯ**. **⇒:** Припустимо, граф $G$ має ейлерів цикл.

Граф є зв'язним, тому що $\forall$ вершина $\in$ циклу.

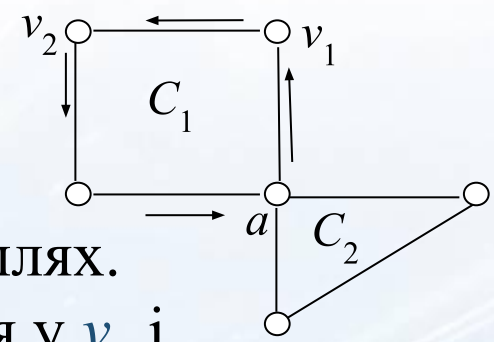
$\forall$ вершини $v$ графа $G$ щораз, коли ейлерів цикл проходить через $v$, він вносить $2$ у степінь $v$. Тому степінь $v$ парна.

**⇐:** зв'язний граф з парними степенями вершин має ейлерів цикл. Доведемо індукцією за кількістю вершин.

***База***. Теорема справедлива при $|V| = 3$.

***Припущення***. Зв'язний граф з вершинами парної степені при $|V| < k$, має ейлерів цикл.

# ДОВЕДЕННЯ




***Інд. перехід***. Нехай $G$ - зв'язний граф з $|V| = k$ вершинами парної степені.

Зі зв'язності $G \Rightarrow \exists$ шлях з $v_1$ в $v_2$. Степінь $v_2$ парна $\Rightarrow \exists$ ребро, по якому можна продовжити шлях.

Оскільки граф скінченний, то шлях повернеться у $v_1$ і буде побудовано цикл $C_1$.

*Якщо* $C_1$ - ейлерів цикл для $G$, *то* твердження доведено,

*інакше* вилучимо ребра циклу $C_1$ з $G$ та ізольовані вершини і отримаємо підграф $G'$.

Степені вершин циклу $C_1$ парні $\Rightarrow$ всі вершини $G'$ парної степені.

У $G' < k$ вершин парної степені, тому граф $G'$ має ейлерів цикл $C_2$.

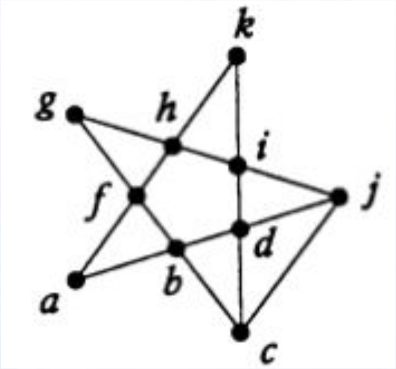
У $C_1$ і $C_2$ є спільна вершина ($a$).

Можна побудувати цикл з початком в $a$, пройти $C_1$, повернутися в $a$, потім пройти $C_2$ і повернутися в $a$.

Якщо новий цикл не є ейлеровим для $G$, ...

# *Ейлеровий шлях*

Нехай $G(V, E)$ - граф. ***Шлях***, що включає кожне ребро графа $G$ тільки 1 раз називають ***ейлеровим***. Говорять, що граф $G$ має ейлерів шлях.



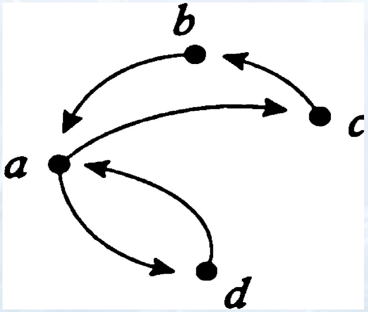

**ТЕОРЕМА.** Граф (мультиграф або псевдограф) має власний ейлерів шлях $\Leftrightarrow$ він зв'язний і рівно 2 його вершини мають непарну степінь.

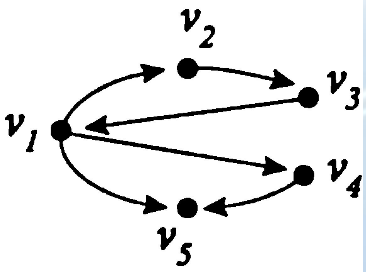
# Орієнтований ейлерів цикл

Нехай $G(V, E)$ - орграф. ***Орієнтованим циклом*** називають орієнтований шлях ненульової довжини з вершини в ту ж саму вершину без повторення ребер.

Нехай $G(V, E)$ - орграф. Орієнтований цикл, що включає всі ребра й вершини графа $G$, називають ***ейлеровим циклом***. Говорять, що орієнтований граф $G$ має ейлерів цикл.

**ТЕОРЕМА.** Орграф має ейлерів цикл $\Leftrightarrow$ він зв'язний і степінь входу кожної вершини дорівнює її степені виходу.

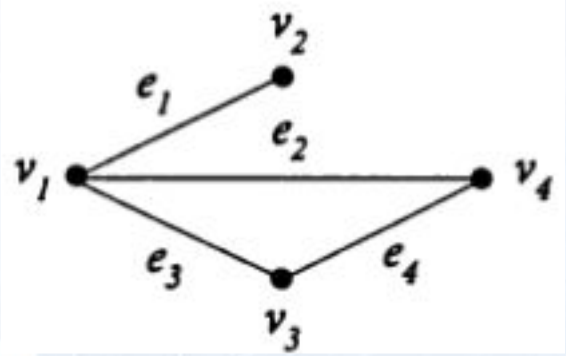


# СПОСОБИ ПОДАННЯ ГРАФІВ

***Матрицею інцидентності*** неорієнтованого графа $G$ ($M$: array [1..$p$, 1..$q$] of 0..1) називають $p \times q$ матрицю $M$, рядки якої позначені вершинами, а стовпці - ребрами графа, з елементами

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ якщо вершина } i \text{ інцидентна ребру } j, \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$




$$\begin{array}{c|cccc} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline v_1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

Степінь вершини = сумі одиниць рядка цієї вершини.

Для простого графа в кожному стовпці рівно 2 одиниці й однакових стовпців немає.

Для матриці інцидентності обсяг пам'яті $\boldsymbol{n(p,q) = O(pq)}$.

# *Матриця інцидентності псевдомультиграфа*

У матриці інцидентності мультиграфа будуть однакові стовпці (для кратних ребер).

У матриці псевдографа петлі відповідає елемент, рівний 2, і матриця інцидентності не булева.

Нехай *G* - граф, зображений на рис. 1, його матриця інцидентності зображена на рис. 2.

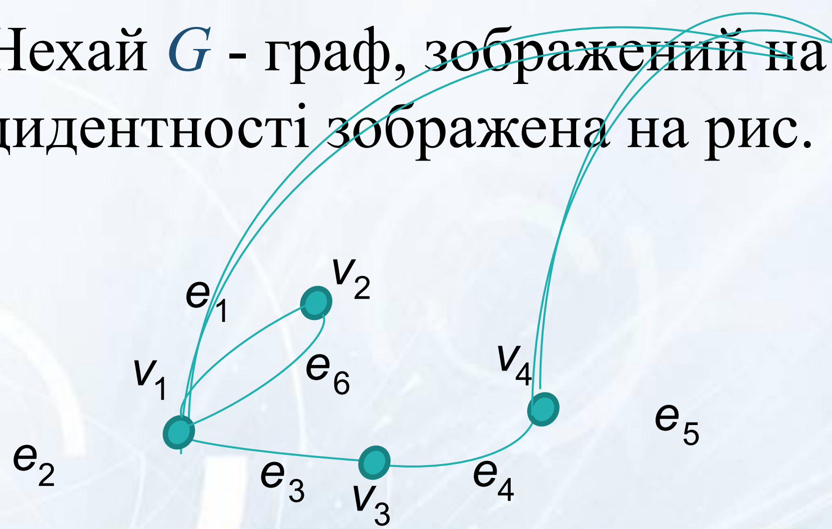



Рис. 1

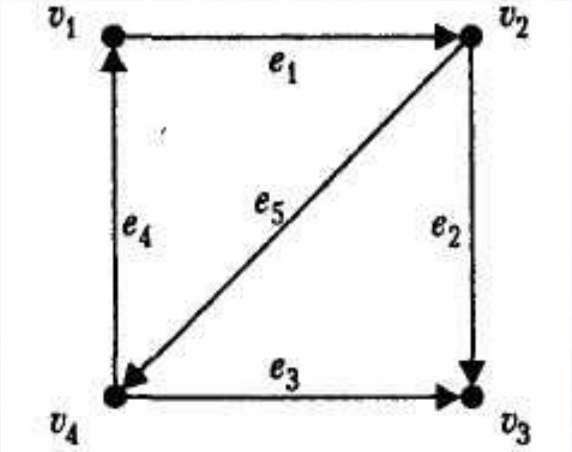
$$
\begin{array}{c}
 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Рис. 2

# Матриця інцидентності орграфа

***Матрицею інцидентності*** орграфа $G$ називають $p \times q$ матрицю $M$ з елементами $m_{ij}$ $(i = 1..p,\ j = 1..\ q)$, де

$$m_{ij} = \begin{cases} -1, \text{якщо дуга } e_j \text{ виходить з вершини } v_i, \\ 1, \text{якщо дуга } e_j \text{ входить у вершину } v_i, \\ 2, \text{якщо дуга } e_j \text{ - це петля у вершині } v_i, \\ 0, \text{в інших випадках.} \end{cases}$$



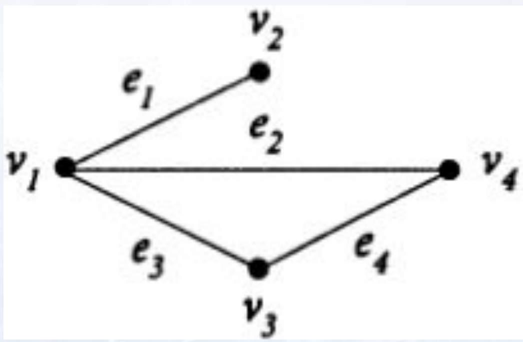

$$\begin{array}{c|ccccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ V_1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ V_2 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ V_3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ V_4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}$$

$M$: **array** [1..$p$, 1..$q$] **of** -1..2.

# *Матриця суміжності*

***Матрицею суміжності*** простого графа називають булеву $p \times p$ матрицю $M$ ($M$: array [1..$p$, 1..$p$] of 0..1) , рядки і стовпці якої позначені вершинами графа в однаковому порядку, а елементи

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо є ребро з } v_i \text{ у } v_j, \\ 0, \text{ інакше.} \end{cases}$$




$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

У матриці суміжності мультиграфа $m_{ij}$ = кратності ребер.

У матриці суміжності псевдографа петлі відповідає 1 на головній діагоналі.

Властивості матриці суміжності в точності збігаються із властивостями матриці відношень.

Для матриці суміжності $n(p,q) = O(p^2)$.

## *Приклади*

Побудувати матрицю суміжності орграфа *G*.

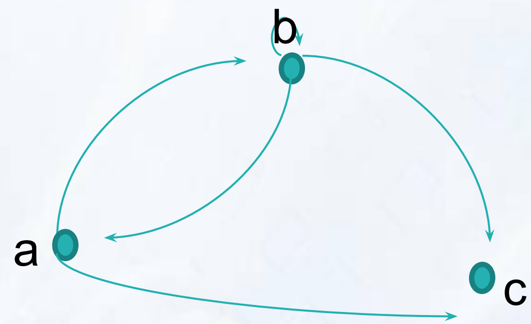



Рис. 1

$$\begin{array}{c|ccc|} & a & b & c \\ \hline a & 0 & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 & 1 \\ c & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 2

Дуже часто позначення вершин несуттєві. У таких випадках матриці наводять без позначень.

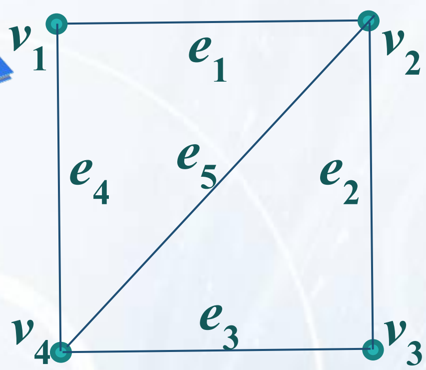
Матриця

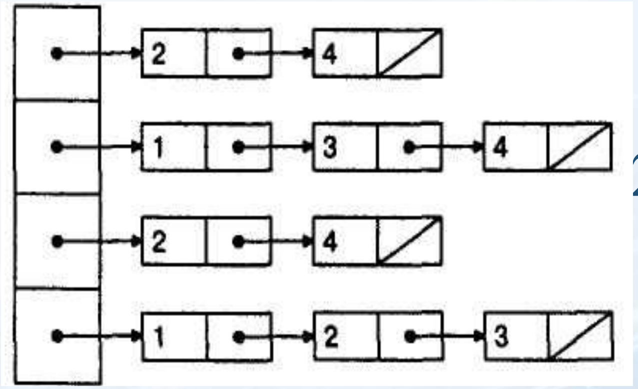
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

є матрицею суміжності орграфа, у якого 4 вершини і 8 ребер.

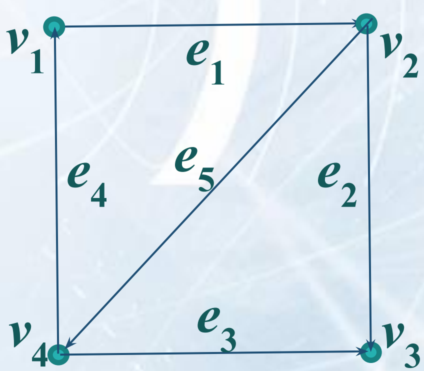
# Список суміжності

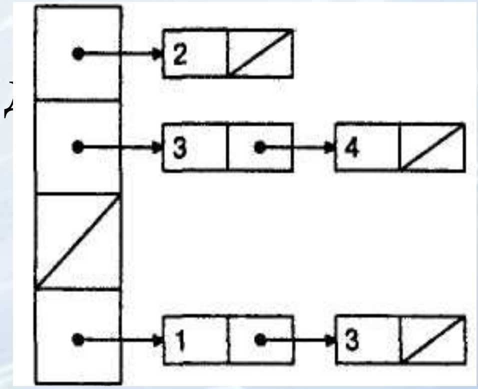
***Списком суміжності*** називають списочну структуру, яка відображає суміжність вершин і складається з масиву покажчиків *Г*: array [1..*p*] of ↑*N* на списки суміжних вершин (елементом списку є структура *N*: record *v*: 1..*p*; *n*: ↑*N* end).




2$q$)

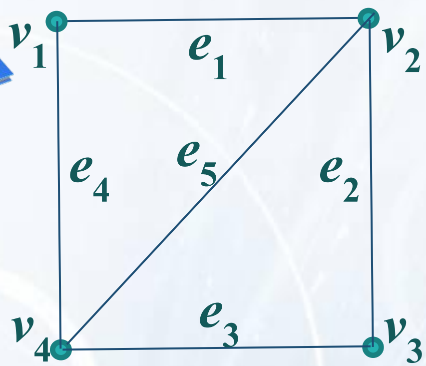


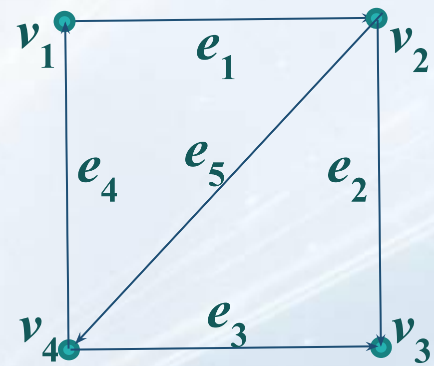

графів

# *Список ребер*

***Списком*** (***масивом***) ***ребер*** (для орграфів ***списком*** (***масивом***) ***дуг***) називають подання графа за допомогою масиву структур $E$: array $[1..q]$ of record $b$, $e$: $1..p$ end, що відображає список пар суміжних вершин.




| b | e |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 1 | 4 |
| 2 | 3 |
| 2 | 4 |
| 3 | 4 |




| b | e |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 3 |
| 2 | 4 |
| 4 | 1 |
| 4 | 3 |

Для масиву ребер (або дуг) $n(p,q) = O(2q)$.

# *Пошук шляху фіксованої довжини k*

Важливим застосуванням матриці суміжності є пошук шляху фіксованої довжини $k$.

Нехай $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ иця суміжності орграфа $G$.

Знайдемо матрицю $A^{\odot 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \odot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Елемент $A_{12}^{\odot 2} = \mathbf{1}$, тому що $A_{14} = 1$ і $A_{42} = 1$: $\exists$ ребра $(v_1, v_4)$ і $(v_4, v_2)$. Тобто, з $v_1$ у $v_2$ $\exists$ шлях $v_1 v_4 v_2$ довжини 2 (2-шлях).

У загальному випадку $A_{ij}^{\odot 2} = 1 \Leftrightarrow \exists\ k \mid A_{ik} A_{kj} = 1$ ($\exists$ ребра $(v_i, v_k)$ і $(v_k, v_j)$) або 2-шлях з вершини $v_i$ у вершину $v_j$).

Якщо використати звичайне множення матриць, то $A_{ij}^2$ рівне числу значень $k \mid A_{ik}$ і $A_{kj}$ дорівнюють 1, тому воно дорівнює кількості шляхів з вершини $v_i$ у вершину $v_j$ довжини 2.

# *ТЕОРЕМИ*

Нехай $G$ - (ор) граф з вершинами $v_1, v_2, \ldots, v_n$ і матрицею суміжності $A$.

**Т. 1.** Шлях довжини $k$ ($k$-шлях) з $v_i$ в $v_j$ для $k = 1..n$ $\exists \Leftrightarrow A_{ij}^{\odot k} = 1$.

**Т. 2.** З $v_i$ у $v_j$ $\exists$ $m$ шляхів довжини $k$, де $k = 1..n \Leftrightarrow A_{ij}^{k} = m$.

**Т. 3.** Нехай $\hat{A} = A \vee A^{\odot 2} \vee \ldots \vee A^{\odot n}$. Тоді $\hat{A}_{ij} = 1 \Leftrightarrow \exists$ шлях з $v_i$ в

**Т. 4.** Нехай $\hat{I} = I \vee A \vee A^{\odot 2} \vee \ldots \vee A^{\odot n}$, де $I$ - мультиплікативна одинична матриця. Тоді $\hat{I}_{ij} = 1 \; \forall \; i, j \Leftrightarrow$ граф $G$ (дуже) зв'язний.

Т. 4 $\Rightarrow$ з означення (сильної) зв’язності (орієнт.) графів.

З Т. 3 $\Rightarrow$ що якщо $R$ - відношення, задане (орієнт.) графом $G$, і $A$ - матриця суміжності графа $G$, то $\hat{A}$ - матриця суміжності графа, що описує транзитивне замикання $R$.

**ТЕОРЕМА** (загальний випадок, не обов'язково зв'язний граф)

**Т. 5.** Нехай $G$ - граф з $n$ вершинами і матрицею суміжності $A$ і $\hat{A}^I = I \vee A \vee A^2 \vee A^3 \vee \ldots \vee A^n$. Тоді вершини можна впорядкувати так, що $\hat{A}^I$ матиме вигляд (рис. 1)

$$\begin{bmatrix} \hat{A}_1 & & & & \\ & \hat{A}_2 & & 0 & \\ & & \hat{A}_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & \hat{A}_m \end{bmatrix},$$

Рис. 1

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & 0 & \\ & & A_3 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & A_m \end{bmatrix}.$$

Рис. 2

де $\hat{A}_i$ - квадратна матриця, головна діагональ якої спрямована уздовж головної діагоналі $\hat{A}^I$ і містить всі її елементи, рівні 1. $\forall$ елемент $\hat{A}^I$ поза матрицями $\hat{A}_i$ рівний 0.

Матрицю $A$ можна розбити на блоки того ж розміру, що і $\hat{A}$, при цьому $A$ матиме вигляд (рис. 2), де $A_i$ має таку ж форму, як $\hat{A}_i$, і є матрицею суміжності компоненти графа $G$, а $\forall$ елемент матриці $A$ поза всіма матрицями $A_i$ рівний 0.

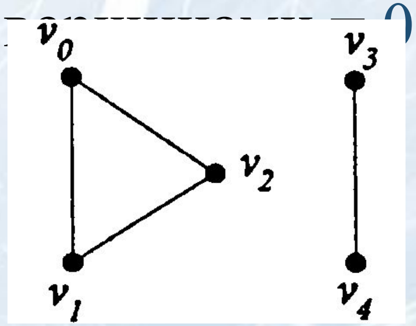
# *ДОВЕДЕННЯ*

Якщо всі вершини $G$, які $\in$ одній компоненті, помістити поряд, то блок матриці $\breve{A}^I$, що складається лише з рядків і стовпців, позначених цими вершинами, містить тільки 1 (між 2-ма $\forall$ такими вершинами $\exists$ шлях).

$\forall$ інший елемент $A$ в рядках і стовпцях даної компоненти = 0, оскільки не $\exists$ шляху з вершин даної компоненти до вершин іншої.

Оскільки для блоків $\breve{A}_i$ вершини, що позначають його рядки і стовпці, $\in$ одній і тій самій компоненті, відповідний блок $A_i$ у матриці $A$ представляє граф - компоненту графа $G$.

Всі інші елементи того ж рядка (стовпця) матриці $A$, позначені цими вершинами = 0.




$$A = \begin{matrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad \breve{A}^I = \begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}$$

# *Алгоритм Уоршолла (Роя-Уоршолла)*

Пошук матриці суміжності $\overset{\vee}{A}$ графа транзитивного замикання відношення $R$, заданого (орієнтованим) графом $G$.

## АЛГОРИТМ УОРШОЛЛА 1

1. Розглянути стовбець $j = 1$ матриці $A$. Знайти рядок $i \neq j$ цього стовпця, у якому є $1$, і замінити його на суму $1$-го та $i$-го рядків.
2. Розглянути $j$-ий стовбець матриці, побудованої на кроці $j - 1$. Знайти рядок $i \neq j$ цього стовпця, у якому є $1$, і замінити його на суму $j$-го та $i$-го рядків.
3. Продовжувати, поки не будуть розглянуті всі стовпці.

$j = 1$

$$\begin{array}{c|cccc|} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$j = 2$

$$\begin{array}{|cccc|} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$j = 3$

$$\begin{array}{|cccc|} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$j = 4$

$$\begin{array}{|cccc|} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \boxed{1} \end{array}$$

Результат:

$$\begin{array}{|cccc|} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

# *Алгоритм Уоршолла 2*

## АЛГОРИТМ УОРШОЛЛА 2

Цикл по $k$ від 1 до $n$:

Цикл по $i$ від 1 до $n$:

Цикл по $j$ від 1 до $n$:

$$A_{ij} = A_{ij} \vee (A_{ik} \wedge A_{kj});$$

Кінець циклу;

Кінець циклу;

Кінець циклу.

$$A = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

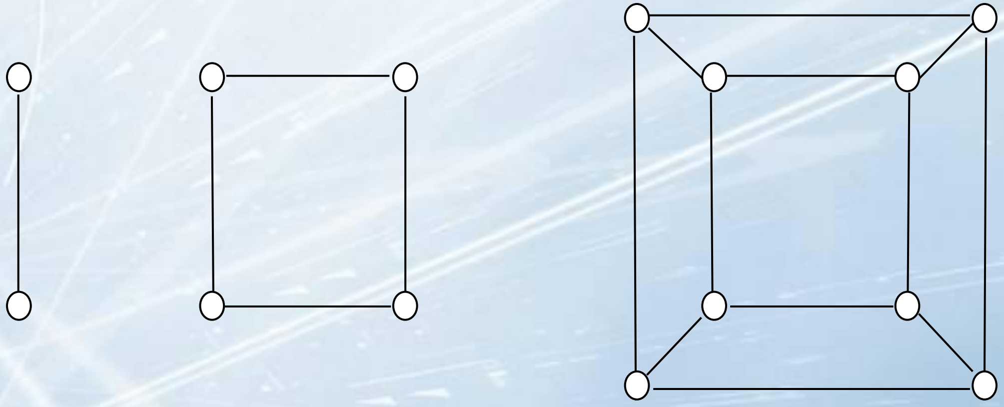
# ГІПЕРКУБИ І КОД ГРЕЯ

***Відстанню*** між двома вершинами графа називають довжину самого короткого шляху між ними.

***Діаметром*** графа називається найбільша відстань між двома будь-якими його вершинами.

***n-вимірним кубом (n-гіперкубом)*** називають простий граф, вершини якого зображають всі $2^n$ бітових рядків довжини $n$ (позн. $Q_n$). Дві вершини в $Q_n$ з'єднані ребром тоді й лише тоді, коли бітові рядки відрізняються точно в одному біті.

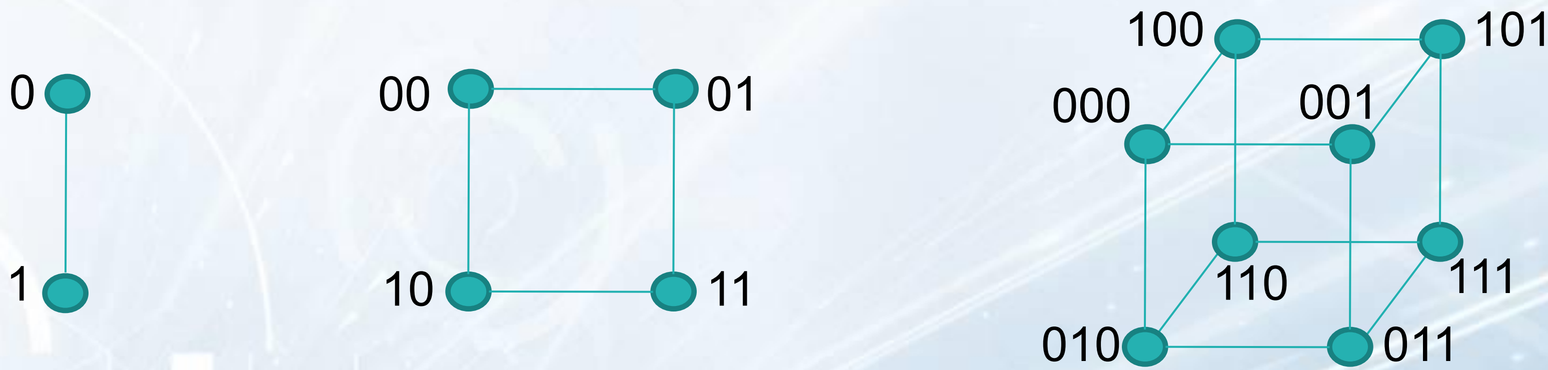
*n-гіперкуб* може бути використаний для з'єднання до $2^n$ комп'ютерів.



# *Рекурсивний алгоритм побудови n-гіперкуба*

Граф $Q_{n+1}$ отримують з двох графів $Q_n$ з'єднанням ребрами їх однаково позначених вершин. Потім до бітових рядків у вершинах першого з графів $Q_n$ зліва дописують 0, другого - 1.

Для $n = 1$ одну вершину позначимо 1, а іншу - 0. Одержуємо граф рис. 1 (вершини позначають всі булеві рядки довжини 1).




$Q_1$ $Q_2$ $Q_3$

Для $Q_2$ вершини позначено 11, 10, 01 і 00 (всі булеві рядки довжини 2).

Для $Q_3$ вершини позначено 111, 110, 101, 100, 011, 010, 001, 000 (всі булеві рядки довжини 3).

# *Послідовність вершин n-вимірного куба*

При побудові таблиць істинності список всіх можливих наборів значень логічних змінних є вершини гіперкубів порядку 1, 2, 3 і 4.

| порядок 1 | порядок 2 | порядок 3 | порядок 4 |
|---|---|---|---|
| 0 | 00 | 000 | 0000 |
| 1 | 01 | 001 | 0001 |
| | 10 | 010 | 0010 |
| | 11 | 011 | 0011 |
| | | 100 | 0100 |
| | | 101 | 0101 |
| | | 110 | 0110 |
| | | 111 | 0111 |
| | | | 1000 |
| | | | 1001 |
| | | | 1010 |
| | | | 1011 |
| | | | 1100 |
| | | | 1101 |
| | | | 1110 |

## *Алгоритм побудови послідовності вершин $k$+1-вимірного куба*

Послідовність вершин для $k+1$-вимірного куба отримують, використовуючи дві послідовності вершин $k$-вимірного куба в такий спосіб:

**1)** Помістити 1 перед кожною вершиною в послідовності вершин $k$-вимірного куба (вершини, які були суміжними в $k$-вимірному кубі, із приставленою одиницею залишаються суміжними в $k+1$-вимірному кубі).

**2)** Помістити 0 перед кожною вершиною в послідовності вершин $k$-вимірного куба (вершини, які були суміжними в $k$-вимірному кубі, із приставленою одиницею залишаються суміжними в $k+1$-вимірному кубі).

**3)** Помістити послідовність, побудовану в (2), слідом за послідовністю, побудованою в (1).

# Карти Карно

Розглянемо карти Карно:

| | q | ~q |
|---|---|---|
| p | 11 | 10 |
| ~p | 01 | 00 |

| | q | q | ~q | ~q |
|---|---|---|---|---|
| p | 111 | 110 | 100 | 101 |
| ~p | 011 | 010 | 000 | 001 |
| | r | ~r | ~r | r |

| | q | q | ~q | ~q | |
|---|---|---|---|---|---|
| p | 1111 | 1101 | 1001 | 1011 | s |
| p | 1110 | 1100 | 1000 | 1010 | s |
| ~p | 0110 | 0100 | 0000 | 0010 | ~s |
| ~p | 0111 | 0101 | 0001 | 0011 | ~s |
| | r | ~r | ~r | r | |

Кожна вершина суміжна до іншої вершини, якщо вони суміжні як вершини куба порядку *n*.