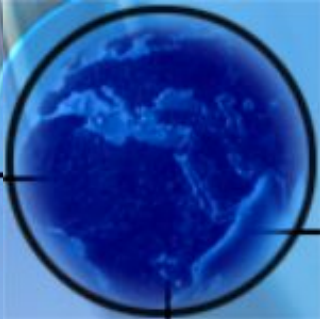


**Сучасні методи наближення функцій**  
**багатьох змінних (інтерфлетація,**  
**інтерстріпація, інтерлокація.**



**Лекція 5**

Українська інженерно-педагогічна  
академія

1. Інтерфлетація функцій трьох змінних.
2. Оператор інтерфлетації функції  $f(x, y, z)$  на трьох площинах  
 $x = a_1, y = a_2, z = a_3$ .
3. Оператор інтерфлетації функції  $f(x, y, z)$  на чотирьох площинах  
 $x = x_1, x = x_2, y = y_1, y = y_2$ .
4. Інтерстріпація функцій трьох змінних
5. Порівняння інтерполяції, інтерлінації, інтерфлетації, інтерстріпації, інтерлокації
6. Чисельні експерименти



# 3 1. Інтерфлетація функцій трьох змінних

## Інтерфлетація функцій трьох змінних.

Нехай задана функція  $u = f(x, y, z)$  двох змінних і система площин

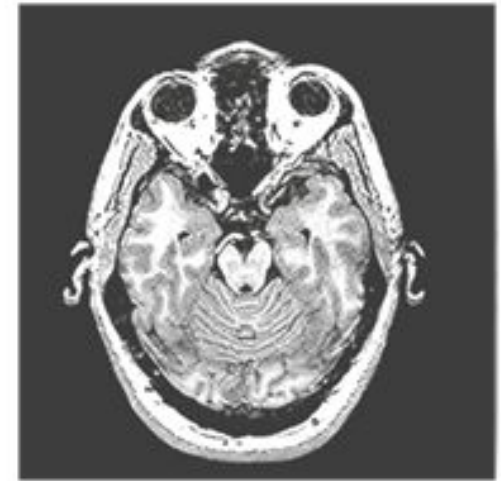
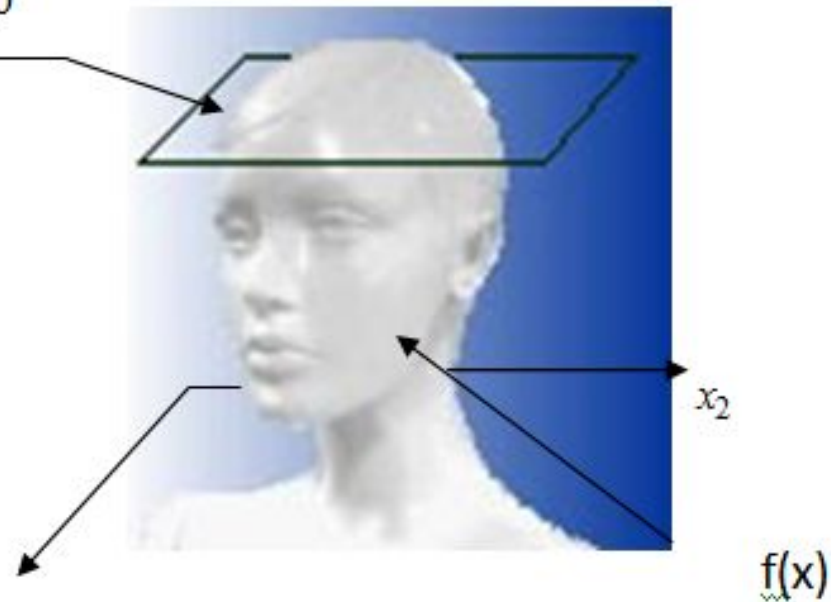
$$\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$$

Слідом функції  $u = f(x, y, z)$  на площині  $\Pi_k : \omega_k(x, y, z) = 0$  називається функція двох змінних  $f_k(x, y)$  або  $f_k(y, z)$ , або  $f_k(x, z)$  яка в кожній точці цієї площини приймає такі ж значення, як і функція  $u = f(x, y, z)$ .

$$f(x, y, z)|_{\Pi_k} = f_k(x, y)|_{\Pi_k}$$

# 1. Інтерфлотація функцій трьох змінних

$$\omega_k(x) : x_3 - c = 0$$



$$T_k(x_1, x_2) = f(x_1, x_2, c)$$

Рис. 1. Графічна ілюстрація поняття томограми

# 1. Інтерфлетація функцій трьох змінних

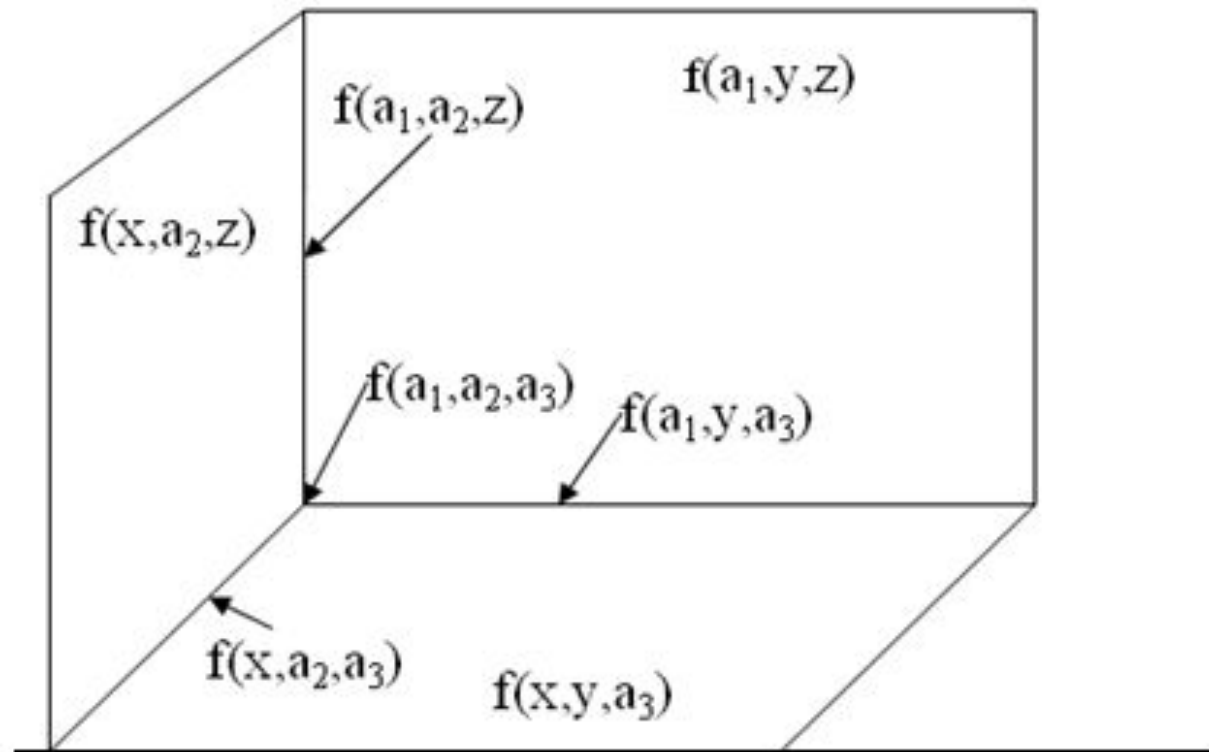
Інтерфлетацією функції  $f(x, y, z)$  (від англ. *inter* – між, *flat*-площина) на системі площин  $x = x_i, i = \overline{1, m}$ ;  $y = y_j, j = \overline{1, n}$ ,  $z = z_k, k = \overline{1, s}$  називається відновлення її за допомогою слідів  $f(x_i, y, z), i = \overline{1, m}$ ,  $f(x, y_j, z), l = \overline{1, n}$ ,  $f(x, y, z_k), k = \overline{1, s}$



# Оператор інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ на трьох площинах $x = a_1, y = a_2, z = a_3$ .

Оператор

$$O_3(x, y, z) = f(x, a_2, z) + f(a_1, y, z) + f(x, y, a_3) - f(a_1, a_2, z) - f(a_1, y, a_3) - f(x, a_2, a_3) + f(a_1, a_2, a_3)$$





## Оператор інтерфлотації функції $f(x, y, z)$ на трьох площинах $x = a_1, y = a_2, z = a_3$ .

має такі інтерфлотаційні властивості властивості:

$$O_3 f|_{x=a_1} = f(a_1, y, z), \quad O_3 f|_{y=a_2} = f(x, a_2, z), \quad O_3 f|_{z=a_3} = f(x, y, a_3).$$

При цьому справедлива тотожність  
 $f(x, y, z) = O_3 f(x, y, z) + R_3 f(x, y, z),$

$$R_3 f(x, y) = \int_0^x \int_0^y \int_0^z f^{(1,1,1)}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad - \quad \text{інтегральний}$$

вигляд похибки наближення.



# Оператор інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ на чотирьох площинах $x = x_1, x = x_2, y = y_1, y = y_2$ .



УКРАЇНА (11) UA (11) 50348 (11) U  
 (31) МПК (2000) G01N 23/22

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
 ДЕРЖАВНИЙ ДЕПАРТАМЕНТ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОЇ ВЛАСНОСТІ

ОПИС ДО ПАТЕНТУ НА КОРИСНУ МОДЕЛЬ

ВІДНОСИТЬСЯ ДО ВІСЬОМЬНАСІЗНОЇ СИСТЕМИ КООРДИНАТ

(34) СПОСІБ ВІДНОВЛЕННЯ ВНУТРІШНЬОЇ СТРУКТУРИ ТРИВИМІРНОГО ТІЛА

1	2
<p>(21) 020000337                      (22) 10.08.2009                      (24) 10.08.2010                      (46) 10.08.2010, Бюл. № 11, 2010 р.                      (72) ОЛЕГ МИКОЛАЙОВИЧ ПЕРШИН, ДИТЯЧІН ОЛЕГ МИКОЛАЙОВИЧ, ПЕРШИНА ОЛЕНА ГОРЬОНА, ДИТЯЧІН ОЛЕГ СЕВЕРОВИЧ, КУЦЬК СТАНИСЛАВ ІВАНОВИЧ                      (73) УКРАЇНСЬКА ІНЖЕНЕРНО-ПЕДАГОГІЧНА АКАДЕМІЯ                      (80) Спосіб відновлення внутрішньої структури тривимірного тіла, що передбачає сканування тіла за допомогою детекторів зображення та системи детектування, сканування показує топографічну площу, щодо зображень-поверхонь, які розташовані у площині сканування, щоб відновитися тим, що сканування тіла виконується у системі двох взаємно перпендикулярних напрямків, отримувати зображення, приймає по дві топографічні площини з напрямків, отримані показує поверхню в еліпсоїдній формі, на основі цих чотирьох показує отримувати функціональну залежності <math>v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y), v_4(x, y)</math>, що мають вигляд аналітичних виразів для поліноміальної щільності картин, зображення на першій та другій парі показує, в значенні об'ємної щільності у точці з координатами <math>(x, y, z) = (x, y, z)</math> визначають за формулами:  <math display="block">v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y)</math>                      у якій всі доданки реалізують із урахуванням повільного зведення функції</p>	<p><math>v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y)</math> у вигляді  <math display="block">v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y) = \frac{a - b_1 z}{b_1 - b_2} + \frac{a - b_2 z}{b_2 - b_3} + \frac{a - b_3 z}{b_3 - b_4} + \frac{a - b_4 z}{b_4 - b_5} + \frac{a - b_5 z}{b_5 - b_6} + \frac{a - b_6 z}{b_6 - b_7} + \frac{a - b_7 z}{b_7 - b_8} + \frac{a - b_8 z}{b_8 - b_9} + \frac{a - b_9 z}{b_9 - b_{10}}</math>  <math display="block">v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y) = \frac{a - b_1 z}{b_1 - b_2} + \frac{a - b_2 z}{b_2 - b_3} + \frac{a - b_3 z}{b_3 - b_4} + \frac{a - b_4 z}{b_4 - b_5} + \frac{a - b_5 z}{b_5 - b_6} + \frac{a - b_6 z}{b_6 - b_7} + \frac{a - b_7 z}{b_7 - b_8} + \frac{a - b_8 z}{b_8 - b_9} + \frac{a - b_9 z}{b_9 - b_{10}}</math>  <math display="block">v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y) = \frac{a - b_1 z}{b_1 - b_2} + \frac{a - b_2 z}{b_2 - b_3} + \frac{a - b_3 z}{b_3 - b_4} + \frac{a - b_4 z}{b_4 - b_5} + \frac{a - b_5 z}{b_5 - b_6} + \frac{a - b_6 z}{b_6 - b_7} + \frac{a - b_7 z}{b_7 - b_8} + \frac{a - b_8 z}{b_8 - b_9} + \frac{a - b_9 z}{b_9 - b_{10}}</math>  <math display="block">v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y) = \frac{a - b_1 z}{b_1 - b_2} + \frac{a - b_2 z}{b_2 - b_3} + \frac{a - b_3 z}{b_3 - b_4} + \frac{a - b_4 z}{b_4 - b_5} + \frac{a - b_5 z}{b_5 - b_6} + \frac{a - b_6 z}{b_6 - b_7} + \frac{a - b_7 z}{b_7 - b_8} + \frac{a - b_8 z}{b_8 - b_9} + \frac{a - b_9 z}{b_9 - b_{10}}</math>                      де  <math>v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y)</math> - функції щільності окремо кожного з парів у горизонтальній координаті і та вертикальній координаті по дві парі показує.  <math>v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y)</math> - функції щільності окремо кожного з парів у горизонтальній координаті і та вертикальній координаті по дві парі показує.  <math>x = b_1 x + b_2 y + b_3 z</math> - площина, на якій лежить перша пара показує.  <math>y = b_4 x + b_5 y + b_6 z</math> - площина, на якій лежить друга пара показує.</p>

Корисна модель відноситься до топографічних векторів відновлення тривимірної структури тривимірного тіла на основі двох взаємно перпендикулярних напрямків і може бути використана при відновленні внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою двох взаємно перпендикулярних напрямків, отримувати зображення, приймає по дві топографічні площини з напрямків, отримані показує поверхню в еліпсоїдній формі, на основі цих чотирьох показує отримувати функціональну залежності  $v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y), v_4(x, y)$ , що мають вигляд аналітичних виразів для поліноміальної щільності картин, зображення на першій та другій парі показує, в значенні об'ємної щільності у точці з координатами  $(x, y, z) = (x, y, z)$  визначають за формулами:  

$$v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y)$$
  
 у якій всі доданки реалізують із урахуванням повільного зведення функції

UA 50348 U

Корисна модель відноситься до топографічних векторів відновлення тривимірної структури тривимірного тіла на основі двох взаємно перпендикулярних напрямків і може бути використана при відновленні внутрішньої структури тривимірного тіла за допомогою двох взаємно перпендикулярних напрямків, отримувати зображення, приймає по дві топографічні площини з напрямків, отримані показує поверхню в еліпсоїдній формі, на основі цих чотирьох показує отримувати функціональну залежності  $v_1(x, y), v_2(x, y), v_3(x, y), v_4(x, y)$ , що мають вигляд аналітичних виразів для поліноміальної щільності картин, зображення на першій та другій парі показує, в значенні об'ємної щільності у точці з координатами  $(x, y, z) = (x, y, z)$  визначають за формулами:  

$$v_1(x, y) = v_2(x, y) = v_3(x, y) = v_4(x, y)$$
  
 у якій всі доданки реалізують із урахуванням повільного зведення функції



## Оператор інтерфлетації функції $f(x, y, z)$ на чотирьох площинах $x = x_1, x = x_2, y = y_1, y = y_2$ .

Оператор

$$O(x, y, z) = O1(x, y, z) + O2(x, y, z) - O12(x, y, z),$$

де

$$O1(x, y, z) = f(x_1, y, z) \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + f(x_2, y, z) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

$$O2(x, y, z) = f(x, y_1, z) \cdot \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} + f(x, y_2, z) \cdot \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

$$O12(x, y, z) = \left( f(x_1, y_1, z) \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} + f(x_1, y_2, z) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} + \left( f(x_2, y_1, z) \frac{y - y_2}{y_1 - y_2} + f(x_2, y_2, z) \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \right) \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1};$$

має такі інтерфлетаційні властивості властивості:

$$O f \Big|_{x=x_i} = f(x_i, y, z), \quad O f \Big|_{y=y_j} = f(x, y_j, z), \quad i, j = 1, 2$$

## 4. Інтерстріпація функцій трьох змінних

Нехай задана функція  $z = f(x, y)$  двох змінних і система смуг

$$D_k : \{y_k \leq y \leq y_{k+1}, x \in [\alpha_k, \beta_k]\}$$

Тут  $z$  – віддаль від деякої площини  $z = 0$  до поверхні в точці  $(x, y)$

**Інтерстріпацією функції  $f(x, y, z)$**  (від англ. *inter* – між, *strip*-смуга) на системі смуг  $D_k$  називається відновлення її за допомогою слідів на смугах  $f(x, y)|_{D_k}$ .

## 4. Інтерстріпація функцій трьох змінних

Вважаємо, що нам задана система горизонтальних смуг

$$D2_l = \{\gamma_l \leq y \leq \delta_l, x \in [\alpha_1, \beta_{n+1}]\}, l = \overline{1, n},$$

а також система вертикальних смуг

$$D1_k = \{\alpha_k \leq x \leq \beta_k, y \in [\gamma_1, \delta_{n+1}]\}, k = \overline{1, m}.$$

Поверхня  $z = f(x, y)$ , яку ми хочемо відновити, вважається відомою лише на вказаних смугах, тобто

$$f(x, y)|_{\alpha_k \leq x \leq \beta_k} = f_{1,k}(x, y), \alpha_k \leq x \leq \beta_k, \gamma_1 \leq y \leq \delta_{n+1},$$

$$f(x, y)|_{\gamma_l < y < \delta_l} = f_{2,l}(x, y), \gamma_l < y < \delta_l, \alpha_1 \leq x \leq \beta_{m+1}.$$

## 5. Порівняння інтерполяції, інтерлінації, інтерфлетації, інтерстріпації, інтерлокації

Метод наближення	Тип використовуваної інформації
Інтерполяція функцій однієї або кількох змінних	Значення функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) у деяких заданих точках
Інтерлінація функцій двох або більше змінних	Сліди функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) на декількох заданих лініях
Інтерфлетація функцій трьох і більше змінних	Сліди функції $f(x)$ та її похідних (до фіксованого порядку) на декількох заданих поверхнях
Інтерстріпація функцій трьох і більше змінних	Функції $f_k(x, y), k = \overline{1, M}$ , які збігаються з $f(x, y)$ на декількох заданих смугах $S_k = \{(x, y) : w_{k1}(x, y) \geq 0, w_{k2}(x, y) \leq 0\}, k = \overline{1, M}$ $w_{k1}(x, y) \geq 0, w_{k2}(x, y) \leq 0$ - задані функції. $f_k(x, y) = f(x, y), (x, y) \in S_k, k = \overline{1, M}$
Інтерлокація	Функції заданої гладкості і <u>нормалізованості</u> , нулями яких є локуси – області, які не перетинаються

## 6. Чисельні експерименти

**Приклад 1.** Нехай ми маємо фотографії двох смуг одного об'єкту F1 (Рис. 1) і F2 (Рис. 2).



F1

Рис. 1. Перша смуга



F2

Рис. 2. Друга смуга



F4

Рис. 3. Скомпонована матриця з даних смуг.

## 6. Чисельні експерименти

За допомогою інтерстріпації відновлюємо повне зображення  $F$



$F$

Рис. 4. Відновлене зображення.



$F_3$

Рис. 5. Оригінал зображення

## 6. Чисельні експерименти

**Приклад 2.** Аналогічно розглядається чисельна реалізація метода інтерстріпації між паралельними вертикальними смугами.

Маємо чотири смуги одного знімка, розташовані у певному порядку (рис. 6).



Рис. 6. Зображення смуг знімка, розташованих у певному порядку.

## 6. Чисельні експерименти



Рис. 7. Матриця  $S$  об'єднана з даних смуг, заданих у певному порядку.

За допомогою відповідних операторів інтерстріпації, відновлюємо повне зображення



Рис. 8. Відтворене зображення, за допомогою інтерстріпації ( $F$ ) і реальне зображення ( $FN$ ).



## 6. Чисельні експерименти

**Приклад 3.** Опишемо чисельну реалізацію інтерстріпації між взаємно перпендикулярними смугами.

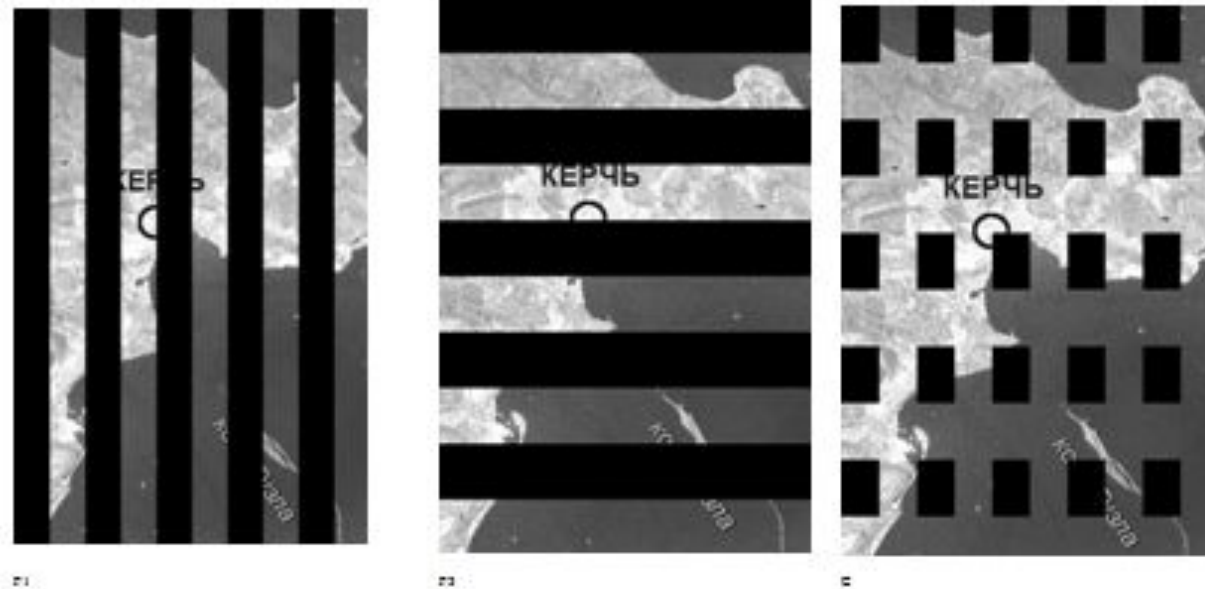


Рис. 9. Зображення матриць: а) з відомими вертикальними смугами (F1); б) з відомими горизонтальними смугами (F3); в) матриці об'єднання смуг.

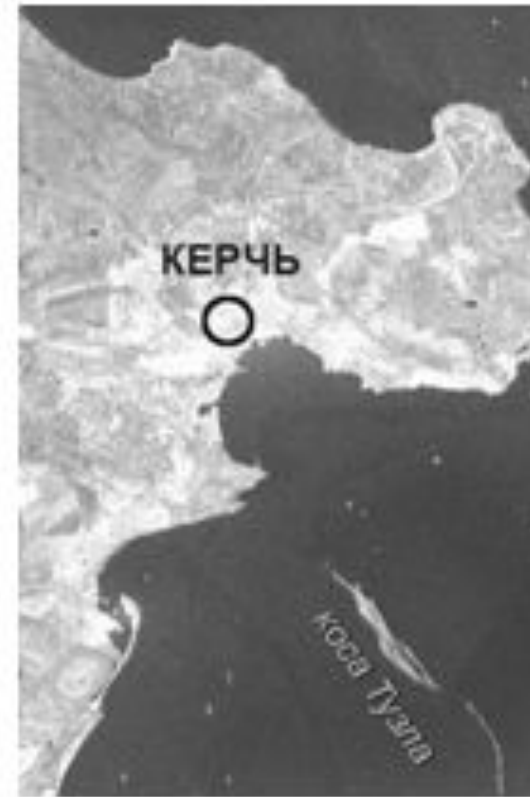


Рис. 10. Відновлене зображення F і оригінал FN.

## 6. Чисельні експерименти

**Приклад 4.** У наступному прикладі наведені результати відновлення поверхні об'єкта – Ейфелевої вежі, про яку відомо, що вона є розривною (Рис. 12).



а)



б)



в)



г)

Рис. 12. а) оригінал зображення поверхні; б) зображення 5-ти горизонтальних смуг; в) зображення 5-ти вертикальних смуг; г) відновлене зображення поверхні за допомогою інтерстріпації ( $N = 0$ ).