Новосибирский Государственный Архитектурно-Строительный Университет (Сибстрин)

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ. ДИНАМИКА

ЛЕКЦИЯ 13.
УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

Кафедра теоретической механики

План лекции

(1736-1813)

Я прожил жизнь. Я добился признания как математик. Я никогда не испытывал к кому-нибудь ненависти. Я не сделал ничего дурного, и мне будет легко умирать.

Жозеф Луи Лагранж

- Уравнение Лагранжа
- Основная задача динамики в обобщенных координатах
- Случай потенциальных сил
- Рекомендации к решению задач
- Задача
- Заключение

Уравнения Лагранжа второго рода

Цель: ***Получить систему Д.У. для определения законов движения системы***

$$q_1 = q_1(t), \qquad q_2 = q_2(t), \qquad q_s = q_s(t)$$

Запишем принцип Даламбера-Лагранжа в обобщенных координатах:

$$\delta A^{акт} + \delta A^{ин} = \sum_j (Q_j + Q_j^{ин})\delta q_j = 0$$

$$Q_j = \sum_k \overline{F}_k^{акт} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}$$ - обобщенные силы,

$$Q_j^{ин} = \sum_k \overline{F}_k^{ин} \cdot \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}$$ - обобщенные силы инерции.

$\delta q_1, \ldots, \delta q_s$ независимы,

каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \ldots, \delta q_s$ равен нулю

$$Q_j + Q_j^{ин} = 0, \quad j = 1, \ldots, s \qquad (1)$$

Выразим $Q_j^{ин}$ через кинетическую энергию системы $T = \sum_k m \mathrm{v}_\mathrm{k}^2 / 2$

Сила инерции любой из точек системы:

$$\overline{F_k^{ин}} = -m_k \overline{a_k} = -m_k d\overline{v_k} / dt,$$

$$-Q_j^{ин} = \sum m_k \frac{d\overline{v_k}}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_j}$$

преобразуем правую часть

$$\frac{d\overline{v_k}}{dt} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(\overline{v_k} \cdot \frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_j}) - \overline{v_k} \cdot \frac{d}{dt}(\frac{\partial \overline{r_k}}{\partial q_j}) \qquad (2)$$

$$-Q_j^{ин} = \sum m_k\left(\frac{d}{dt}\left(\overline{v}_k\cdot\frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j}\right) - \overline{v}_k\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_j}\right)\right) \qquad (2a)$$

$$\overline{r}_k=\overline{r}_k(q_1,\ldots,q_s,t), \quad \Rightarrow \quad \overline{v}_k = \frac{d\overline{r}_k}{dt} = \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial t}+\sum_k \frac{\partial\overline{r}_k}{\partial q_j}\dot{q}_j$$

Дифференцируем (3) по $\dot{q}_j$ $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \overline{v}_k}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \overline{r}_k}{\partial q_j} \qquad (4)$$

Тогда (2а) с учетом (4) запишется в виде

$$Q_j^{in} = -\sum_k m_k\left[\frac{d}{dt}\left(\overline{v}_k\cdot\frac{\partial\overline{v}_k}{\partial\dot{q}_j}\right) - \frac{\partial(\overline{v}_k^{2}/2)}{\partial q_j}\right] = -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_k m_k \overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{k}}^{2}/2 + \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_k m_k\overline{\mathrm{v}}_{\mathrm{k}}^{2}/2$$

$$Q_j^{in} = -\sum_k m_k \left[\frac{d}{dt}\left(\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial(\bar{v}_k^2/2)}{\partial q_j}\right] = -\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\sum_k m_k \bar{\mathrm{v}}_\mathrm{k}^2/2 + \frac{\partial}{\partial q_j}\sum_k m_k \bar{\mathrm{v}}_\mathrm{k}^2/2$$

Таким образом, $$Q_j = -Q_j^{ин} = \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j}$$

Мы получили уравнения Лагранжа второго рода

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j$$

Основная задача динамики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы Q1…Qs и начальные условия, определить обобщенные координаты q1…qs как функции времени.

Случай потенциальных сил

Если действующие на систему силы потенциальные, то можно Л-II записать в виде:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}+\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}=0, \qquad \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_{j1}}\right]-\frac{\partial (T-\Pi)}{\partial q_j}=0$$

Последнее равенство справедливо потому, что потенциальная энергия П зависит только от координат q1…qs, а от обобщенных скоростей не зависит

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_j}=0$$

$L=T-\Pi$ -называется функцией Лагранжа

Уравнения Лагранжа позволяют:

1. Решить основную (обратную) задачи динамики в обобщенных координатах – по известным обобщенным силам $Q_1 \ldots Q_s$ ***и начальным условиям найти закон движения системы***

$$q_1 = q_1(t), \quad q_2 = q_2(t), \quad q_s = q_s(t)$$

2. Решить прямую задачу динамики – по заданному закону движения

найти обобщенные силы $Q_1, \ldots, Q_s$
А по ним уже восстанавливать активные силы, действующие на систему.

Уравнения Лагранжа являются <u>основным инструментом исследования</u> сложных механических систем.

Рекомендации к решению

1. Выбрать механическую систему и проверить связи на применимость.

(если связь не идеальная – перевести силу трения в разряд активных сил; если связь неудерживающая – рассматривать только те возможные перемещения, которые удерживают точки на этой связи).

2. Изобразить все активные силы (и реакции неидеальных связей)

3. Определить число степеней свободы s и ввести обобщенные координаты $q_1, \ldots, q_s$

Рекомендации к решению Л-II

4. Получить зависимость кинетической энергии в виде $T = T(q_1,\dots,q_s,\dot q_1,\dots,\dot q_s,t)$

5. Найти обобщенные силы $Q_1,\dots,Q_s$

(взять $\delta q_i = 0, i \neq j, \delta q_j \neq 0,$ составить уравнение $\delta A_j = \sum_k \overline{F}_k^{акт} \cdot \delta \overline{s}_k$,

Выразить все $\delta \overline{s}_k$ через δq_i, получить выражение

$$\delta A_j = \sum_k \overline{F}_k^{акт} \cdot \delta \overline{s}_k = Q_j \delta q_j$$ и найти Q_j)

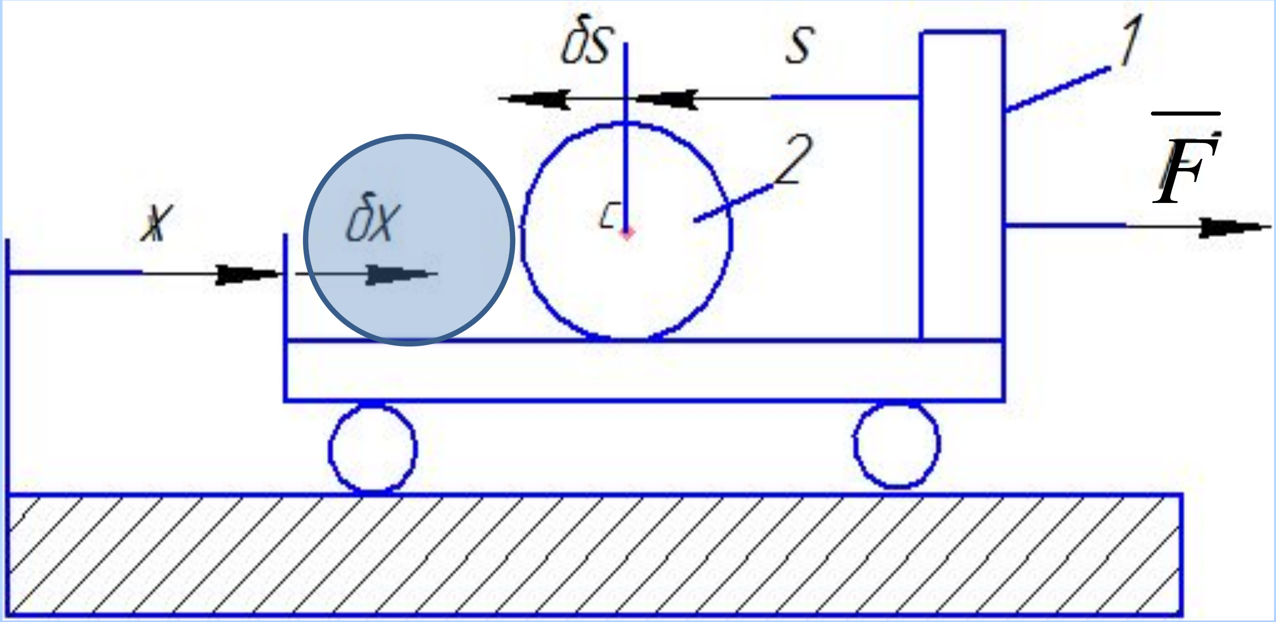
6. Написать начальные условия Н.У.: $q_j(0) = q_{j0}, \dot q_j(0) = \dot q_{j0}$

7. Составить уравнения Лагранжа и проинтегрировать их с учетом Н.У.

Задача

Дано: масса тележки равна m_1, масса катка m_2,

Определить: ускорение тележки вдоль горизонтальной плоскости под действием приложенной к ней силы $\overline{F}$, если каток при этом катится по тележке без скольжения, массой колес пренебречь



Решение

1. Система имеет две степени свободы . В качестве обобщенных координат выберем координату *x* тележки и координату s центра масс *C* катка катка относительно тележки. Тогда уравнения Л-II для системы будут:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=Q_1;\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)-\frac{\partial T}{\partial s}=Q_2 \qquad \text{(a)}$$

2.

$$T_1=m_1\dot{x}^2/2 \qquad T_2=m_2v_c^2/2+J_c\omega^2/2$$

где $v_C=\dot{x}-\dot{s}$

$$J_C = m_2 r^2 / 2$$ -Для сплошного цилиндра

а при качении без скольжения $\omega = \dot{s} / r$

где $\dot{s}$ -относительная скорость центра С по отношению к тележке

тогда получим: $T = T_1 + T_2 = m_1 \dot{x}^2 / 2 + m_2 \left(\dot{x} - \dot{s} \right)^2 / 2 + m_2 \dot{s}^2 / 4$ (б)

тогда:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} + m_2 \left(\dot{x} - \dot{s} \right), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m_2 \left(\dot{s} - \dot{x} \right) + m_2 \frac{\dot{s}}{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial s} = 0 \qquad \text{(в)}$$

3. Дадим системе возможное перемещение, при котором координата *x* получает приращение $\delta x>0$. На этом перемещении $\delta A_1=F\delta x$. На перемещении же, при котором s получает приращение δs, очевидно, $\delta A_2=0$. Следовательно,

$$Q_1=F, \quad Q_2=0$$

4.Подставим эти значения Q_1, Q_2 и значения производных, определяемые формулами (в), в равенства (а), найдем следующие дифференциальные уравнения движения системы:

$$(m_1+m_2)\ddot{x}-m_2\ddot{s}=F \qquad 3\ddot{s}-2\ddot{x}=0 \qquad \text{(г)}$$

Из последнего уравнения $\ddot{s}=2\ddot{x}/3$, и тогда первое уравнение дает:

$$a_1=\ddot{x}=3F/(3m_1+m_2)$$

Если каток был бы на тележке закреплен неподвижно, то ее ускорение равнялось бы $F/(m_1+m_2)$

5. Допустим, что трения катка о тележку нет. Тогда он по тележке будет скользить, двигаясь поступательно, и

$$T_2 = m_2 v_C^2 / 2 = m_2(\dot{x} - \dot{s})^2 / 2$$

. В результате для системы:

$$T = m_1 \dot{x}^2 / 2 + m_2(\dot{x} - \dot{s})^2 / 2$$

Первое из уравнений (г) при этом не изменится, а второе, так как теперь $\partial T / \partial \dot{s} = m_2(\dot{s} - \dot{x})$, примет вид $\ddot{s} - \ddot{x} = 0$.

В результате из первого уравнения системы (г) находим для ускорения тележки значение

$$a_1 = F / m_1$$

Заключение

1. ***В обобщенных координатах принцип Даламбера-Лагранжа принимает вид уравнений Лагранжа второго рода***

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \qquad j = 1,\ldots,s.$$

2. ***Уравнения Л-II представляют собой систему из s дифференциальных уравнений второго порядка относительно обобщенных координат*** $q_1,\ldots,q_s$

s ***- число степеней свободы***

$T = T(q_1,\ldots,q_s,\dot{q}_1,\ldots,\dot{q}_s,t)$ ***- кинетическая энергия***

$Q_j,\ j = 1,\ldots,s$ ***- обобщенные силы***

3. *Для консервативных механических систем уравнения Лагранжа имеют вид*

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \qquad j = 1,\ldots,s.$$

$\Pi(t, q_1, \ldots, q_s)$ - *потенциальная энергия системы*

Достоинства уравнений Лагранжа

1. Позволяют исключить из рассмотрения все идеальные связи.

2. Их вид и число не зависят ни от количества тел в системе, ни от вида их движения.