Дисциплина:

МАТЕМАТИКА

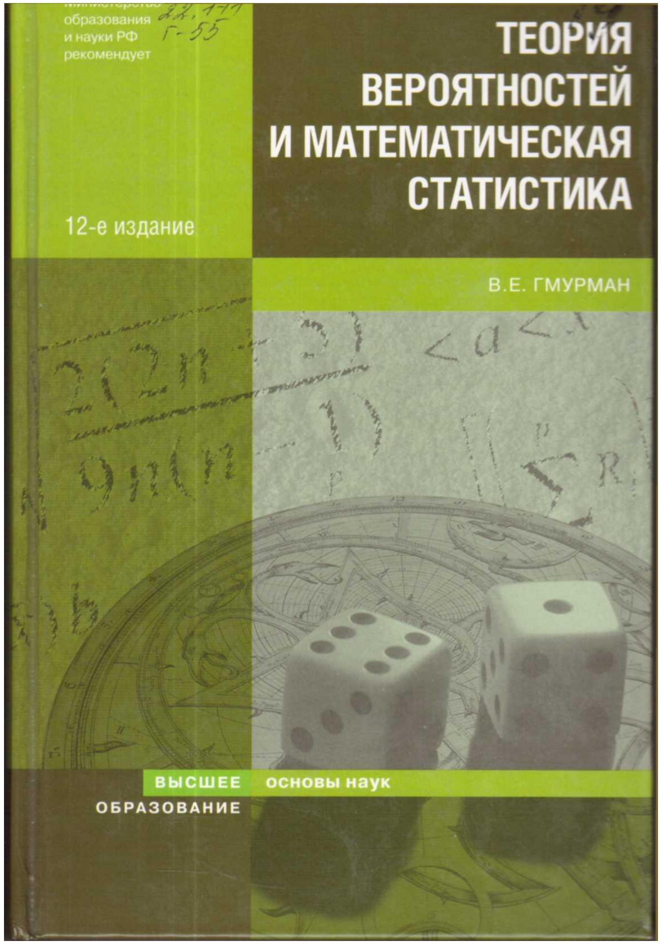
- Лектор: Ахкамова Юлия Абдулловна
- доцент кафедры математики и методики обучения математике ЮУрГГПУ
- akhkamovayua@cspu.ru

ЛЕКЦИЯ № 19

Формула полной вероятности, формула Байеса. Схема Бернулли. Понятия дискретной и непрерывной величин, их числовые характеристики, виды распределений

ЛИТЕРАТУРА

- Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, Высшее образование, 2006, с. 50-63.



ЛИТЕРАТУРА

- Шолохович Ф.А. Высшая математика в кратком изложении.
- Баврин И.И. Высшая математика.
- Данко П.Е., Попов А.Г и др. Высшая математика в упражнениях и задачах, часть II.

УЧЕБНЫЕ ВОПРОСЫ

- 1.Теоремы о повторении опытов.
- Определение вероятности появления события не менее «m» раз и не менее одного раза в «n» опытах.
- 2.Теорема о полной вероятности, формула Байеса.

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

- Теоремы о повторении опытов.
- -Определение вероятности появления события не менее «m» раз и не менее одного раза в «n» опытах.

Теоремы о повторении опытов.

- Рассмотрим многократное повторение одного и того же испытания, в котором может либо наступить, либо не наступить событие А. Вероятность появления А в каждом из испытаний постоянна, равна р.
- Такие испытания называются "схемой повторных независимых испытаний" или "схемой Бернулли".

Формула Бернулли.

Если вероятность появления события A в каждом испытании постоянна, то вероятность того, что событие A произойдёт ровно k раз в n независимых испытаниях вычисляется по **формуле Бернулли**

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad ,$$

- где p – вероятность появления события A,

  q=1-p

- **Пример.**
- Вероятность изготовления стандартной детали равна 0,9. Какова вероятность того, что среди 10 деталей окажется более 1 нестандартной?

По условию n = 10; вероятность изготовления нестандартной детали p = 1 – 0,9 = 0,1; тогда q = 0,9.

Найдем вероятность $\overline{A}$:

$$P(\overline{A}) = P_{10}(0) + P_{10}(1) = C_{10}^{0} \cdot p^0 \cdot q^{10} + C_{10}^{1} \cdot p^1 \cdot q^9 =$$

$$= \frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^{10} + \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^9 =$$

$$= 0{,}9^{10} + 10 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^9 = 0{,}9^9 \cdot 1{,}9 = 0{,}3874 \cdot 1{,}9 = 0{,}736.$$

Тогда P (A) = 1 – 0,736 = 0,264.

Приближенные формулы в схеме Бернулли

Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, а число испытаний достаточно велико, то вероятность того, что событие A произойдёт ровно k раз в n независимых испытаниях

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right) \quad ,$$

где

$$\varphi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

; φ(-x)=φ(x); для значений этой функции составлены специальные таблицы.

- **Пример.**
- Вероятность поражения мишени стрелком равна $p=0,8$. Найти вероятность того, что при $n=100$ выстрелах мишень будет поражена ровно $k=86$ раз.

По условию n =100; k=86; p = 0,8; q=0,2.

Найдем значение x:

$$x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}} = \frac{86-100\cdot 0{,}8}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}} = \frac{86-80}{\sqrt{16}} = 1{,}5.$$

По таблице найдем значение φ(1,5)=0, 1295.

Тогда $P_{100}(86) \approx \frac{1}{\sqrt{100\cdot 0{,}2\cdot 0{,}8}}\cdot 0{,}1295 =$

$$= \frac{1}{4}\cdot 0{,}1295 = 0{,}032.$$

Интегральная теорема Муавра-Лапласа

Если вероятность p наступления события A в каждом испытании постоянна и отлична от 0 и 1, то вероятность появления события A не менее k_1 раз и не более k_2 раза при достаточно большом количестве испытаний n:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

- где

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$

- функция Лапласа,

- её значения приведены в специальных таблицах;
- Ф(-х) = - Ф(х);
- Ф(х>5)=0,5.

- **Пример.**

Вероятность выпуска нестандартной лампы $p = 0{,}1$. Чему равна вероятность того, что в партии из 2000 ламп число стандартных не менее 1790 штук.

$p = 0{,}9$, $q = 0{,}1$, $n = 2000$, $k_1 = 1790$, $k_2 = 2000$.

$$x'' = \frac{2000 - 2000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}1}} = 14{,}9, \quad x' = \frac{1790 - 2000 \cdot 0{,}9}{\sqrt{2000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = -0{,}75$$

$$P_{2000}(1790 \le k \le 2000) = \Phi(14{,}9) - \Phi(-0{,}75) = 0{,}5 + 0{,}273 = 0{,}773.$$

Формула Пуассона

При большом числе n испытаний и сравнительно малой вероятности p наступления события A в каждом испытании выполняется приближенное равенство

$$P_n(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda}$$

где $\lambda = np$.

- **Пример.**
- Вероятность угадывания 6 номеров в спортлото (6 из 49) равна $7{,}2 \cdot 10^{-8}$. При подсчете оказались заполненными 5 млн. карточек. Какова вероятность того, что никто не угадал все 6 номеров? Какое наименьшее количество карточек нужно заполнить, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хотя бы один угадал 6 номеров?

Найдем вероятность того, что никто не угадал все 6 номеров.

Имеем $p = 7{,}2 \cdot 10^{-8}$, $n = 5\ 000\ 000$, $m = 0$.

Тогда $\lambda = 5\ 000\ 000 \cdot 7{,}2 \cdot 10^{-8} = 0{,}36$.

Следовательно, $P_n(0) \approx \dfrac{0{,}36^0 \cdot e^{-0{,}36}}{0!} = 0{,}6977.$

Вероятность того, что из n билетов хотя бы один угадал 6 номеров равна $1 - P_n(0)$.

Определим n из неравенства $1 - P_n(0) \geq 0{,}9$.

$$1 - e^{-np} \geq 0{,}9;$$

$$e^{-np} \leq 0{,}1;$$

$$-np \leq \ln 0{,}1;$$

$$-7{,}2 \cdot 10^{-8} \cdot n \leq -2{,}3026;$$

$$n \geq \frac{2{,}3026}{7{,}2 \cdot 10^{-8}} = 31\,980\,000.$$

Таким образом, нужно заполнить как минимум 31 980 000 карточек, чтобы с вероятностью не менее 0,9 хотя бы один угадал 6 номеров.

Определение вероятности появления события не менее «m» раз и не менее одного раза в «n» опытах.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит:

- не более m раз

$$P_n(k \le m) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m)$$

- Не менее m раз

$$P_n(k \ge m) = P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n)$$

- **событие А не наступит ни разу**

$$P_n(0) = q^n$$

- **произойдет хотя бы раз (не менее одного)**

$$P_n(k \geq 1) = 1 - P_n(0) = 1 - q^n$$

Отклонение относительной частоты от вероятности

С помощью функции Лапласа можно найти вероятность отклонения относительной частоты $\frac{m}{n}$ от вероятности p в n независимых испытаниях. Имеет место формула:

$$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=2\Phi\left(\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{n}{pq}}\right),$$

где $\varepsilon>0$ - некоторое число.

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

- **Теорема о полной вероятности, формула Байеса.**
-

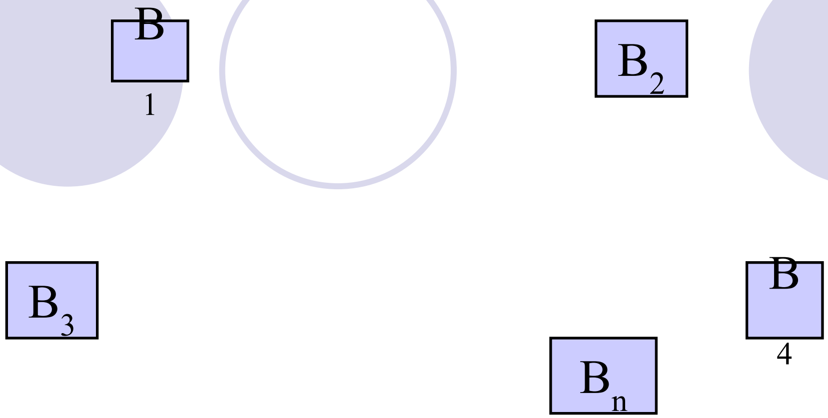
- Теорема о полной вероятности.
- Пусть имеется группа событий B_1, B_2,..., B_n, обладающая следующими свойствами:
- 1) все события попарно несовместны:

$$B_i \cap B_j = \varnothing ; \quad i \neq j;$$

- 2) их объединение образует пространство элементарных исходов Ω:

$$\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n.$$

В этом случае будем говорить, что B_1, B_2,..., B_n образуют полную группу событий. Такие события назовём гипотезами.



- Пусть А - некоторое событие, которое может наступить лишь при появлении одного из событий B_i . Тогда имеет место **формула полной вероятности:**

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/\ B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+\ldots+P(B_n)\cdot P(A/B_n)$$

- Пример.
- На трех станках изготавливаются одинаковые детали, причем на первом вырабатывается 50% всех деталей, на втором – 30% и на третьем – 20%. При этом, вероятность появления брака с первого станка составляет 0,05, со второго – 0,08, с третьего – 0,1. Найти вероятность того, что наудачу взятая деталь соответствует стандарту.

- Решение.
- Обозначим через А событие – наудачу взятая деталь соответствует стандарту.
- Возможны следующие предположения (гипотезы):
- B_1 – деталь изготовлена на первом станке;
- B_2 - деталь изготовлена на втором станке;
- B_3 - деталь изготовлена на третьем станке.

- Найдем вероятности этих гипотез. Поскольку на первом станке вырабатывается 50% всех деталей, то $P(B_1) = 0{,}5$;

  $P(B_2) = 0{,}3$; $P(B_3) = 0{,}2$.
- Найдем условные вероятности события А:
- $P(A/B_1) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.
- $P(A/B_2) = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$.
- $P(A/B_3) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

- Искомую вероятность того, что наудачу взятая деталь соответствует стандарту, находим по формуле полной вероятности:
- $P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)+ +P(B_3)\cdot P(A/B_3)=$
- $=0,5\cdot 0,95+0,3\cdot 0,92+0,2\cdot 0,9 = =0,475 + 0,276 + 0,18 = 0,931.$

- Пусть в результате проведения эксперимента появилось событие А. Если необходимо оценить вклад какого-либо события B_i в реализацию события А, то используется **формула Байеса** оценки вероятности гипотезы после опыта

$$P(B_k / A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A / B_k)}{P(A)}$$

- Используя для знаменателя формулу полной вероятности, получим

$$P(B_k / A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A / B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$

- **Пример.**
- Рассмотрим приведенную выше задачу о деталях, только изменим вопрос задачи. Пусть наудачу взятая деталь соответствует стандарту.

Найти вероятность того, что эта деталь изготовлена на третьем станке.

- Решение.
- По формуле Байеса

$$P(B_3 / A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A / B_3)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$

- Имеем

$$P(B_3 / A) = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}9}{0{,}931} = 0{,}193$$

УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

- Виды случайных величин и их числовые характеристики.

Под случайной величиной (С.В.) понимается числовая величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, причем заранее неизвестно какое именно.

Например:

1. Число родившихся детей в течение суток в городе N.
2. Количество бракованных изделий в данной партии.
3. Число произведённых выстрелов до первого попадания.
4. Дальность полёта артиллерийского снаряда.

Случайные величины

Дискретные

Непрерывные

- Определение. **Дискретной С.В.** называют случайную величину, которая прини-мает <u>только конечное или счетное число значений</u> x_1, x_2, ... с вероятнос-тями p_1, p_2, ... соответственно, при этом

$$p_1+p_2+\ldots=1.$$

- Определение. **Непрерывной С.В.** называют случайную величину, возможные значения которой непрерывно заполняют числовую ось или некоторый её отрезок.

Основные числовые характеристики С.В.

Математическое ожидание
M(X)

Дисперсия
D(X)

Среднее квадратическое отклонение
σ(X)

где :

Математическое ожидание С.В. Х

М(Х) называют средним значением С.В. Математическое ожидание показывает какое значение С.В. можно ожидать в среднем при проведении серии опытов.

- Дисперсией D(X) случайной величины X называется математическое ожидание её отклонения от математического ожидания

Основные формулы, определяющие числовые характеристики С.В.

Математическое ожидание	Дисперсия	Среднее квадратическое отклонение
Дискретные случайные величины		
$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$	$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i - M(X))^2 p_i$	$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$
Непрерывные случайные величины		
$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\varphi(x)dx$	$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-M(X))^2\varphi(x)dx$	$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}$

Функция распределения

- **Универсальным законом распределения С.В. любого типа является <u>функция распределения</u> С.В.– вероятность того, что значение С.В. будет меньше некоторого вполне определенного текущего значения *x*:**

$$F(x) = P(X < x).$$

Определение. Случайная величина X называется **непрерывной**, если её функция распределения F(x) (интегральная функция распределения) непрерывна в любой точке и дифференцируема всюду, кроме, быть может, отдельных точек.

Определение. **Плотностью распределения (дифференциальной функцией распределения) непрерывной случайной величины X** называется производная её функции распределения $\varphi(x) = F'(x)$.

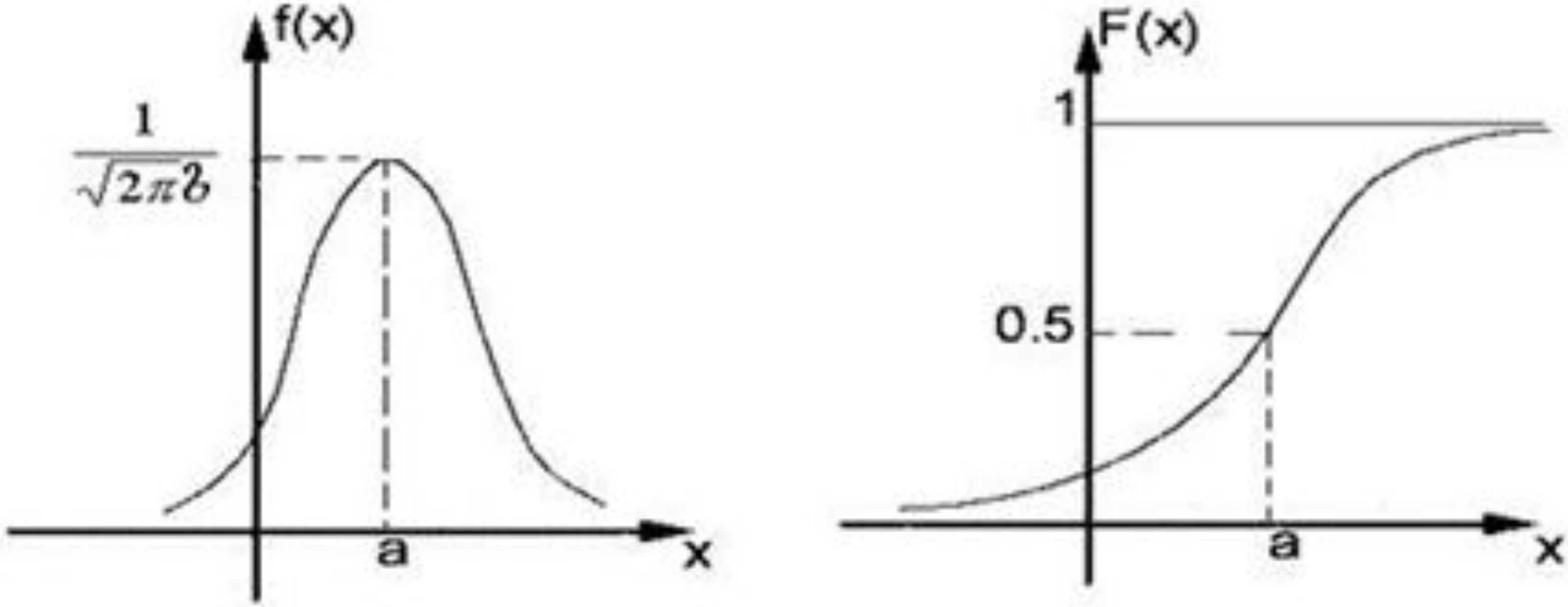
Нормальное распределение

- С. В. имеет нормальное распределение с параметрами a и σ, если её плотность распределения задаётся формулой

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

- Функция распределения имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$$


f(x)
$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta}$
a
x
F(x)
1
0.5
a
x

Задание на самоподготовку

- **Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, Высшее образование,2009, с. 30-51.**