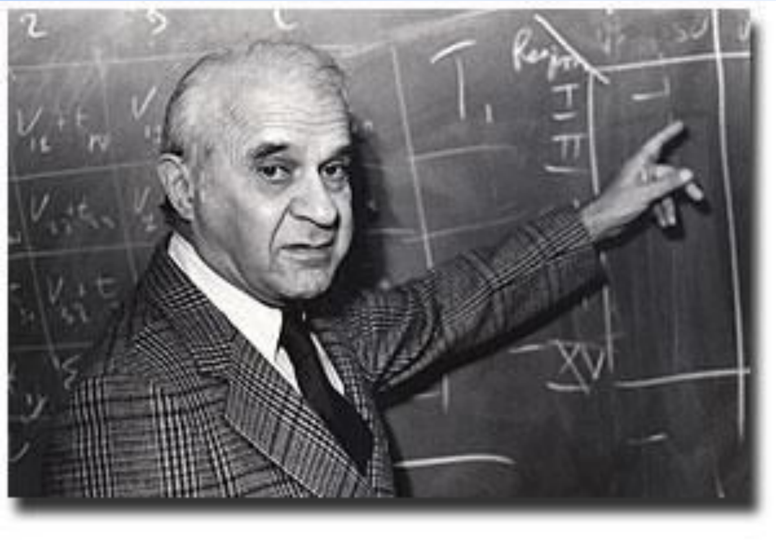
Лекція №7 Математичні моделі міжгалузевого балансу Леонтьєва

7.1. Основні поняття

Моде́ль міжгалузевого балансу (МГБ) Леонтьєва, яку також називають моделлю «ви́трати — ви́пуск», є основою багатьох лінійних моделей виробничого сектора економіки.

За розвиток цієї моделі та використання її до вирішення важливих економічних проблем Василь Леонтьєв в 1973 році отримав Нобелівську премію з економіки.



Васи́ль Васи́льович Лео́нтьєв

(5.08.1905–5.02.1999) американський економіст російського походження, лауреат Нобелівської премії з економіки 1973 року.

Його основні роботи:

- «Структура американської економіки» (The Structure of American Economy, 1941);
- "Економіка «витрати — випуск» (Input—output Economics, 1966);
- «Економічні есе» (Essays in Economics: Theories and Theorizing, 1966).

Модель базується на понятті **«чиста галузь»**, яка має такі ознаки:

* ***кожна галузь виробляє лише один продукт;***
* ***кожен продукт виробляється лише однією галуззю;***
* ***кожна галузь має єдину технологію незмінну у часі.***

В процесі виробництва кожна галузь використовує продукцію інших галузей.

Нехай ввесь виробничий сектор складається з $\boldsymbol{n}$ чистих галузей, і відповідно існує різних $\boldsymbol{n}$ продуктів.

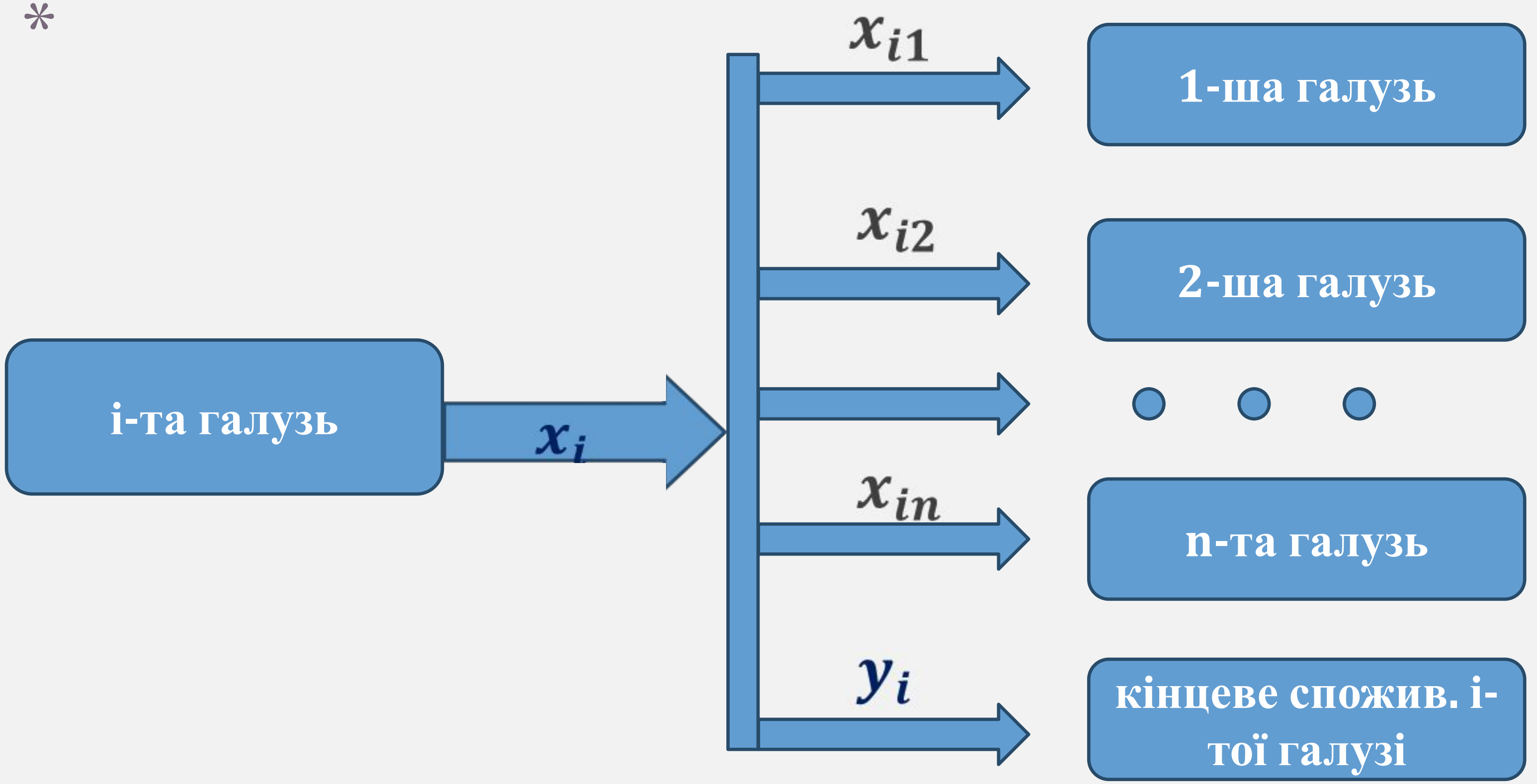
$\boldsymbol{x_{ij}}$— обсяг продукту і-тої галузі, витраченого j-тою галуззю у виробничому процесі.

$\boldsymbol{x_i}$— загальний обсяг продукту і-тої галузі

$\boldsymbol{y_i}$— обсяг продукту і-тої галузі, що не використовується для виробництва, тобто йде у кінцеве споживання.

$\boldsymbol{\nu_j}$— додана вартість j-тої продукції (прибуток, амортизація, податки, зарплата за наймом тощо).

*



$$x_i = (x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}) + y_i, \quad i \epsilon \{1, 2, \ldots, n\}. \qquad (1.1)$$

Для всього господарства загалом:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Аналогічно можна скласти рівняння, що показують затрати ресурсів на виробництво продукту, або технологію:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \nu_j$$

Таке рівняння може мати лише вартісне вираження (бо в суму входить додана вартість ν_j .

Загалом для національного господарства :

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} \nu_j \ .$$

Обсяг валового суспільного продукту як сума розподіленої продукції галузей дорівнює обсягу валового суспільного продукту як сумі всіх виробничих витрат. Прирівнявши праві частини загальнонаціональних рівнянь витрат отримаємо:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} v_j \ .$$

звідки, очевидно, випливає, що:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = \sum_{j=1}^{n} v_j.$$

Таким чином, ***споживається продукції на загальну вартість, яка дорівнює загальній доданій вартості всіх виробництв***.

7.2. Модель МГБ Леонтьєва

* Щоб побудувати модель, припускаємо, що $\boldsymbol{x_{ij}}$ залежить від обсягу виробництва:

$$\boldsymbol{x_{ij} = \varphi\left(x_j\right)} .$$

У найпростішій моделі припускають лінійну залежність між витратами та обсягом виробництва:

$$\boldsymbol{x_{ij} = a_{ij}\, x_j}, \qquad (1.2)$$

$$\{\boldsymbol{i, j}\}\epsilon\{\boldsymbol{1, 2}, \dots, \boldsymbol{n}\}.$$

Коефіцієнт $\boldsymbol{a_{ij}} \geq \boldsymbol{0}$ називається **коефіцієнтом прямих виробничих витрат** (**технологічним коефіцієнтом**) продукції і на виробництво продукції j.

Система рівнянь балансу приймає вигляд:

$$\boldsymbol{x_i = (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ \dots + a_{in}x_n) + \ y_i,} \qquad \boldsymbol{(1.3)}$$

$$\boldsymbol{i \epsilon \{1, 2, \dots, n\}.}$$

Позначимо:

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - вектор валового випуску продукції,

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ - вектор кінцевого споживання продукції,

$A = \{a_{ij}\}_{1,n}$— квадратна матриця коефіцієнтів прямих виробничих витрат (технологічна матриця).

Тоді міжгалузевий баланс можна записати матричним рівнянням, яке і є моделлю Леонтьєва:

$$\boldsymbol{x = Ax + y, \qquad x \geq 0.} \qquad \boldsymbol{(1.4)}$$

7.3. Аналіз продуктивності моделі Леонтьєва

Означення продуктивної моделі (технологічної матриці):

Якщо для будь-якого невід'ємного вектора кінцевого споживання $\boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}$ система

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

сумісна (має розв'язок), то відповідну модель Леонтьєва (технологічну матрицю А) називають продуктивною.

Означення продуктивної матриці:

Матриця А називається продуктивною, якщо існує вектор $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$, який дозволяє отримати невід'ємний вектор кінцевої продукції:

$$(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{0}.$$

Термін продуктивність можна вважати синонімом термінів «незбитковість», чи «рентабельність».

Критерії продуктивності:

Для того щоб матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат А була продуктивною, необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна з наведених далі умов:

1) існує невід'ємна матриця $(E - A)^{-1} \geq 0$;

2) матричний ряд

$$E + A + A^2 + \cdots + A^n + \cdots$$

збіжний, причому його сума дорівнює матриці $(E - A)^{-1}$;

3) найбільше за модулем власне значення матриці А, тобто розв'язок характеристичного рівняння $|A - \lambda E| = 0$, строго менше від одиниці.

Достатньою ознакою продуктивності матриці $\boldsymbol{A}$ є обмеження на її норму, тобто на значення найбільшої із сум елементів матриці $\boldsymbol{A}$ в кожному стовпці.

Якщо норма матриці $\boldsymbol{A}$ строго менша за одиницю, то ця матриця продуктивна. Ще раз наголосимо, що ця умова є тільки достатньою, і матриця $\boldsymbol{A}$ може бути продуктивною і тоді, коли її норма більша за одиницю.

Проаналізуємо матрицю коефіцієнтів повних матеріальних витрат, тобто матрицю $\boldsymbol{B = (E - A)^{-1}}$. Коефіцієнт цієї матриці $\boldsymbol{b_{ij}}$ показує, скільки всього потрібно виробити продукції $\boldsymbol{i}$-й галузі, щоб одержати одиницю кінцевої продукції $\boldsymbol{j}$-ї галузі.

Найбільший за модулем корінь характеристичного рівняння, наведеного в умові 3 продуктивності матриці А (позначимо його через λ*), може бути оцінкою загального рівня коефіцієнтів прямих матеріальних витрат, а отже, значення (1 – λ*) характеризує залишок після витрат, тобто продуктивність.

Чим більше (1 – λ*), тим більші можливості досягти ще й інших цілей, крім поточного виробничого споживання.

Це означає, **що вищий загальний рівень коефіцієнтів матриці А, тим більше найбільше за модулем власне значення λ* і тим нижчий рівень продуктивності,** та навпаки**: чим нижчий загальний рівень коефіцієнтів матриці А, тим менше найбільше за модулем власне значення і тим вища продуктивність.**