Замечательные точки треугольника

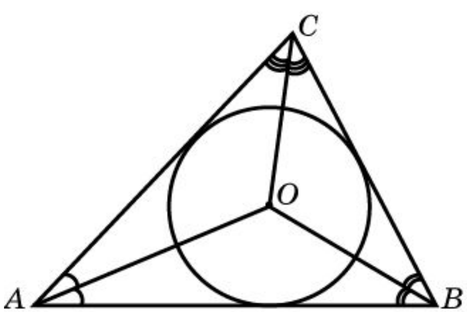
К числу замечательных точек треугольника относятся:

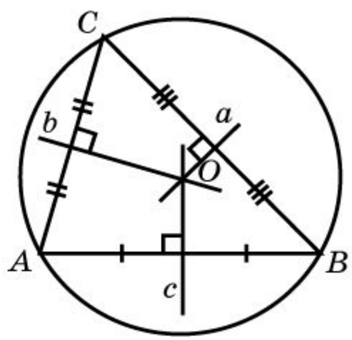
а) точка пересечения биссектрис – центр вписанной окружности;

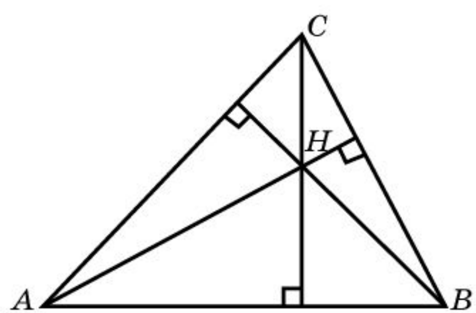
б) точка пересечения серединных перпендикуляров сторон – центр вписанной окружности;

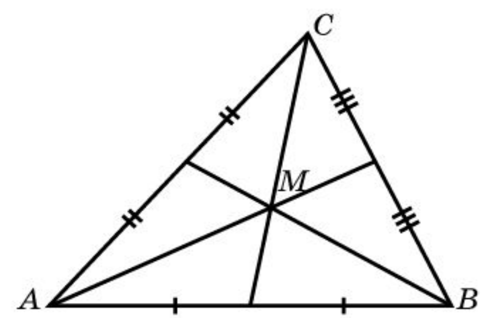
в) точка пересечения высот или их продолжений – ортоцентр;

г) точка пересечения медиан – центроид.



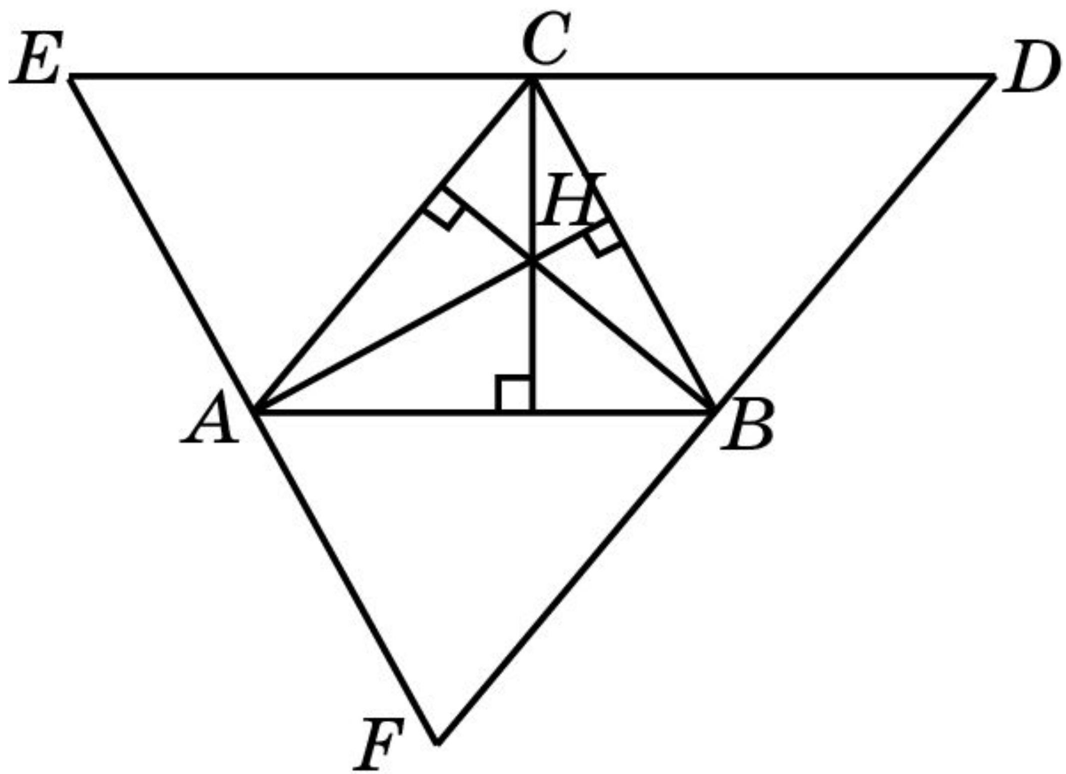






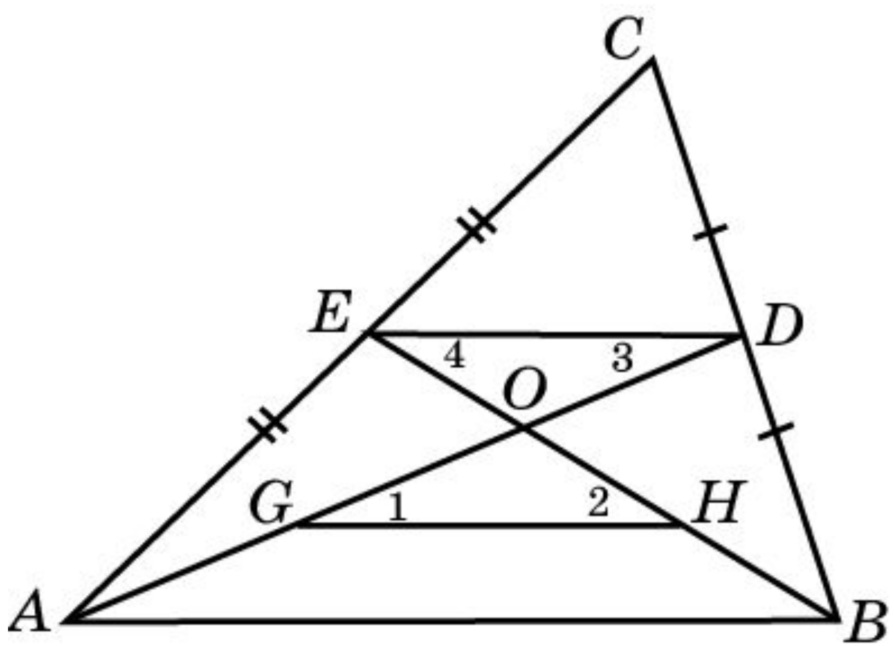
Теорема 1

Высоты треугольника или их продолжения пересекаются в одной точке.



Теорема 2

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в этой точке в отношении 2 : 1, считая от вершин.



Вопрос 1

Какие точки относятся к числу замечательных точек в треугольнике?

Ответ: К числу замечательных точек треугольника относятся: а) точка пересечения биссектрис; б) точка пересечения серединных перпендикуляров сторон; в) точка пересечения высот или их продолжений; г) точка пересечения медиан.

Вопрос 2

Всегда ли высоты треугольника пересекаются?

Ответ: Нет. Высоты тупоугольного треугольника не пересекаются.

Вопрос 3

Как называется точка пересечения высот?

Ответ: Ортоцентр.

Вопрос 4

Как называется точка пересечения медиан?

Ответ: Центроид.

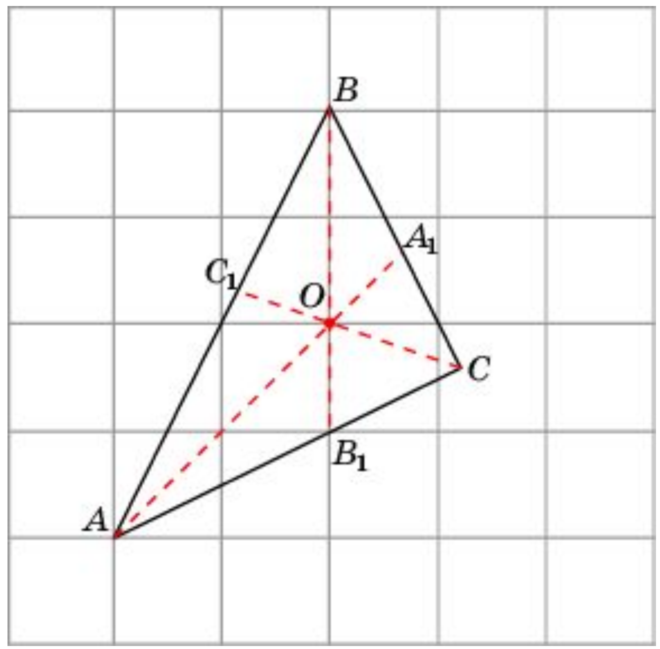
Вопрос 5

В каком отношении делятся медианы треугольника точкой их пересечения?

Ответ: 2:1, считая от вершин.

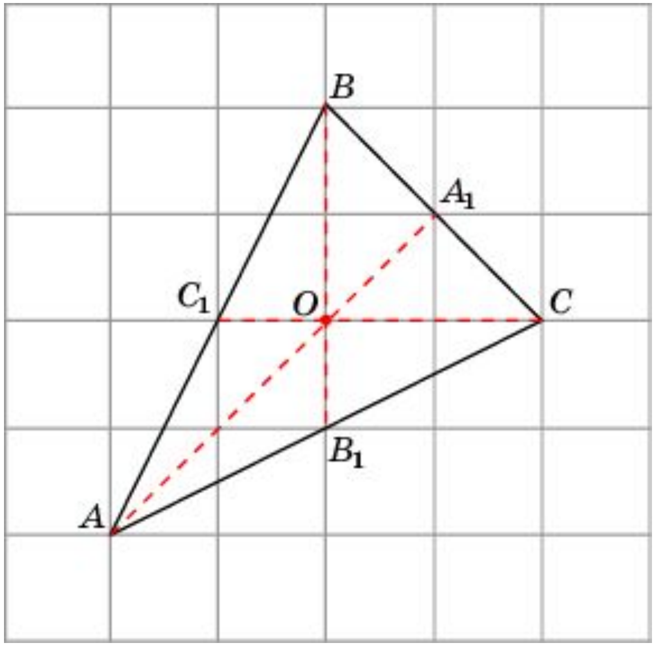
Упражнение 1

Проведите биссектрисы треугольника ABC.



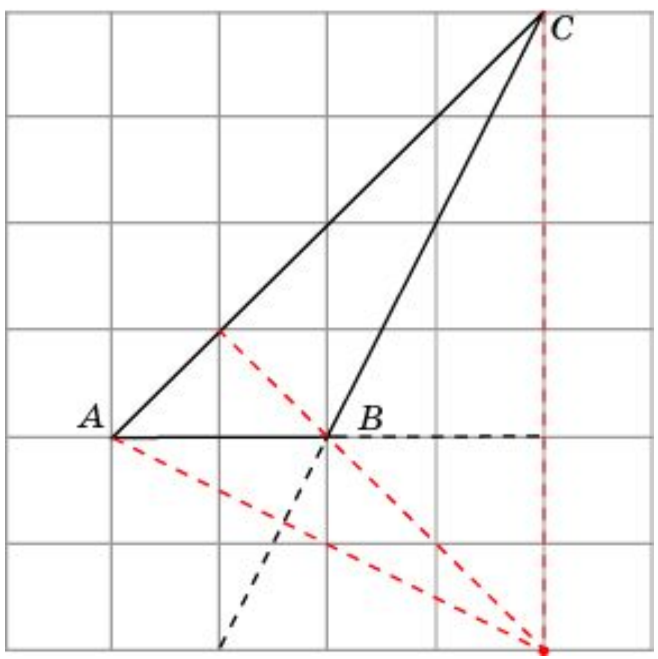
Упражнение 2

Проведите медианы треугольника ABC.



Упражнение 3

Постройте точку пересечения прямых, на которых лежат высоты треугольника ABC.



Упражнение 4

Может ли точка пересечения биссектрис треугольника находиться вне этого треугольника?

Ответ: Нет.

Упражнение 5

Может ли точка пересечения медиан треугольника находиться вне этого треугольника?

Ответ: Нет.

Упражнение 6

Может ли точка пересечения высот или их продолжений находиться вне этого треугольника?

Ответ: Да.

Упражнение 7

Может ли вершина треугольника быть точкой пересечения его высот?

Ответ: Да, у прямоугольного треугольника.

Упражнение 8

Где находится точка пересечения серединных перпендикуляров для: а) прямоугольного треугольника; б) остроугольного треугольника; в) тупоугольного треугольника?

Ответ: а) В середине гипотенузы;
б) внутри треугольника;
в) вне треугольника.

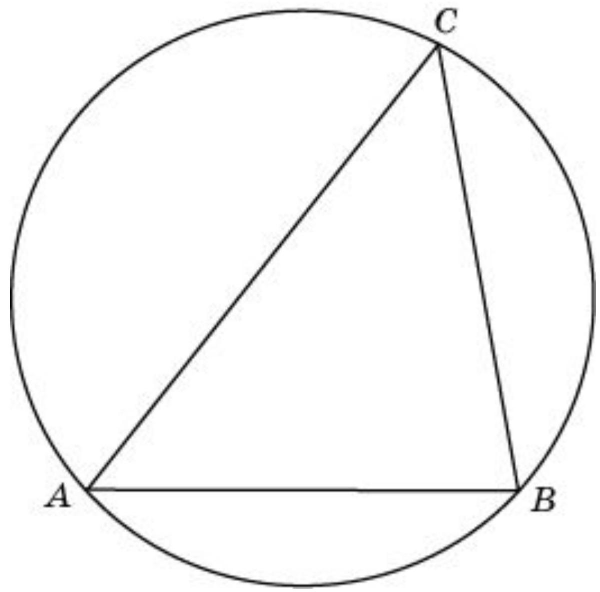
Упражнение 9

Может ли одна биссектриса треугольника проходить через середину другой?

Ответ: Нет.

Упражнение 10

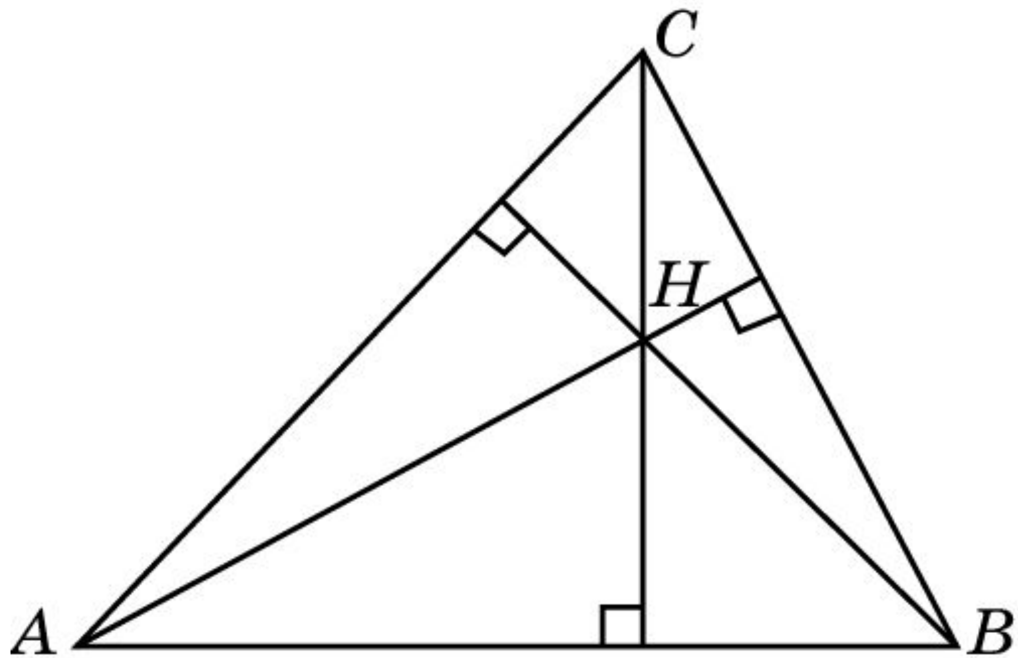
К какой из сторон треугольника ближе расположен центр описанной окружности?



Ответ: К большей стороне.

Упражнение 11

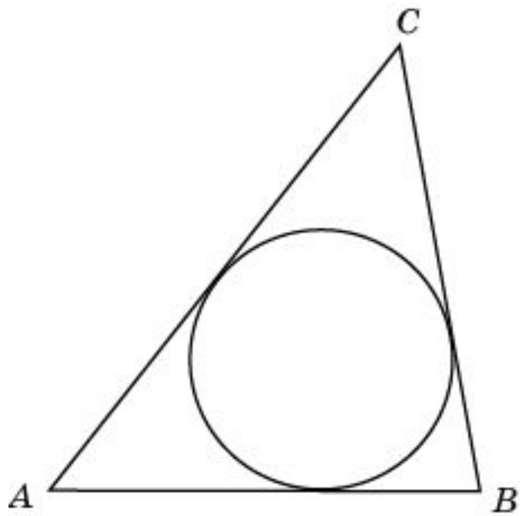
К какой из сторон треугольника ближе расположен ортоцентр?



Ответ: Ортоцентр треугольника расположен ближе к меньшей стороне.

Упражнение 12

К какой из вершин треугольника ближе расположен центр вписанной окружности?



Ответ: К вершине, лежащей против большей стороны.

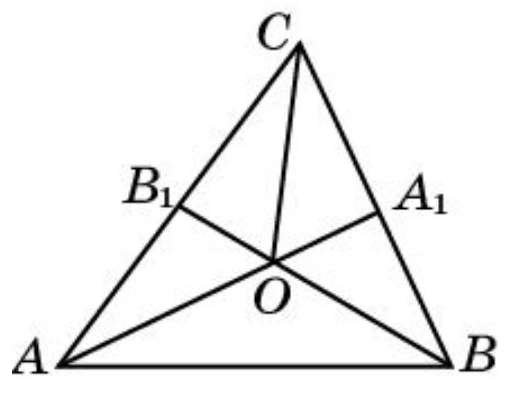
Упражнение 13

Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 10° и 100°. Найдите углы BOC и COA, где O - центр описанной окружности.

Ответ: 140°, 20°.

Упражнение 14

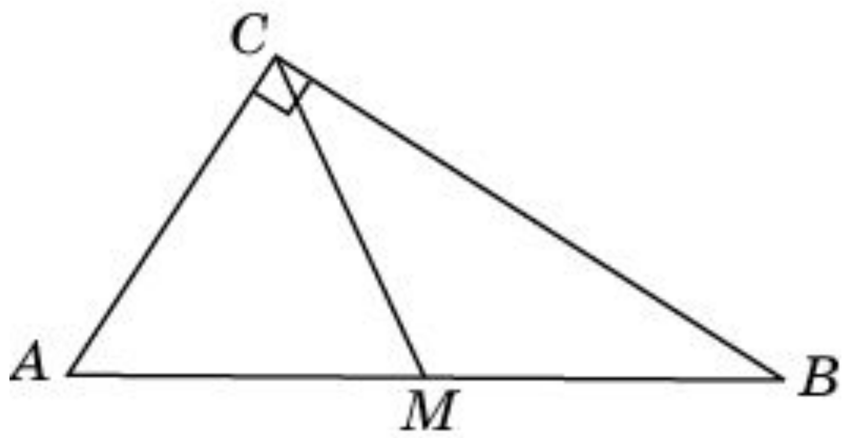
Биссектрисы AA_1 и BB_1 треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите углы ACO и BCO, если $AOB = 136^o$.



Ответ: 46^o и 46^o.

Упражнение 15

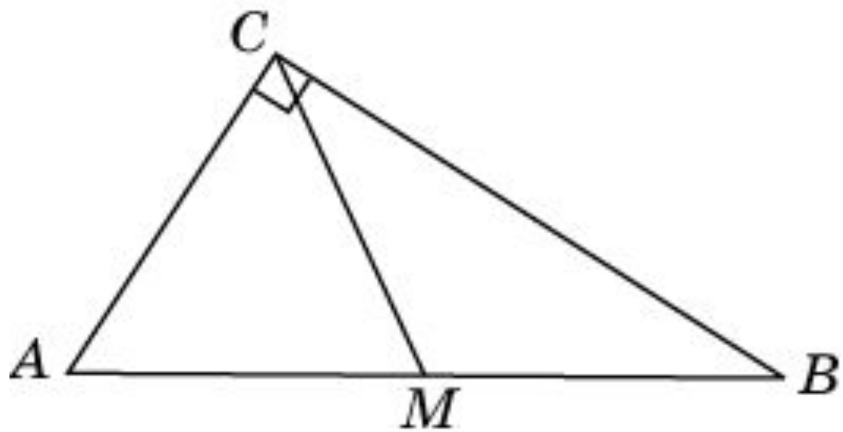
Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.



Доказательство. следует из того, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

Упражнение 16

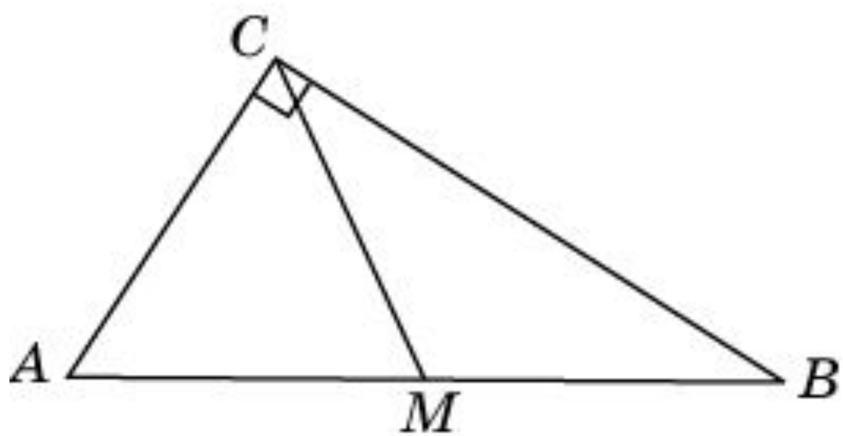
Докажите, что если медиана треугольника равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник прямоугольный.



Доказательство. В этом случае основание M медианы равноудалено от вершин треугольника и, следовательно, является центром описанной окружности. Угол C опирается на диаметр AB, следовательно, равен 90°.

Упражнение 17

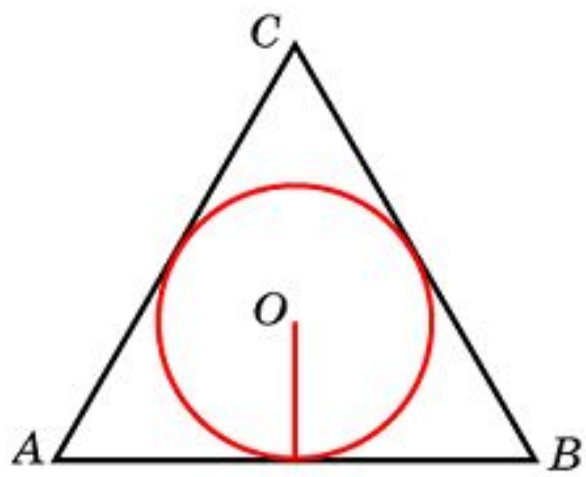
Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 4. Найдите радиус описанной окружности.



Ответ: 2.

Упражнение 18

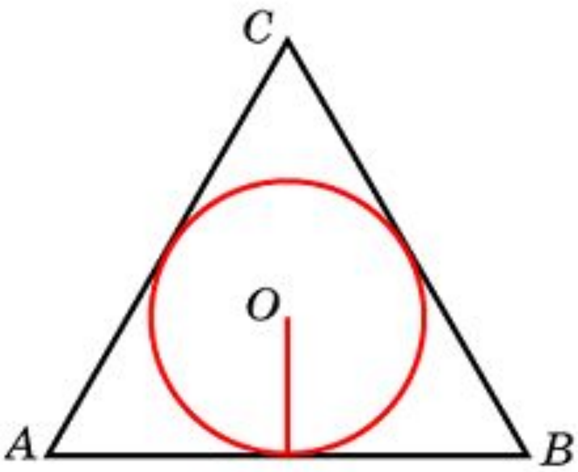
Найдите радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, высота которого равна 6.



Ответ: 2.

Упражнение 19

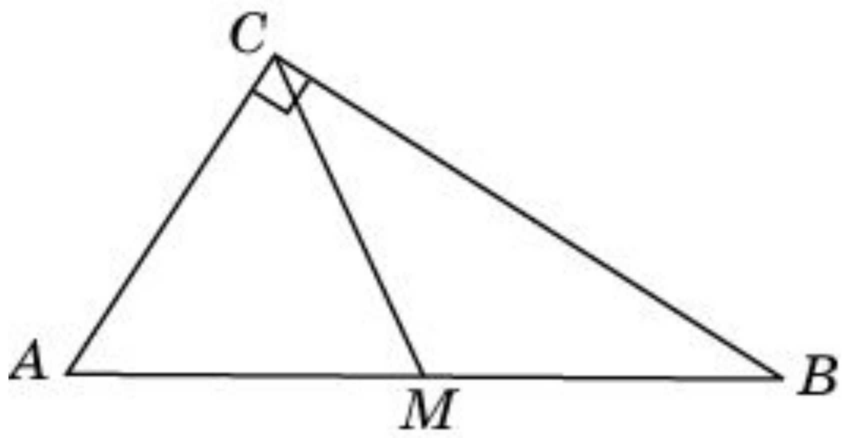
Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 3. Найдите высоту этого треугольника.



Ответ: 9.

Упражнение 20

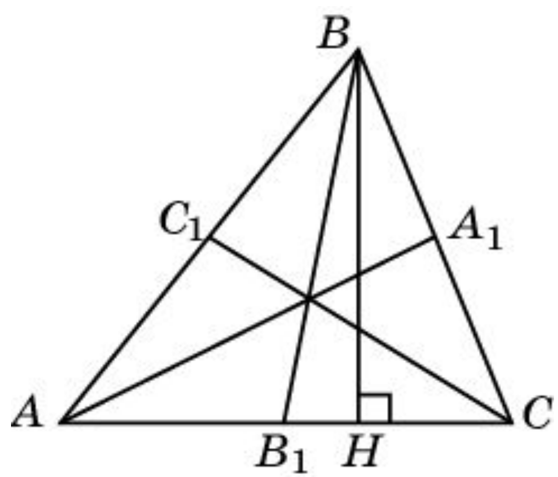
Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна 3 и делит прямой угол в отношении 1:2. Найдите меньший катет треугольника.



Ответ: 3.

Упражнение 21

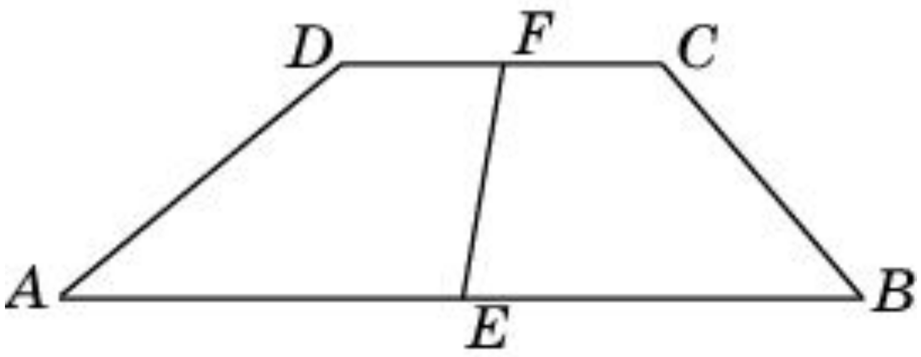
Проекции двух сторон остроугольного треугольника ABC на прямую AC имеют длины 6 см и 4 см. Какую длину имеют проекции медиан этого треугольника на ту же прямую?



Ответ: 1 см, 7 см и 8 см.

Упражнение 22*

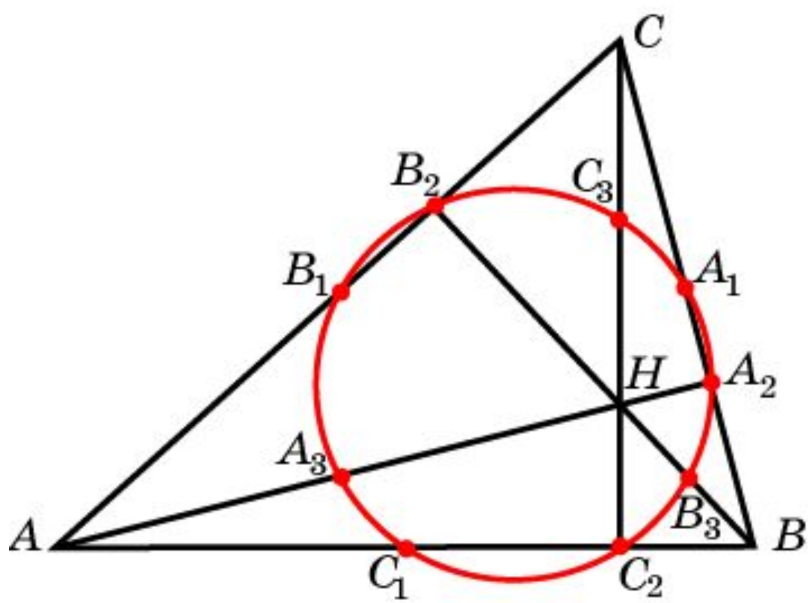
Основания трапеции равны 20 и 8, углы при большем основании равны 40° и 50°. Найдите отрезок, соединяющий середины оснований.



Ответ: 6.

Окружность Эйлера*

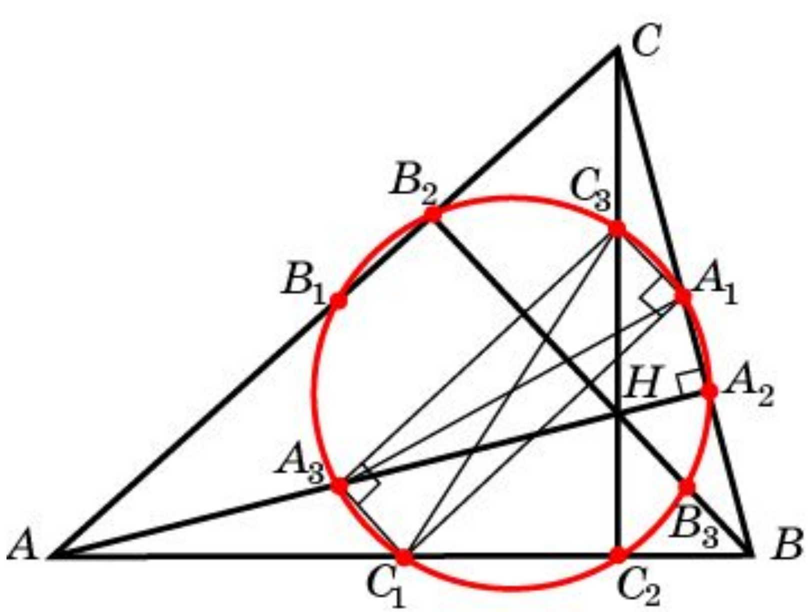
Пусть в треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 обозначают середины сторон противоположных соответствующим вершинам; H – точка пересечения высот треугольника; A_2, B_2, C_2 – основания высот, опущенных из соответствующих вершин; A_3, B_3, C_3 – середины отрезков AH, BH и CH. Докажите, что точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A_3, B_3, C_3 принадлежат одной окружности, называемой окружностью девяти точек, или окружностью Эйлера.



Решение дано на следующем слайде.

Решение

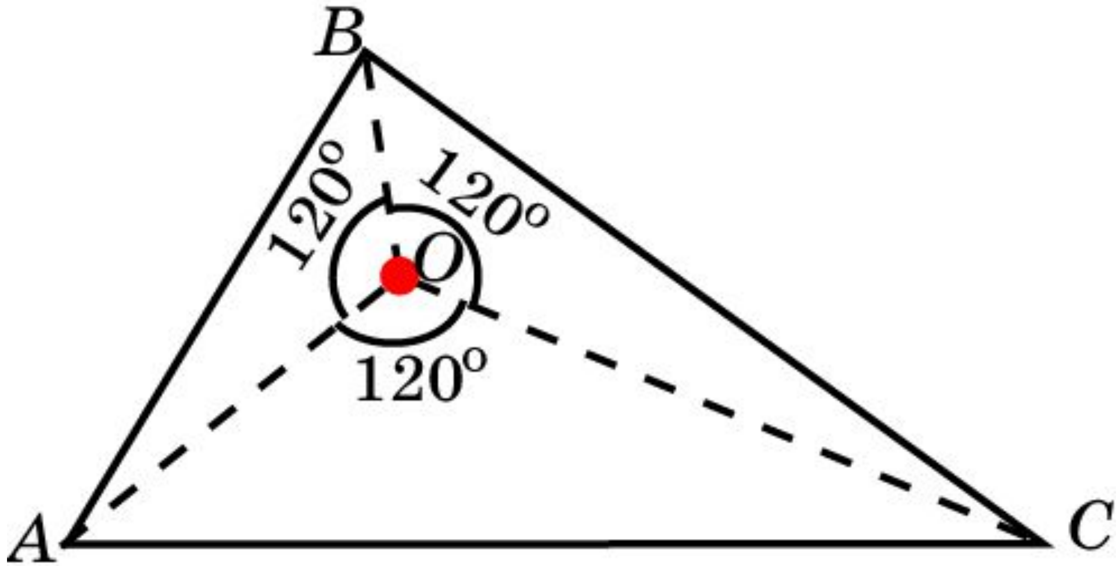
Проведем окружность через точки C_1, C_2, C_3. Отрезок C_1C_3 будет ее диаметром. Так как A_1C_1 – средняя линия треугольника ABC, то $A_1C_1 \parallel AC$. Так как A_1C_3 – средняя линия треугольника BCH, то $A_1C_3 \parallel BH$. Значит, $\angle C_1A_1C_3 = 90°$ и, следовательно, точка A_1 принадлежит этой окружности. Аналогично, Так как A_3C_3 – средняя линия треугольника AHC, то $A_3C_3 \parallel AC$. Так как C_1A_3 – средняя линия треугольника ABH, то $C_1A_3 \parallel BH$. Значит, $\angle C_1A_3C_3 = 90°$ и, следовательно, точка A_3 принадлежит этой окружности.



$A_1C_1A_3C_3$ – прямоугольник и, значит, A_1A_3 – диаметр окружности. Так как $\angle A_1A_2A_3 = 90°$, то A_2 принадлежит окружности. Таким образом, мы доказали, что этой окружности принадлежат точки A_1, A_2, A_3. Аналогично доказывается, что этой окружности принадлежат точки B_1, B_2, B_3.

Точка Торричелли*

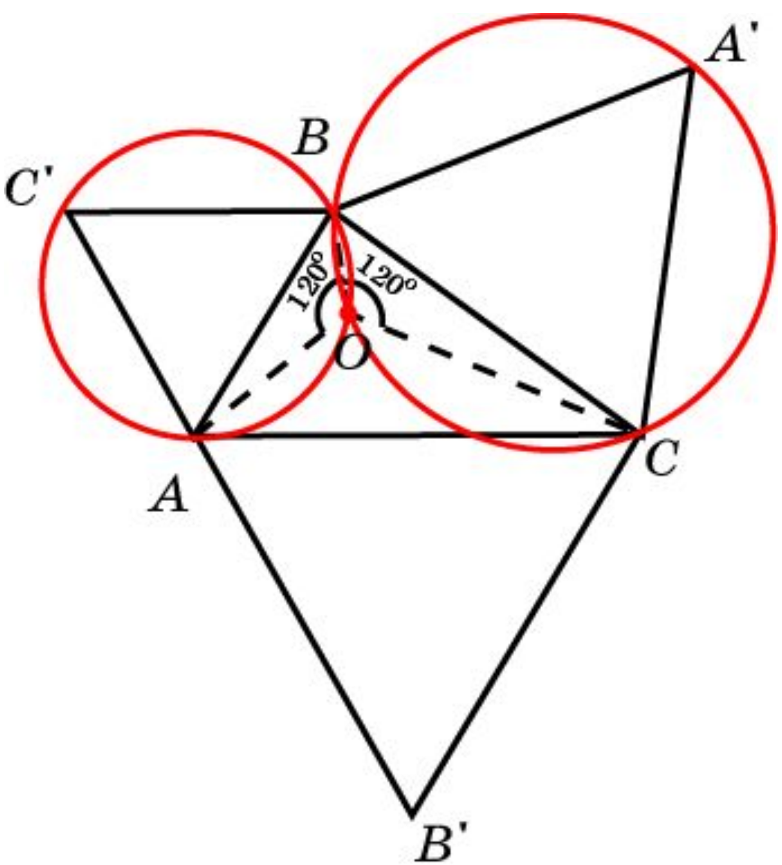
Точкой Торричелли треугольника *ABC* называется такая точка *O*, из которой стороны данного треугольника видны под углом 120°, т.е. углы *AOB*, *AOC* и *BOC* равны 120°. Докажите, что в случае, если все углы треугольника меньше 120°, точка Торричелли существует.



Решение дано на следующем слайде.

Решение

На стороне *AB* треугольника *ABC* построим равносторонний треугольник *ABC'*, и опишем около него окружность. Отрезок *AB* стягивает дугу этой окружности величиной 120°. Следовательно, из точек этой дуги, отличных от *A* и *B*, отрезок *AB* виден под углом 120°.



Аналогично, на стороне *BC* треугольника *ABC* построим равносторонний треугольник *A'BC*, и опишем около него окружность. Из точек соответствующей дуги, отличных *B* и *C*, отрезок *BC* виден под углом 120°. В случае, когда углы треугольника меньше 120°, эти дуги пересекаются в некоторой внутренней точке *O*, из которой стороны треугольника *ABC* видны под углом 120°.