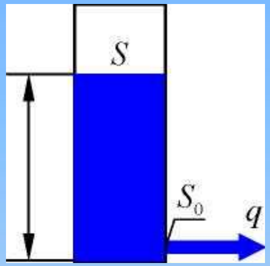
2 дәріс

Басқару объектісінің математикалық моделдері

2.1. Алгебралық теңдеулер

Тағы да су құйылатын бакты қарастырамыз. Бактың көлденең кесіндісінің ауданы S, ал тесіктің көлденең кесіндісінің ауданы S_0 болсын.



Мақсат судың деңгейінің h (*метр*) оның ағымына q ($м^3/с$) байланысын көрсететін модель құру.

Бернулли заңына сәйкес

$$\rho g h = \frac{\rho v^2}{2}$$

Мұнда ρ – судың тығыздығы ($кг/м^3$), $g = 9{,}81$ $м/с^2$ – еркін құлау үдеуі, v – судың ағу жылдамдығы(в$м/с$).

Осыдан $v = \sqrt{2gh}$. Ал $q = S_0 \cdot v$ болғандықтан

$$q = \alpha\sqrt{h}, \qquad (2)$$

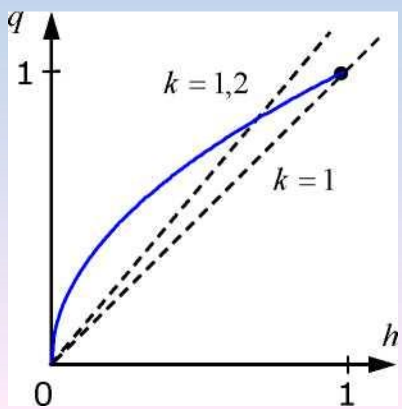
мұнда $\alpha = S_0\sqrt{2g}$- тұрақты шама.

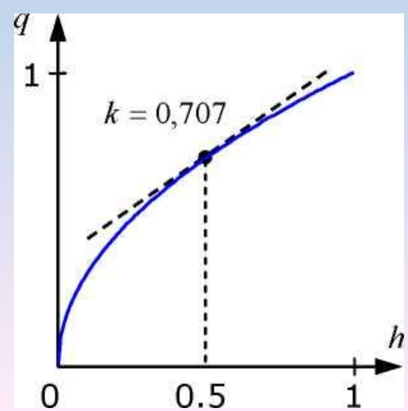
Бұл ***статикалық*** модель және ол құрамында $\sqrt{h}$ болғандықтан түзу сызықты емес.

Бұл (2) қисықты жорамалмен табылатын түзу теңдеу түрінде былай жазылады

$$q = k \cdot h\ ,$$

k – коэффициент.





$$q = \frac{\sqrt{2}}{2} h + \frac{\sqrt{2}}{4}. \qquad (3)$$

Бұл теңдеу сызықты болғанмен модель (3) түзу сызықты емес.

Ал сызықты модель алу үшін (3) формуланы (h_0; q_0) жұмыс нүктесінен *ауытқу* теңдеуі түрінде жазу керек. Ол үшін (3) теңдеуін мына түрде келтереміз

$$q_0 + \Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2}(h_0 + \Delta h) + \frac{\sqrt{2}}{4}. \qquad (4)$$

Мұны түрлендіре отырып іздеп отырған кіріс пен шығыстың байланысын (h_0; q_0) жұмыс нүктесінен *ауытқу* моделді түрінде аламыз

$$\Delta q = \frac{\sqrt{2}}{2} \Delta h. \qquad (5)$$

2.3. Дифференциалдық теңдеулер

Жалпы басқару мақсатын іске асыру үшін кіріс пен шығыстың байланысын жұмыс нүктесінен *ауытқу* түрінде өрнектейтін сызықты дифференциал теңдеуі жеткілікті (***динамикалық модель***).

Суды пайдалану динамикасын қоса отырып қайтадан су құйылған бакты қарастырамыз.

Пайдалынған судың орнын толтыру үшін өнімділігі *Q болатын* насос қолдалынады.

Бұл объектің *кірісі* Q, ал *шығысы* судың деңгейі h *болады.*

Кішкентай Δt интервалы үшін

$$\Delta h = \frac{Q - q}{S} \Delta t.$$

Уақыт $\Delta t \to 0$ деп есептей отырып, келесі дифференциал теңдеуге көшеміз

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}[Q(t) - q(t)].$$

Бұл модель кіріс пен шығыстыің уақытқа байланысты өзгеруін есептейді.

Жоғарыда судың шығыны $q(t)$ мен оның $h(t)$ деңгейіне байланысы $q(t) = \alpha \cdot \sqrt{h(t)}$ қисық сызығымен көрсетілетінін білгенбіз.

Сондықтан дифференциал теңдеуді мынадай түрде жазуға болады

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}Q(t) - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h(t)}. \qquad (6)$$

Ал $Q = Q_0$ және $h = h_0$ жұмыс нүктесі үшін

$$Q = Q_0 + \Delta Q \quad \text{и} \quad h = h_0 + \Delta h,$$

мұнда ΔQ және Δh – кіріс пен шығыстың жұмыс нүктесінен шамалы ауытқуы.

Түзу сызыққа көшу үшін функцияны *Тейлор қатарына* жіктеу пайдаланылады. Бұл қатар (x_0, y_0) нүктесінің маңында қандай да бір $f(x, y)$ функциясы үшін мынадай болады

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y + F(x, y).$$

Δx және Δy аз болғанда $F(x, y)$ нөлге жақын болады, сондықтан

$$(x, y) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y. \qquad (8)$$

(8) формуласын пайдалана отырып (6) формуланы түзуге түрлендіру үшін x орнына Q, ал y – орнына h қарастырамыз. Сонда

$$\frac{\partial}{\partial Q}\left[\frac{1}{S}Q - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h}\right] = \frac{1}{S}$$

$$\frac{\partial}{\partial h}\left[\frac{1}{S}Q - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h}\right] = \frac{\alpha}{2S\sqrt{h}}$$

(8) формулы көмегімен жазамыз

$$\frac{1}{S}Q - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h} \approx \frac{1}{S}Q_0 - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h_0} + \frac{1}{S}\Delta Q - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}}\Delta h.$$

$Q = Q_0 + \Delta Q$ пен $h = h_0 + \Delta h$ (6) теңдеуге қоямыз және $\frac{d(h+\Delta h)}{dt} = \frac{d\Delta h}{dt}$ екенін ескекрміз. Сонда

$$\frac{d\Delta h}{dt} = \frac{1}{S}\,Q_0 - \frac{\alpha}{S}\sqrt{h_0} + \frac{1}{S}\Delta \mathrm{Q} - \frac{\alpha}{2S\sqrt{h_0}}\Delta h.$$

Q_0 мен h_0 статическалық режимге сәйкес келгендіктен $\frac{1}{s}\,Q_0 - \frac{\alpha}{s}\sqrt{h_0} = 0$. Онда жұмыс нүктесінен ауытқу арқылы түзуленген теңдеу келесідей болады:

$$\frac{d\Delta h}{dt} + k_h \cdot \Delta h \approx k_Q \cdot \Delta \mathrm{Q}\,, \qquad (9)$$

мұнда $k_h = \frac{\alpha}{2S\sqrt{h}}$ и $k_Q = \frac{1}{s}$.

k_h коэффициенті h_0 ге, яғни жұмыс нүктесіне байланысты болғандықтан объект бейсызықты болып қала береді.

Әдетте түзетілген теңдеуді жазғанда ауытқуды көрсететін Δ белгісін жазбайтындықтан

$$\frac{dh(t)}{dt} + k_h \cdot h(t) \approx k_Q \cdot Q(t). \qquad (10)$$

Тек бұл теңдеудің ауытқуға байланыстылығын еске ала отырып, оны тек (Q_0, h_0) жұмыс нүктесінен аз ауытқу болғанда ғана пайдалануға болады.

Жұмыс нүктесі басқа болғанда k_h коэффициенті де басқа болады.