



САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА И. П. ПАВЛОВА

Кафедра физики, математики и информатики



Основы теории вероятностей

Тишков Артем Валерьевич, к.ф.-м.н., доцент
Микрюкова Надежда Николаевна
Семенова Елена Михайловна



Математика и не-факторы

- Неточность
- Неполнота
- Некорректность
- Недоопределенность
- ...

Как выразить неопределенность
математически?



Измерение неопределенности

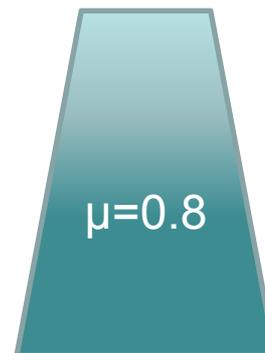
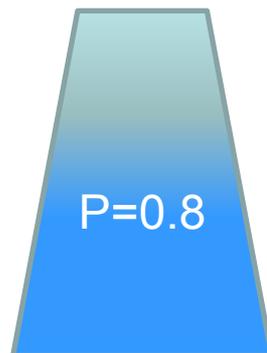
- Теория вероятностей (средние века)
- Теория возможностей, нечеткие множества (Лотфи Заде, 1978)
- **Вероятность** – один из нескольких вариантов с разной степенью осуществимости.
- **Нечеткость** – несколько вариантов могут осуществляются одновременно, но не совсем в чистом виде.



Усталый путник идет по пустыне, изнемогая от жажды.
Вдруг он видит два сосуда. На них написано :

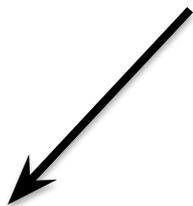
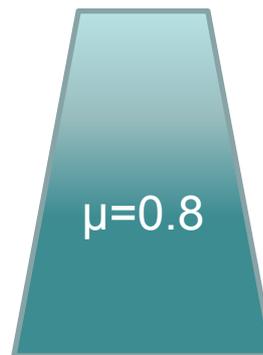
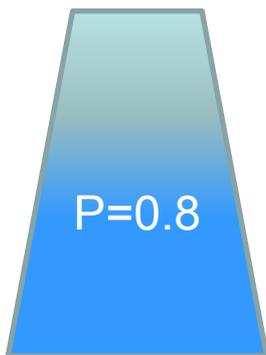
- вода питьевая с вероятностью $P=0,80$
- вода питьевая с мерой нечеткости $\mu=80\%$

Какой выбрать?





Какой выбрать?



Мутная жидкость
из ближайшего
пресного водоема

Вода, $P=0,8$

Яд, $P=0,2$



Теория вероятностей

– это раздел математики, который изучает закономерности в *массовых случайных событиях*.

Элементарное событие – это результат испытания.

Событие – множество элементарных событий.



Примеры 1/2

1. Какова вероятность того, что на игральной кости выпадет число 2?
 - Элементарные события: выпало 1,2,...,6.
 - Требуется найти вероятность элементарного события A = «выпало 2»
2. Какова вероятность того, что на игральной кости выпадет число больше трех?
 - Элементарные события: выпало 1,2,...,6.
 - Требуется найти вероятность неэлементарного события B , состоящего из трех элементарных «выпало 4», «выпало 5», «выпало 6».



Примеры 2/2

3. Какова вероятность того, что на игральной кости дважды выпадет четное число?

- Элементарные события: выпало $1, 2, \dots, 6$.
- Требуется найти вероятность неэлементарного события B , состоящего из шести элементарных: при первом испытании «выпало 2», «выпало 4», «выпало 6» И при втором испытании «выпало 2», «выпало 4», «выпало 6».

— Или

- Элементарные события: выпало четное число, выпало нечетное число
- Требуется найти вероятность неэлементарного события B , состоящего в том, что первый раз выпало четное число и второй раз выпало четное число.



Классификация событий

- **Достоверное событие** обязательно произойдет
 - На игральной кости выпадет число 1 или 2 или ... или 6
 - Вы получите зачет по математике.. ну или не получите
 - Студенчество когда-нибудь закончится
- **Невозможное событие** никогда не произойдет
 - На игральной кости выпадет число -1
 - Подброшенная монета зависнет в воздухе
 - Завтра наступят еще одни зимние каникулы
- **Случайное событие** может произойти или не произойти
 - На игральной кости выпадет число 3
 - Выйдя на улицу, девушка встретит крокодила



Массовые события

События называются массовыми, если они происходят одновременно в достаточно большом числе испытаний или многократно повторяются

Например, много людей бросают игральные кости или один человек бросает кости много раз



Некоторые виды случайных событий

- **Равновозможные события** – ни одно из них не является более возможным, чем другие
 - игральная кость: все элементарные события $1, 2, \dots, 6$ равновозможны
 - попасть к тому или иному преподавателю на физике
- **Совместные события** – наступление одного из них **не исключает** наступление другого.
 - бросаем 2 кости: выпадение числа 1 и выпадение числа 3
 - посещение лекции и зачет по физике
- **Несовместные события** – наступление одного из них **исключает** наступление другого
 - бросаем кость: выпадение 3 исключает выпадение другого числа
 - Пропуск занятий и получение зачета по физике



Полная группа событий

Несколько случайных событий образуют полную группу событий, если

- они попарно несовместны и
- одно из них обязательно произойдет в результате испытания (или серии испытаний).

- выпадение чисел 1,2,3,4,5,6
- выпадение четного или нечетного числа
- выпадение 6 или числа, меньшего чем 6



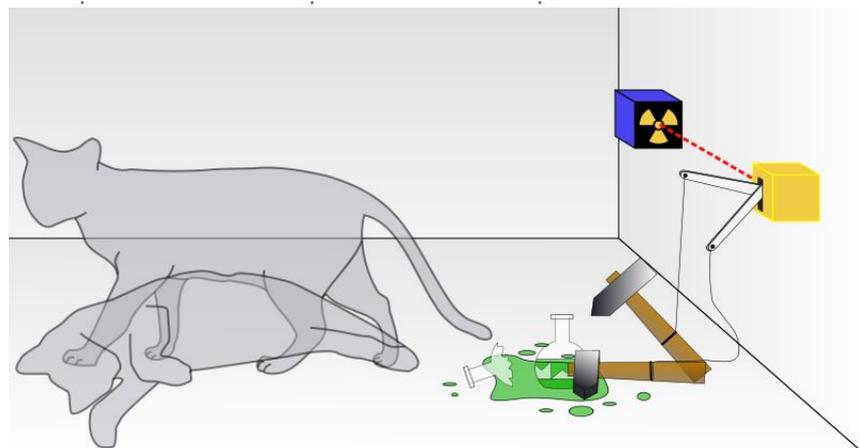


Противоположные события

– это два несовместных события, образующие полную группу событий. Наступление события A исключает наступление противоположного события \bar{A} .

A и \bar{A} (не A)

- орёл или решка
- попадание в мишень или промах
- кот Шредингера в ящике
жив или мёртв





САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
МЕДИЦИНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АКАДЕМИКА И. П. ПАВЛОВА

Кафедра физики, математики и информатики



Вероятность случайного события

Вероятность $P(A)$ случайного события A —
это число, которое говорит нам о степени
возможности наступления события.



Современное определение вероятности (аксиоматика Колмогорова) 1/2

- Задано пространство элементарных событий Ω (множество результатов испытания).
- Подмножества этого пространства интерпретируются как *случайные события*.
- Непересекающиеся множества интерпретируются как *несовместные* события. Соответственно, пустое множество означает *невозможное* событие. Все пространство Ω является *достоверным* событием.
- Объединение (**сумма**) некоторых подмножеств (**событий**) интерпретируется как событие, заключающееся в наступлении *хотя бы одного* из этих событий.
- Пересечение (**произведение**) подмножеств (**событий**) интерпретируется как событие, заключающееся в наступлении *всех* этих событий.



Кафедра физики, математики и информатики

Современное определение вероятности (аксиоматика Колмогорова) 2/2

- Вероятностью P называется числовая функция, заданная на множестве событий, обладающая следующими свойствами:
- Аксиома 1. Неотрицательность: $P(A) \geq 0$ для любого события A ;
- Аксиома 2. Аддитивность: вероятность наступления хотя бы одного (т.е. суммы) из попарно несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий $P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$ если A_l и A_k несовместны при $l \neq k$;
- Аксиома 3. Конечность (ограниченность единицей): $P(\Omega)=1$.



Классическое определение вероятности

Вероятность события – это отношение числа благоприятных исходов m , к общему числу возможных исходов n . Все исходы равновозможны и несовместны.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$



Классическое определение вероятности

Все аксиомы Колмогорова выполняются:

- m всегда не больше n , поэтому $m/n \geq 0$
- Если событие A_1 состоит из k_1 исходов, A_2 из k_2 исходов, ..., A_m из k_m исходов и все эти исходы разные, то $P(A_1 + A_2 + \dots + A_m) = (k_1 + k_2 + \dots + k_m)/n = k_1/n + k_2/n + \dots + k_m/n = P(A_1) + \dots + P(A_m)$
- $P(\Omega) = n/n = 1$

Таким образом, классическое определение вероятности можно использовать, если все исходы равновозможны и несовместны.

На практических занятиях мы будем использовать в основном это определение



Пример

при бросании кубика возможно 6 исходов

Событие A: выпадет четное число. Число исходов, благоприятствующих событию *A*, $m=3$.

$$\rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$



Статистическое определение вероятности

- Пусть A – случайное событие, опыт проводился n раз, в результате опыта событие A произошло m раз, тогда m – частота наступления события A .

$$W(A) = \frac{m}{n} \quad \text{относительной частотой события } A$$

Для разных n , $W(A)$ могут заметно отличаться, но если проводим длинную серию опытов, т.е. $n \rightarrow \infty$

$W(A) \rightarrow$ к некоторому пределу.



Статистическое определение вероятности

Вероятностью события A называется предел, к которому стремится его относительная частота $W(A)$ при неограниченном увеличении числа испытаний.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} W(A) \quad 0 \leq P(A) \leq 1$$

Это наиболее интуитивное определение для медицинского научного работника. Обоснованием данного определения является закон больших чисел.



Пример

Среди 1000 новорожденных 517 мальчиков.
Найти относительную частоту рождения
мальчиков.

$$W(A) = \frac{517}{1000} = 0,517$$

тем не менее, известно, что $P(A) = 0,515$.



Теорема сложения вероятностей

Теорема: Вероятность суммы двух **совместных** событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность совместного их наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$$

Утверждение 1. Согласно аксиоме 2, вероятность суммы двух **несовместных** событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$



Теоремы сложения вероятностей

- **Утверждение 2:** Сумма вероятностей событий, которые образуют полную группу, равна 1:

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) = 1$$

где $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ — полная группа событий

- **Утверждение 3:** Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:



Пример

Бросаем 2 кубика:

A – выпадет чётное число на первом кубике

B – выпадет чётное число на втором кубике

(A+B) – выпадет чётное число на первом **ИЛИ**
втором кубике или на первом и втором
одновременно:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - 0,25 = 0,75$$

Сумма=ИЛИ



Условная вероятность

- Событие **В не зависит** от события A , если $P(B)$ не изменяется от того, наступило или нет событие A .
- Событие **В зависит** от события A , если $P(B)$ изменяется от того, наступило или нет событие A .

$P(B/A)$ – вероятность события B , при условии, что наступило событие A – это условная вероятность события B (при условии A).



Примеры

- Вероятность того, что Вы вытянете сломанную спичку изменяется в зависимости от того, что вытянет предыдущий играющий
- Вероятность того, что больной выживет изменяется в зависимости от того оказали ему медицинскую помощь или нет
- Вероятность того, что на кубике второй раз выпадет число 6 не изменяется от того, что на нем выпало первый раз



Теоремы умножения вероятностей

- **Произведением двух событий $A \cdot B$** , называется событие, которое состоит в том, что наступит и событие A и событие B .
- **Произведением нескольких событий $A \cdot B \cdot C \cdot D \dots$** называется событие, которое состоит в том, что наступят все эти события

Произведение = И



Теоремы умножения вероятностей

Теорема 1. Вероятность совместного появления двух независимых событий равна произведению их вероятностей.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$$

Теорема 2. Вероятность совместного появления двух зависимых событий (B зависит от A) равна произведению вероятности события A на условную вероятность события B .

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B|A)$$



Пример 1

Вероятность события A = «выпадет 2» равна $1/6$

Вероятность события B = «выпадет четное число» равна $1/2$

Вероятность того, что выпадет и двойка и четное число не равна $1/12$! Она равна $1/6$

$$P(A) = 1/6, P(B) = 1/2, P(B/A) = 1, P(A/B) = 1/3$$

$$P(A) \cdot P(B) = 1/12 \text{ не равно } P(A \cdot B)$$

$$P(A) \cdot P(B/A) = 1/6 \cdot 1 = 1/6 \text{ равно } P(A \cdot B)$$

$$P(B) \cdot P(A/B) = 1/2 \cdot 1/3 = 1/6 \text{ равно } P(A \cdot B)$$

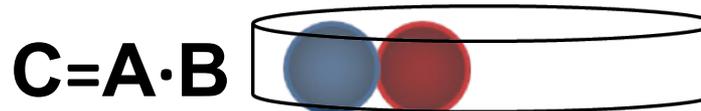
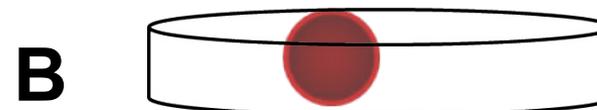
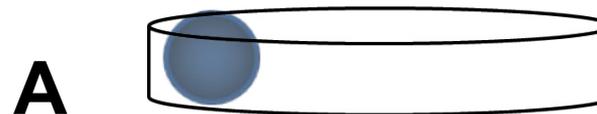
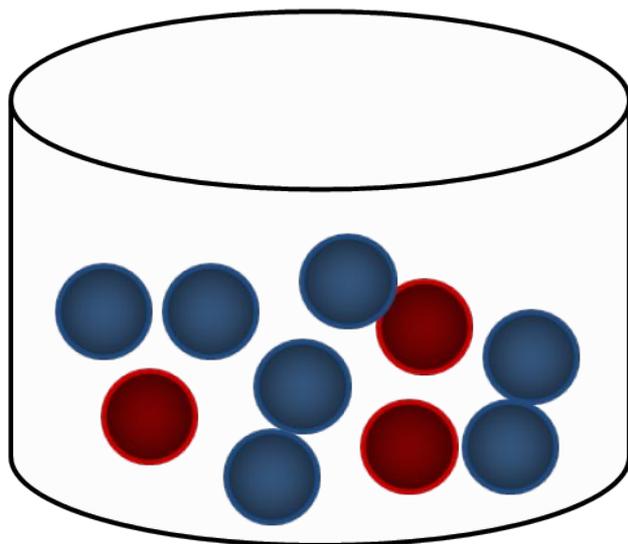


Пример 2

$n=10$ $m_1=7$ $m_2=3$ 7 синих шаров, 3 красных шара

Событие А: первый синий шар.

Событие В: второй красный шар.



Шар кладут обратно – события А и В не зависимы, $P(C) = 7/10 \cdot 3/10$

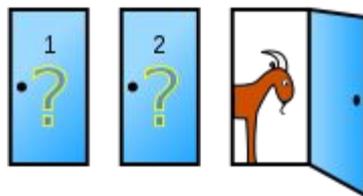
Шар не кладут обратно – события В зависит от А, $P(C) = 7/10 \cdot 3/9$



Пример 3: Парадокс Монти Холла 1/5

- назван в честь ведущего телешоу «Let's Make a Deal»

Представьте, что вы стали участником игры, в которой вам нужно выбрать одну из трех дверей. За одной из дверей находится автомобиль, за двумя другими дверями — козы. Вы выбираете одну из дверей, например, номер 1, после этого ведущий, который знает, где находится автомобиль, а где — козы, открывает одну из оставшихся дверей, например, номер 3, за которой находится коза. После этого он спрашивает вас, не желаете ли вы изменить свой выбор и выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы примете предложение ведущего и измените свой выбор?





Парадокс Монти Холла 2/5

- автомобиль равновероятно размещен за любой из 3 дверей;
- ведущий в любом случае обязан открыть дверь с козой и предложить игроку изменить выбор, но только не дверь, которую выбрал игрок;
- если у ведущего есть выбор, какую из 2 дверей открыть, он выбирает любую из них с одинаковой вероятностью.



Парадокс Монти Холла 4/5

- Неверное рассуждение:
 - ведущий всегда в итоге убирает одну проигрышную дверь, и тогда вероятности появления автомобиля за двумя не открытыми становятся равны $1/2$, вне зависимости от первоначального выбора



Парадокс Монти Холла 4/5

- Своим первоначальным выбором участник делит двери: выбранная **A** и две другие - **B** и **C**.
Вероятность того, что автомобиль находится за выбранной дверью = $1/3$, того, что за другими = $2/3$.
- Для каждой из оставшихся дверей сложившаяся ситуация описывается так:
 - $P(B) = 2/3 * 1/2 = 1/3$
 - $P(C) = 2/3 * 1/2 = 1/3$

где $1/2$ – условная вероятность нахождения автомобиля именно за данной дверью при условии, что автомобиль не за дверью, выбранной игроком.



Парадокс Монти Холла 5/5

- Открывая одну из оставшихся дверей, всегда проигрышную, ведущий меняет условные вероятности для В и С соответственно на 1 и 0:
- $P(B) = 2/3 * 1 = 2/3$
- $P(C) = 2/3 * 0 = 0$
- Таким образом, участнику следует изменить свой первоначальный выбор $P(A)$ на $P(B)$ - в этом случае вероятность его выигрыша будет равна $2/3$, а не $1/3$.



Формула полной вероятности

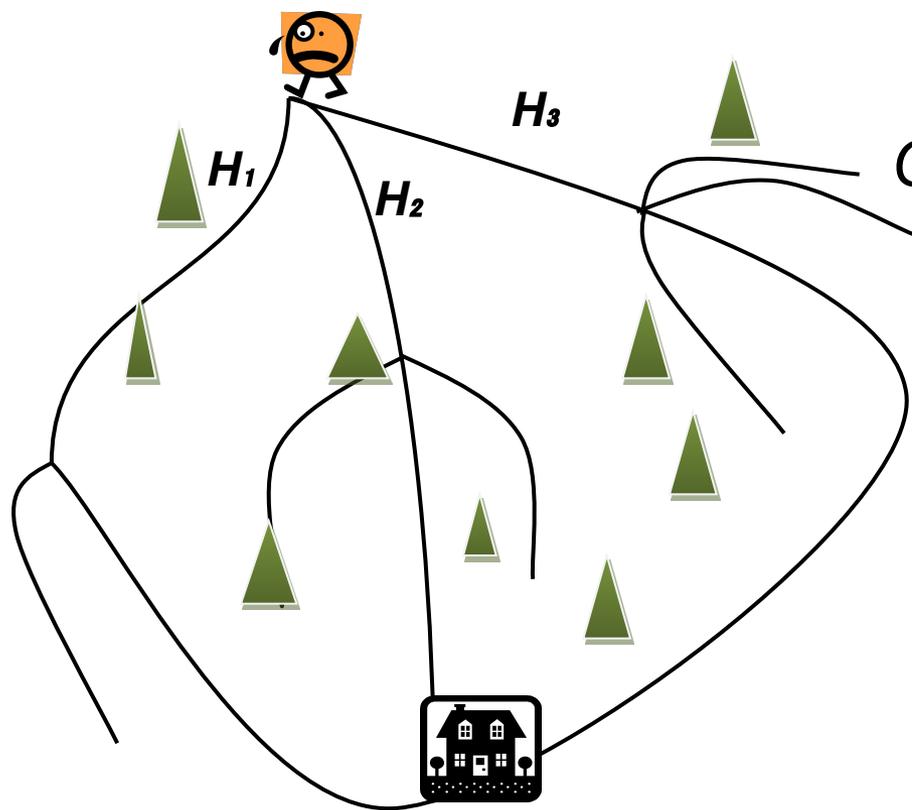
если событие A происходит только совместно с одним из полной группы событий, называемых *гипотезами* и обозначаемых

$$H_1, H_2, \dots, H_n.$$

Тогда полная вероятность события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

Пример



$$P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

Событие **A**: попадём в домик

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + \\ + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \\ + P(H_3) \cdot P(A|H_3) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \\ = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{13}{36} = 0,36$$



Формула Байеса

До проведения опыта мы имели (равные) вероятности гипотез (куда пойти колобку)

$$P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n) \quad P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$$

После проведения опыта:

Пусть событие А произошло (т.е. попали в домик), вероятности гипотез

$$P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$$

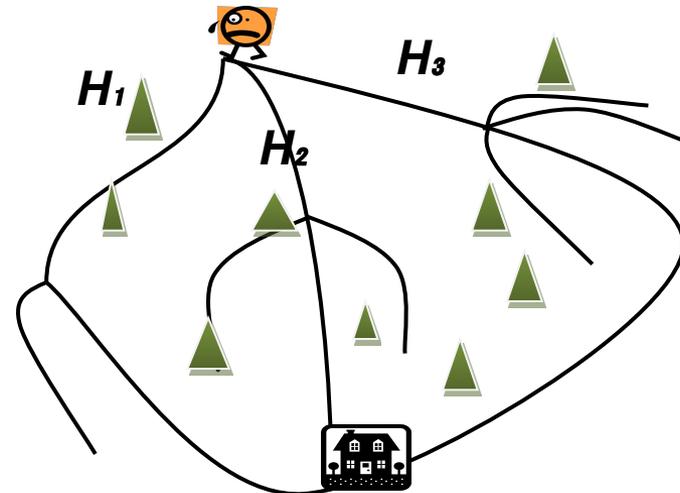
$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A|H_i)}{P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)}$$

Пример

$$P(H_1|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{13}{36}} = \frac{6}{13}$$

$$P(H_2|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{13}{36}} = \frac{4}{13}$$

$$P(H_3|A) = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{13}{36}} = \frac{3}{13}$$



$$\left(\frac{6}{13} + \frac{4}{13} + \frac{3}{13} = 1 \right)$$



Контрольные вопросы.

1. Предмет теории вероятностей.
2. Классификация случайных событий. Полная группа событий.
3. Аксиоматика теории вероятностей.
4. Теорема сложения вероятностей.
5. Теорема умножения вероятностей.
6. Формула полной вероятности.
7. Формула Байеса.