Algorytmy szeregowe, z rozgałęzieniami, zawierające pętle

dr Andrzej Bobyk
WSEI

Wprowadzenie do projektowania algorytmów

Alagić S., Arbib M.A. - WNT 1982

„Projektowanie programów poprawnych i dobrze zbudowanych"

....polega na rozłożeniu zadania na ściśle określone podzadania, których poprawne rozwiązanie i właściwe ich połączenie da rozwiązanie całego problemu .

"Things should be as simple as possible but no simpler."

Albert Einstein

Podstawowa wiedza o budowie algorytmów .

Algorytmy mają budowę modularną.

Moduł (algorytm dla jednego podzadania):

- jest oddzielną jednostką,
- ma swoją nazwę – identyfikator,
- może wywoływać inne moduły
- ma tylko jedno wejście i jedno wyjście,
- ma zapewniony powrót do modułu z którego jest wywołany,
- powinien pełnić jedną i tylko jedną funkcję,
- powinien być stosunkowo niewielki.

Podstawowa wiedza o budowie algorytmów .

Każdy dowolnie złożony algorytm można zbudować z trzech tylko konstrukcji podstawowych, nazywanych strukturami, są to :

- –struktura sekwencji
- –struktura wyboru
- –struktura pętli

Podstawowe Struktury

Struktura sekwencji - wykonanie w kolejności zapisu jednej, dwóch lub więcej struktur składowych.

Struktura 1

↓

Struktura 2

↓

………………………

Struktura n

Algorytmy szeregowe

Algorytm nazywamy szeregowym, jeśli spełniona jest zależność

$$\underset{i \in [1,n]}{\forall} \; t(koniec(o_i)) \leq t(poczatek(o_{i+1}))$$

gdzie

n+1 ilość operacji w algorytmie

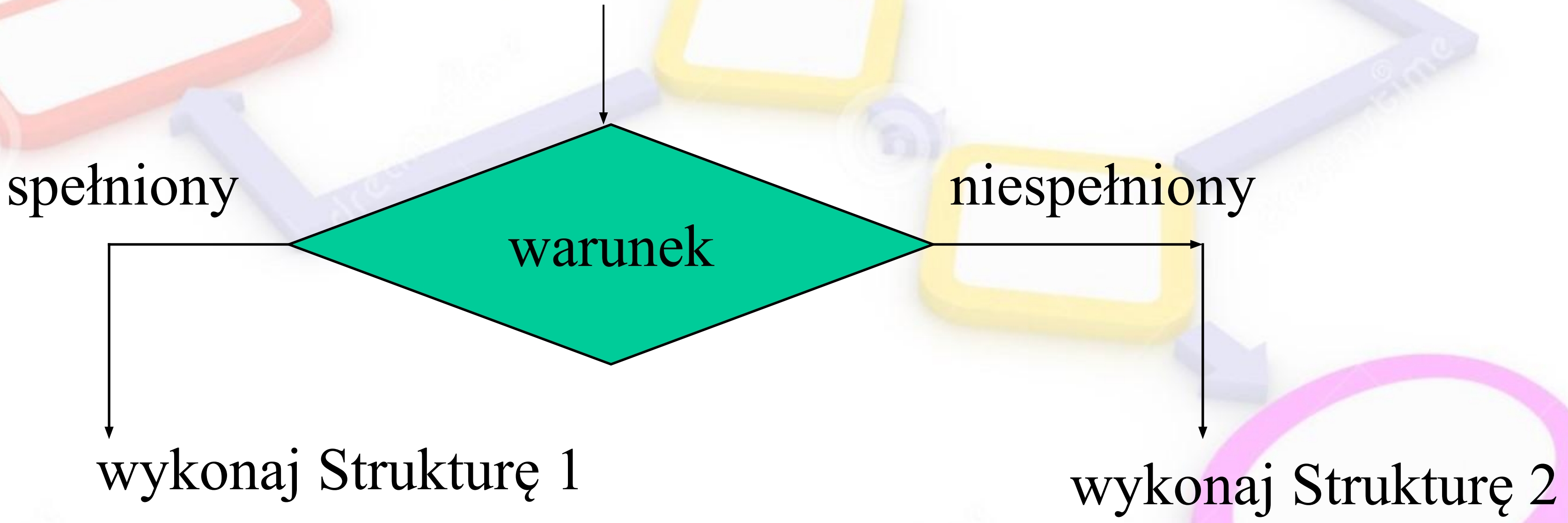
o_i i-ta operacja

t(x) chwila czasu w której wykonywana jest operacja x

Instrukcje wykonywane są tu sekwencyjnie jedna po drugiej, według kolejności wyznaczonej przepływem sterowania.

Podstawowe Struktury

Struktura wyboru –zapewnia wykonanie, według kryterium spełnienia lub niespełnienia określonego warunku, jednej spośród dwóch albo wielu podanych struktur składowych



Przykład poszukiwania rozwiązań problemu Wyznaczanie NWD

Szukany jest NWD (m,n) -
największy wspólny podzielnik liczb naturalnych m i n

Metoda 1: rozkład na czynniki pierwsze;

Ćwiczenie: Obliczyć:

NWD (13, 51)

NWD (46, 48)

NWD (14, 28)

Przedstawić w postaci algorytmu formalny zapis procesu wyznaczania NWD dwóch liczb naturalnych (n, m)

Wyznaczania wspólnego podzielnika dwóch liczb naturalnych – algorytm Euklidesa

Metoda 2

Przyjmijmy, że n>m, wtedy **n=q*m+r**

Jeśli liczba naturalna k jest podzielnikiem n oraz m, to **r = k* (n/k –q* m/k)**

k jest podzielnikiem n oraz m, czyli musi być też podzielnikiem r, zatem zachodzi równość:

NWD (m,n) = NWD (r, m)

Zauważmy, że :

$r = n - q*m$

gdzie: $n, m, r, q \in N$

$m<n$

$0<r<m$

Pierwszy element w parze **(r, m)** maleje; $r \rightarrow 0$ i nie przekroczy 0, bo $r \in N$,

szukanym **NWD (r, m)** jest m dla którego r=0, czyli gdy otrzymamy **NWD (0, m)**

Zatem algorytm Euklidesa jest skończony

Algorytm Euklidesa – lista kroków

Dane: n, m $\in$ N gdzie m<n

Wynik: NWD (m,n) $\in$ N

Algorytm:

K1. Jeśli m=0 to NWD (m,n) = n

K2. r:= n mod m

n:=m

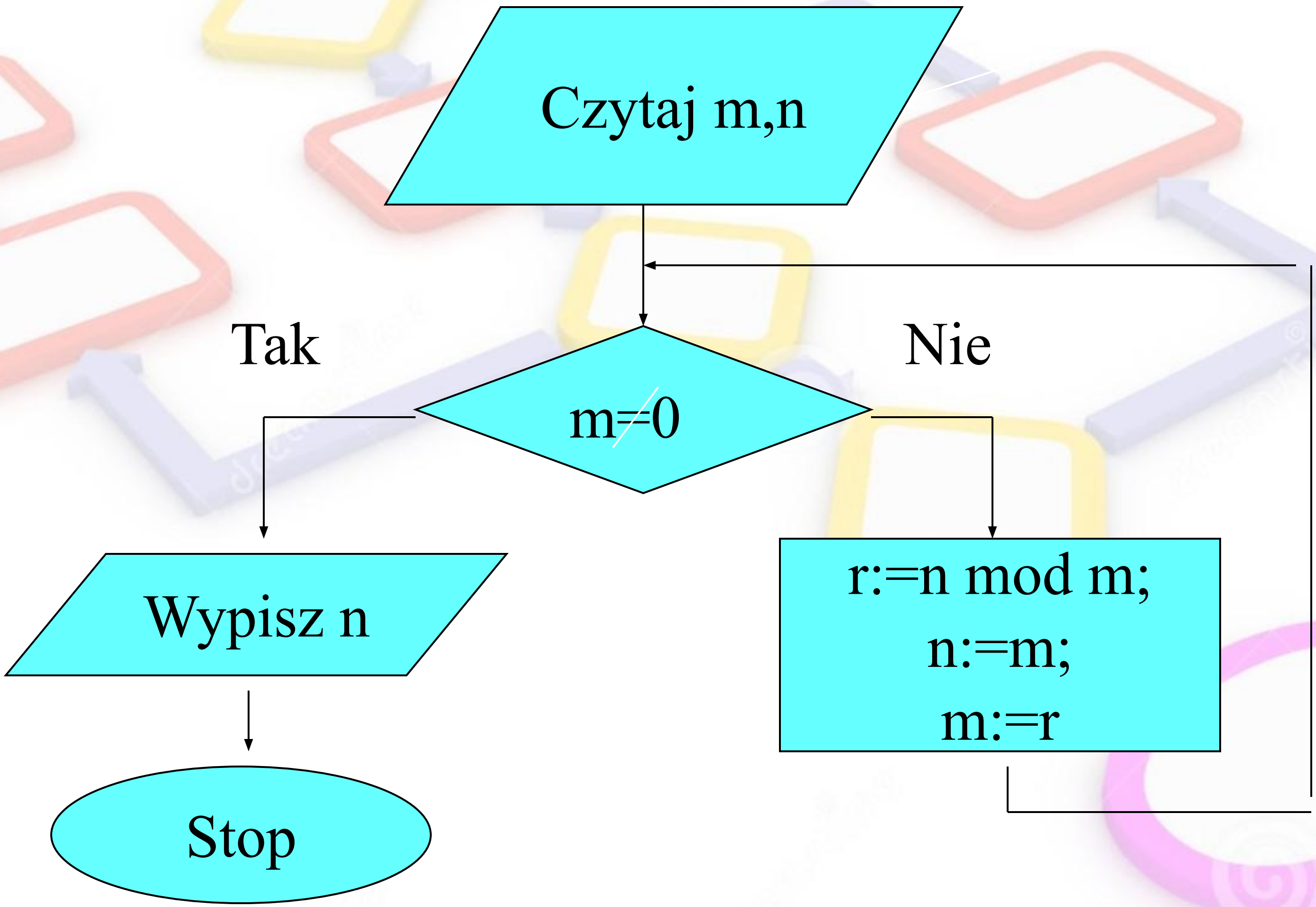
m:=r

wróć do K1

NWD (14,28) = NWD (0,14)

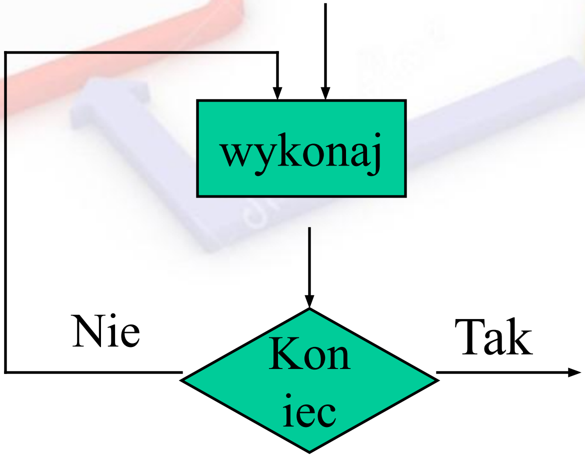
NWD (46,48) = NWD (2,46) =NWD (0,2)

Algorytm Euklidesa obliczania NWD (m,n); m<n



Podstawowe Struktury

Struktura powtórzenia (pętli) - cykliczne wielokrotne wykonanie określonej struktury składowej (może być złożona), w zależności od spełnienia założonego warunku



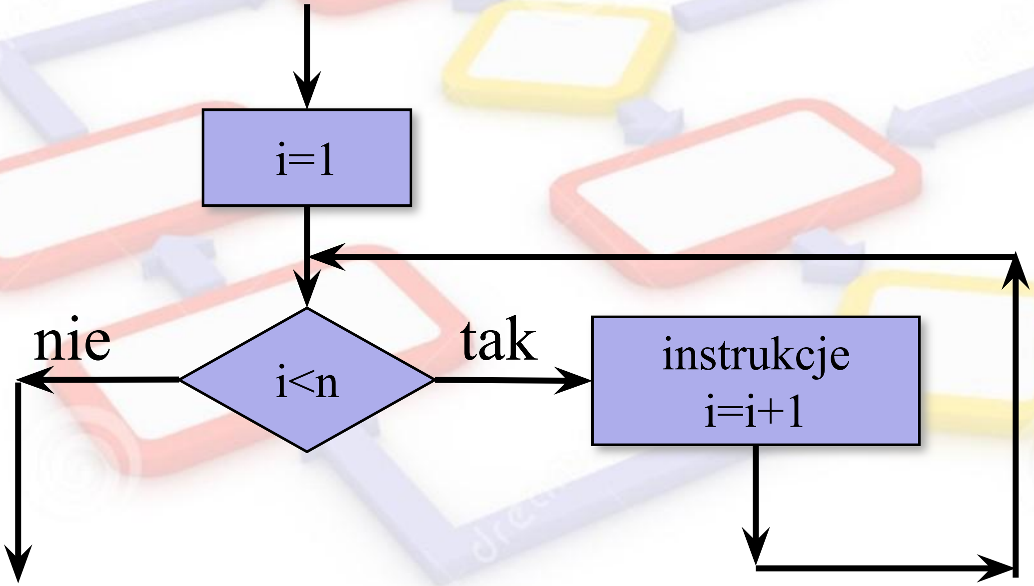
Iteracja

Iteracja – powtarzanie określonego ciągu operacji na pewnych elementach zbioru danych;

Rodzaje iteracji (pętli)

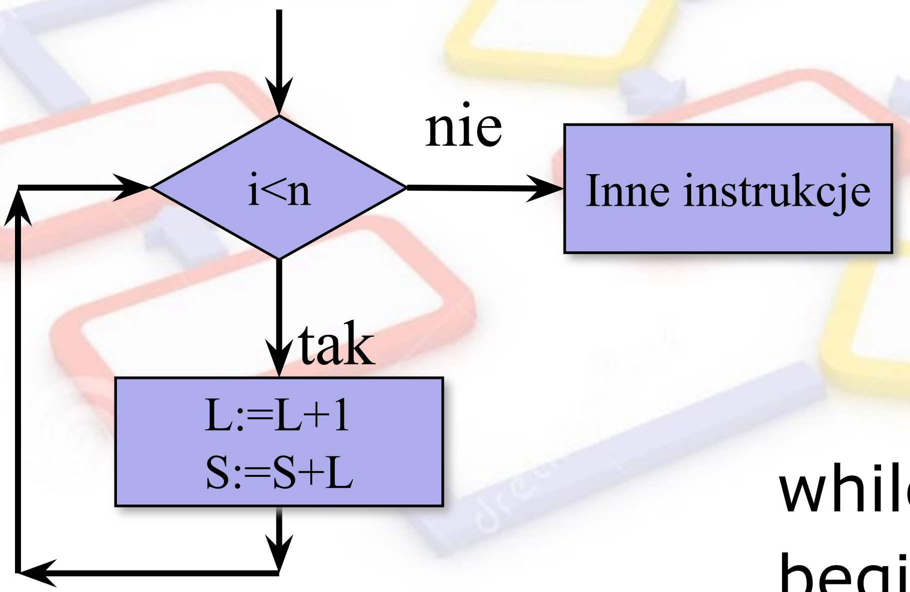
- Iteracja ograniczona - pętla typu for
- Iteracja warunkowa dopóki - pętla typu while
- Iteracja powtarzaj.. dokąd - pętla typu repeat..until

Pętla for



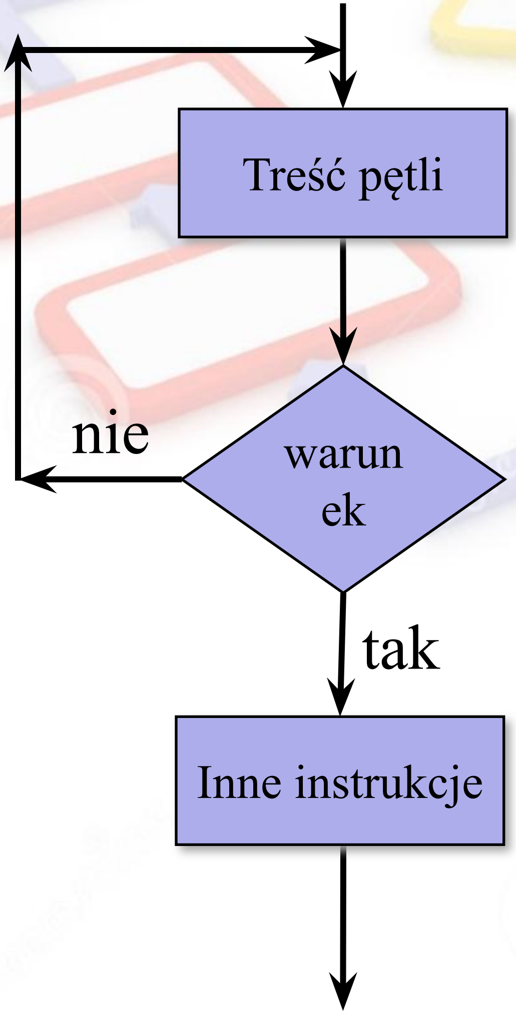

```
var i: Integer;
begin
    for i:=1 to n do
    begin
        {Instrukcje}
    end;
end.
```

Pętla while




```
while Sum<=50 do
begin
   Sum:=Sum+Liczba;
   Licznik:=Licznik+1;
end;
```

Pętla Repeat Until




```
suma:=0;
i:=0;
REPEAT i:=i+1;
       suma:=suma+i;
UNTIL suma >=liczba;
```

Przykłady problemów

- Przeszukiwanie, filtrowanie, sortowanie zbiorów danych;
- Statystyczna analiza danych; obliczanie parametrów statystycznych : średnich (arytmetycznej, harmonicznej, ważonej), wariancji , odchylenia standardowego, max, min, itp
- Tablicowanie wartości funkcji
- Działania na macierzach
- Obliczenia wartości przybliżonych metodą iteracyjną

Obliczanie wartości wielomianu $W_n(x)$ dla określonej wartości wg schematu Hornera

Tradycyjny zapis wielomianu

$$W_n(x) = a_o x^n + a_1 x^{n-1} \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

Ile operacji należy wykonać aby obliczyć $W_n(x)$?

Przekształcamy ten wielomian w następujący sposób:

$$W_n(x) = (a_o x^{n-1} + a_1 x^{n-2} \ldots + a_{n-1}) x + a_n$$

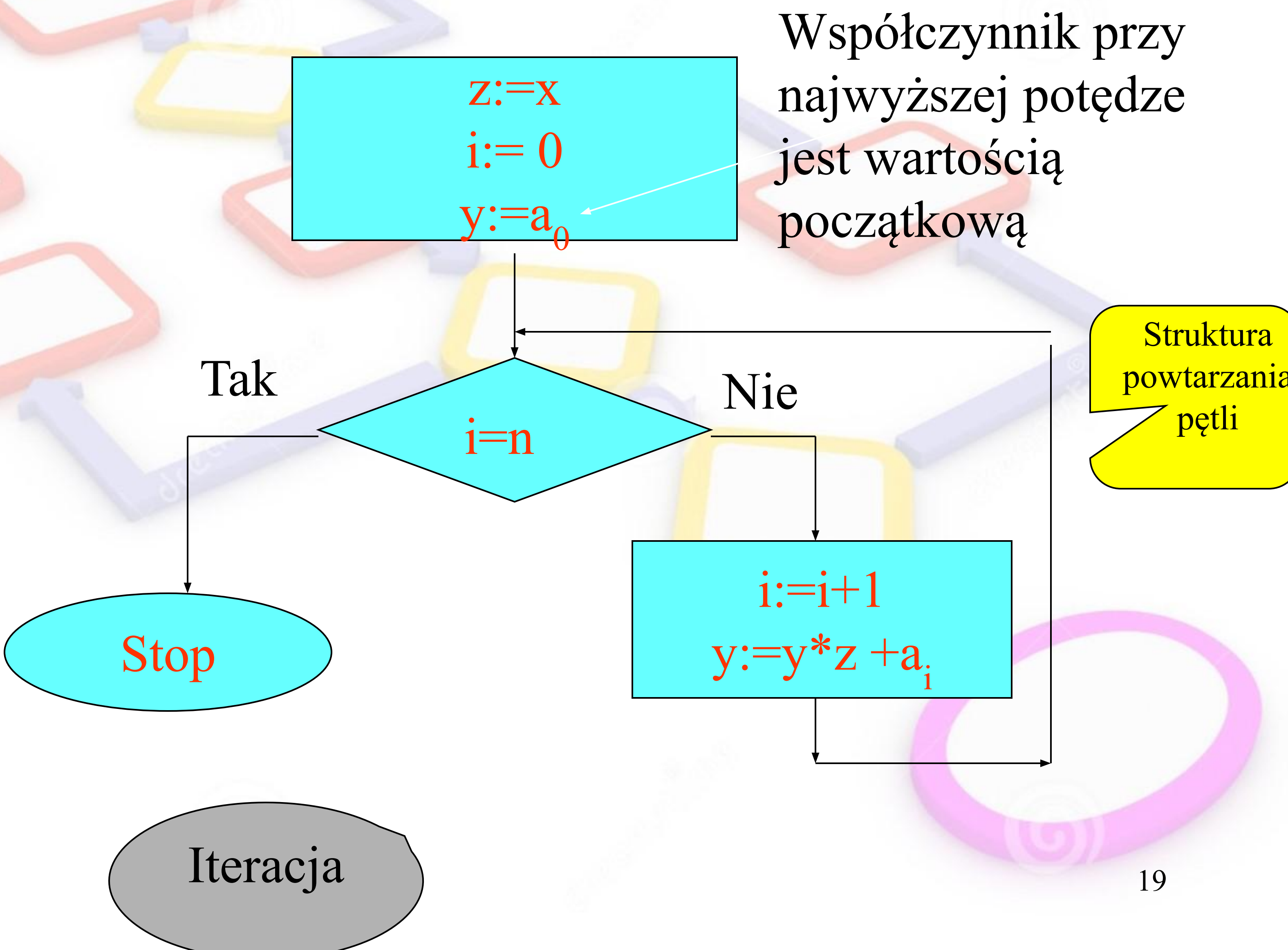
Schemat Hornera (1819r)

$$W_n(x) = (\ldots((a_o x + a_1) x + a_2) x \ldots + a_{n-1}) x + a_n$$

Ocenić pracochłonność algorytmu dla schematu Hornera

Ile operacji należy wykonać aby obliczyć $W_n(x)$?

Algorytm z pętlą for (i=0,...,n) w postaci schematu blokowego (schemat Hornera)



Pętla z warunkiem

Zadanie: Obliczyć bok kwadratu o polu a

Metoda: wzór Herona

$$x_{i+1} = \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{a}{x_i} \right)$$

wymagana dokładność obliczeń $| x_{i+1} - x_i| < eps$

Algorytm obliczania pierwiastka kwadratowego z danej liczby wg wzoru Herona

Dane:

- Liczba pierwiastkowana: a
- Pierwsze przybliżenie pierwiastka kwadratowego z danej liczby: p
- dokładność obliczeniowa eps

Wynik:

- Liczba x (spełniająca warunek $x^2 \approx a$, z dokładnością eps)

Algorytm (lista kroków)

K1 $p := x_0$;

K2 $x := (p + a/p) / 2$;

K3 Jeśli $| x - p | < eps$, to x jest szukaną liczbą , zakończ;

K4 Przyjmij $p := x$ wróć do K2

Algorytm Newtona Raphsona

Dane:

- Liczba pierwiastkowana: a
- Pierwsze przybliżenie pierwiastka kwadratowego z danej liczby: p
- dokładność obliczeniowa eps
- maksymalna liczba iteracji Maxi

Wynik:

- Liczba x (spełniająca warunek $x^2 \approx a$, z dokładnością eps
- albo obliczona po nie więcej niż Maxi operacjach

Algorytm (lista kroków)

K1 **i := 0;**
K2 **x:= (p + a/p) / 2; i:= i+1:**
K3 **Jeśli | x – p | < eps, lub i=imax to x jest szukaną liczbą , zakończ;**
K4 **Przyjmij p:= x wróć do K2**

Algorytm ten posiada zabezpieczenie na wypadek gdyby dla uzyskania zakładanej dokładności czas obliczeń był zdecydowanie za długi

Iteracja kończąca się i iteracja nieskończona

Kryteria

zakończenia obliczeń (działań) w algorytmie iteracyjnym:

- wykonanie podanej liczby iteracji (powtórzeń)
- uzyskanie żądanej dokładności obliczeń np. $|x_{i+1} - x_i| < eps$

Dla zabezpieczenia przed niekończącymi się pętlami przy działaniach na zbiorach danych warto;

- ustalić moc zbioru danych (liczbę elementów)
- gdy liczność zbioru danych nie jest znana po ostatnim elemencie powinien być postawiony wartownik oznaczający koniec zbioru

Zadania

Opracować algorytmy na :

1. obliczanie sumy i wartości średniej n danych liczb
2. obliczanie iloczynu n danych liczb
3. obliczanie sumy, wartości średniej wyników pomiarów wykonywanych przez urządzenie automatyczne i przesyłanych do komputera, liczba pomiarów nie jest znana.
4. Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze w zbiorze liczb naturalnych dwucyfrowych

Rekurencja
Przykłady definicji rekurencyjnych w matematyce

Rekurencja jest szczególnie silnym narzędziem w matematyce, przykłady:

- Liczby naturalne:
  1 jest liczbą naturalną,
  następnik liczby naturalnej jest liczbą naturalną
- Silnia
  $0!=1;$
  $n!=n*(n-1)!$ dla $n>0$
- Postęp arytmetyczny
  a_0
  $a_{n+1}=a_n + r$

  Postęp geometryczny
  c_0
  $c_{n+1}=c_n * q$

Przykład problemów związanych ze stosowaniem algorytmów rekurencyjnych

Rekurencyjny wzór wielomianu $\mathbf{W_n(x)}$

$$W_n(x)=a_o \qquad \text{dla } n=0$$

$$W_n(x) = W_{n-1}(x) * x + a_n \qquad \text{dla} \quad n>0$$

Zapis rekurencyjny, chociaż w istocie bardziej elegancki, prowadzi do zmniejszenia efektywności obliczeń np. w porównaniu do schematu Hornera.

Realizacja rekurencji dla n=3

$W_3(x) = W_2(x) * x + a_3$ $\quad$ $y=y*x+ a_3$

$W_2(x) = W_1(x) * x + a_2$ $\quad$ $y=y*x+ a_2$

$W_1(x) = W_0(x) * x + a_1$ $\quad$ $y=y*x+ a_1$

Procedura rozwinięcia rekurencyjnego

$W_0(x) =$ ... $x)$

Warunek stopu, tj zakończenia rekurencji

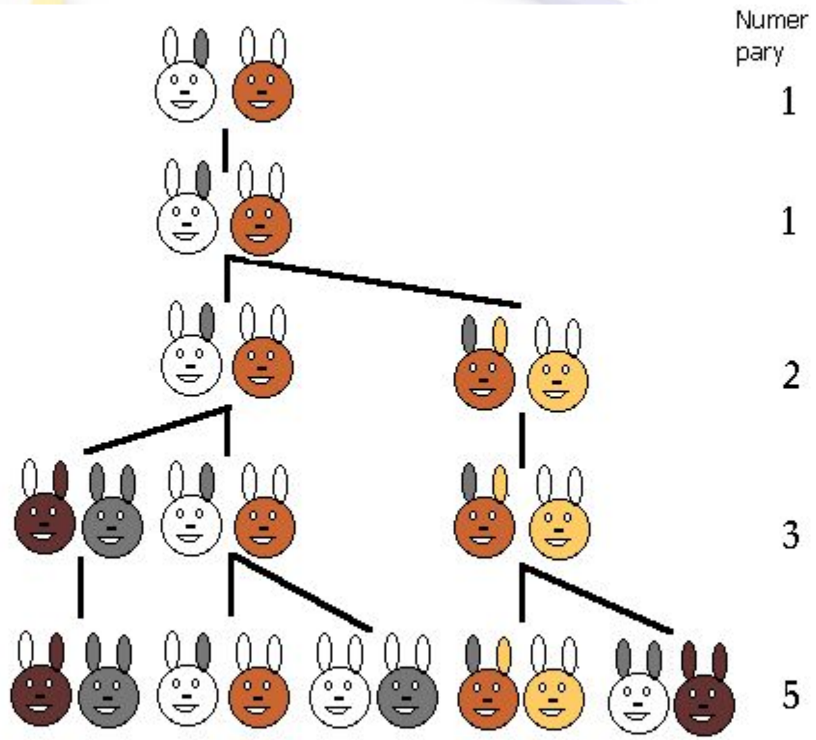
Procedura obliczania wartości wielomianu. Najszybciej według schematu Hornera (A. Borodin -1971r.)

Zadanie

Zadanie: obliczyć liczbę królików po k miesiącach gdy:

- Na początku mam jedną parę młodych królików
- Króliki osiągają dojrzałość po jednym miesiącu
- Para dorosłych królików rodzi co miesiąc jedną parę królików
- Króliki nie umierają

Przedstawić graficznie interpretację procesu rozmnażania się królików w ciągu 6 miesięcy, uwzględniając podział na pary młode i pary dojrzałe (liczby par)



Ciąg Fibonacciego

W 1202 roku Leonard z Pizy zwany Fibonaccim (synem Bonacciego) w dziele Liber abaci podał rozwiązanie problemu rozmnażania królików:

Rozwiązania tego problemu tworzą tzw ciąg Fibonacciego – ciąg liczb naturalnych określony rekurencyjnie w sposób następujący:.

- $F(0) = 0$
- $F(1) = 1$
- $F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

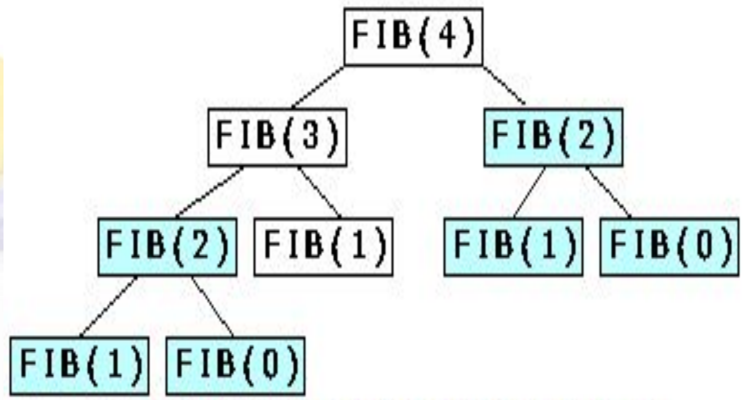
wyrazy tego ciągu nazywamy liczbami Fibonacciego. Kwestia, czy zaliczać zero do ciągu Fibonacciego, jest dyskusyjna. Część autorów rozpoczyna ciąg od 0

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597

Nazwę "ciąg Fibonacciego" spopularyzował w XIX w. Édouard Lucas

Problemy z rekurencją: występowanie dublujących się obliczeń

- Obliczanie parametrów ciągu rekurencyjnego wykonane bezpośrednio na podstawie wzoru matematycznego, może powodować problemy w postaci zbyt wielu dublujących się obliczeń.
- Na rysunku zaprezentowano schemat wywołań rekurencyjnych funkcji *FIB*, realizującej obliczenia ściśle według podanej definicji, na którym zaznaczono kolorem gałęzie wykonujące się dwa razy. Zupełnie niepotrzebnie.
- W sumie, wywołanie funkcji FIB dla większych parametrów n, spowoduje że wykonane zostanie w przybliżeniu 2n obliczeń, co jest z oczywistych powodów nieefektywne.
- Dlatego należy pamiętać, że nie jest dobrą metodą programowanie rekurencyjne tam, gdzie wystarczą proste funkcje iteracyjne



Drzewo wywołań funkcji *FIB* dla parametru 4.

funkcja FIB jest zdefiniowana rekurencyjnie

FIB(0) =0

FIB(1) = 1

FIB (n) = FIB(n-1) + FIB(n-2)

Jawna postać liczb Fibonacciego

Jawny wzór na *n* - ty wyraz ciągu Fibonacciego, zwany wzorem Bineta, ma postać:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

Zadanie:

Przygotować algorytmy iteracyjne na obliczanie liczb Fibonacciego korzystając z różnych form ich prezentowania np.:

- z wzoru Bineta
- z definicji rekurencyjnej (przekształconej w algorytmie do postaci iteracyjnej)

i oszacować ich pracochłonność.

Ciekawostki zamiast podsumowania
Zastosowania liczb Fibonacciego – złota liczba

Złota liczba

granica ciągu F(n+1)/F(n)

czyli ilorazów sąsiadujących ze sobą wyrazów ciągu Fibonacciego to tzw. złota liczba lub złota proporcja definiowana jako dodatnie rozwiązanie równania :

x:1=1:(x-1)

Jeśli będziemy dzielić kolejne liczby w sekwencji przez liczby występujące przed nimi okazuje się, że za każdym razem otrzymamy wynik oscylujący wokół niewymiernej wartość 1,61803398875….. np. 21 podzielone przez 13 daje w przybliżeniu 1,618.

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cong 1{,}618033\right]$$

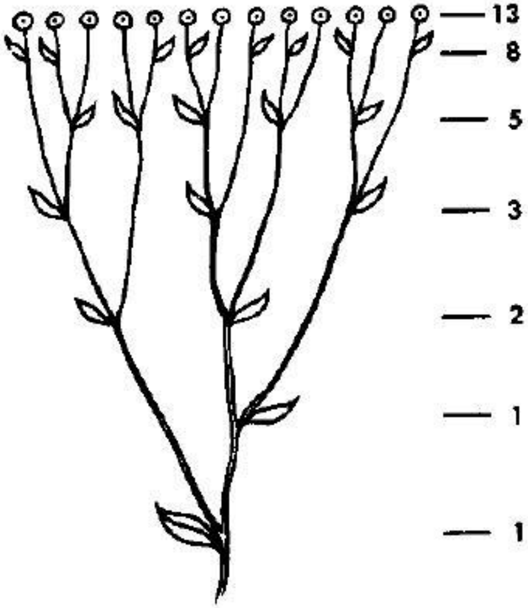
Dzielenie liczb z ciągu przez liczbę następną daje nam wartość 0,618…, czyli 13 podzielone przez 21 da mam w przybliżeniu 0,618. 0,618 jest więc odwrotnością 1,618.

$$\left[\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cong -0{,}618033\right]$$

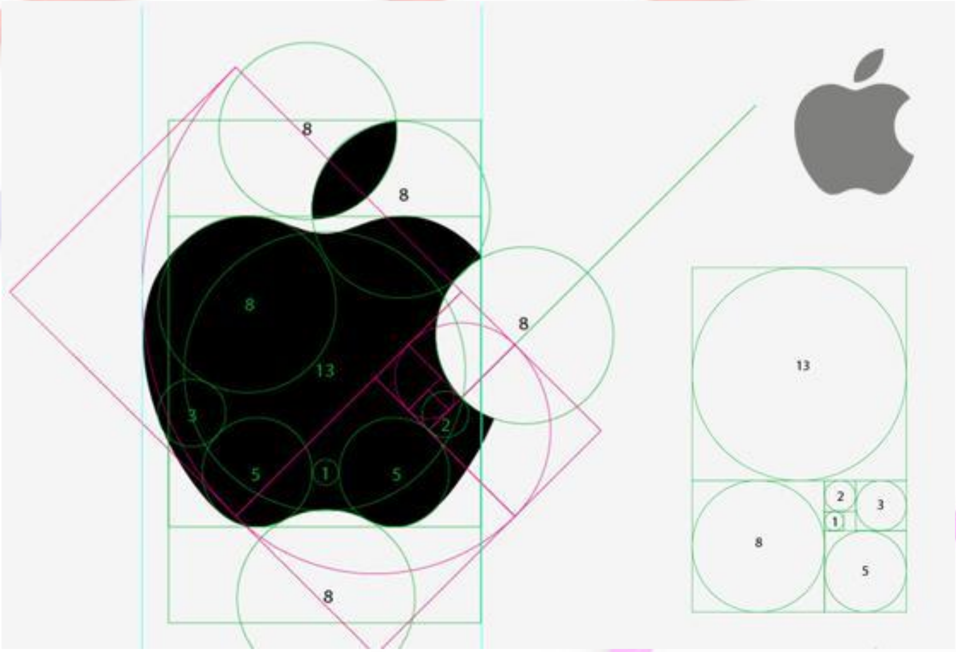
Współczynnik 1,618033…. w średniowieczu został nazwany *boską proporcją*.

Współcześnie spotyka się głównie dwie nazwy: *złoty podział* lub *złoty środek*.

W algebrze oznacza się go grecką literą *phi* **Φ = 1,618.**



Liczby z ciągu Fibonacciego
wkomponowane w rozrost kwiatu kichawca.
Źródło: H.E. Huntley, The Divie Proportion, Dover Publications 1970. [3]



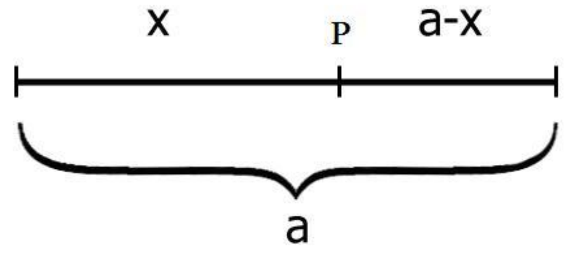
Logo firmy Apple zbudowane z kół o promieniach,
których wartości to kolejne liczby z ciągu Fibonacciego.

Źródło: http://www.banskt.com/blog/golden-ratio-in-logo-designs

Złoty podział i liczby Fibonacciego

Złoty podział - podział harmoniczny, dla liczby a, jest to przedstawienie tej liczby w postaci sumy b + c dwu składowych b, c takich, że a:b=b:c

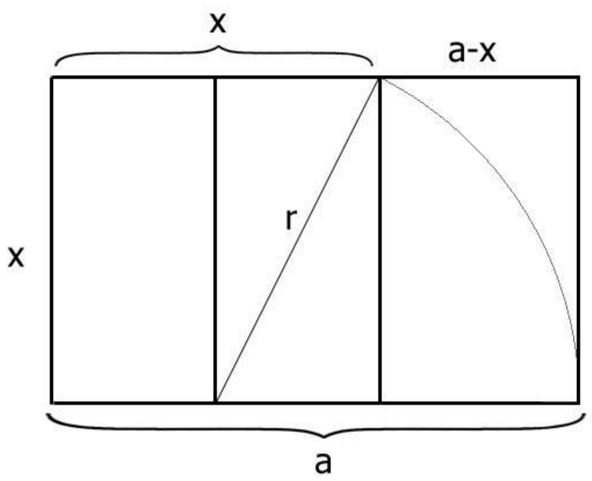
Np. dla odcinka jest to podział wewnętrzny tego odcinka w stosunku - jest to tzw. złota liczba (liczba ϕ).

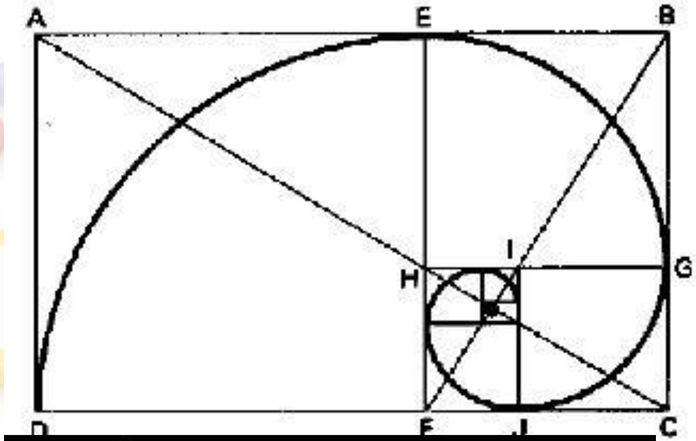


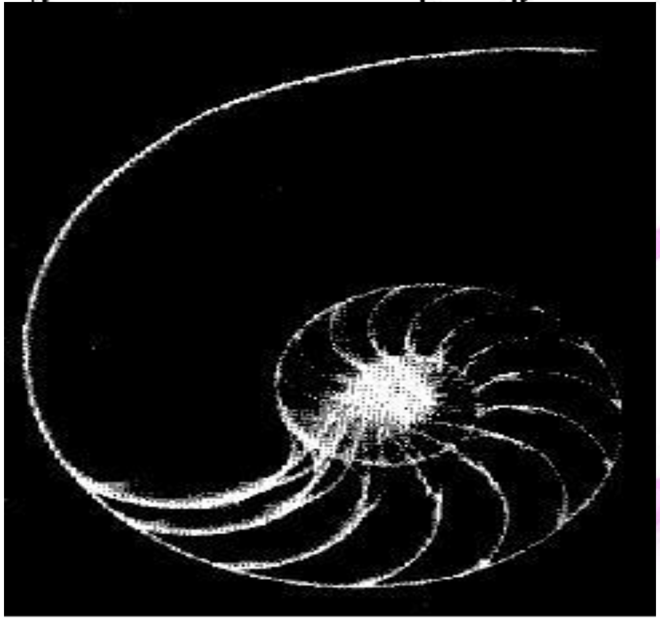
W wyniku złotego podziału odcinka otrzymuje się dwa odcinki o tej własności, że stosunek długości dłuższego z nich do długości krótszego jest równy stosunkowi długości dzielonego odcinka do długości dłuższego odcinka.

- punkt przecięcia przekątnych pięciokąta foremnego wyznacza ich złoty podział.
- bok dziesięciokąta foremnego ma długość równą długości dłuższego z odcinków wyznaczonych przez złoty podział promienia okręgu opisanego na tym dziesięciokącie.

Schemat złotego podziału prostokąta
Złota spirala







Zdjęcie rentgenowskie muszli łodzika.
Źródło: H.E. Huntley, The Divine Proportion,

Dover Publications 1970

Zadanie

- Złota liczba związana ze złotym podziałem zadziwiała przez stulecia matematyków, architektów, botaników, fizyków i artystów niezwykle interesującymi własnościami.

Zadanie

Proszę o wybranie sobie jednego przykładu zastosowań liczb Fibonacciego w przyrodzie, nauce lub innych dziedzinach i opracowanie własnego (indywidualnego) algorytmu rozwiązania wybranego zadania (problemu).