Информатика в задачах теплоэнергетики

Интерполяция

Слово интерполяция (*interpolatio*) переводится с латинского, как изменение или обновление. С точки зрения математики, это определение промежуточных значений какой либо переменной величины по ряду соседних известных её значений.

Интерполяция

Если задана функция *y(x),* то это означает, что любому допустимому значению *x* сопоставлено значение *y*. Но нередко оказывается, что нахождение этого значения очень трудоемко.

Решение задач интерполяции обеспечивается построением интерполяционной функции *y(x)* приближенно заменяющей исходную *φ(x)* заданную таблично, и проходящей через все заданные точки – *узлы интерполяции*.

интерполяция

При интерполировании рассматриваются три основные проблемы:

- ✔ выбор интерполяционной функции *y(x)*;
- ✔ оценка погрешности интерполяции *R(x)*;
- ✔ размещение узлов интерполяции для обеспечения наивысшей возможной точности восстановления функции $(x_1, x_2, x_3, x_4 \ldots x_n)$.

Интерполяция

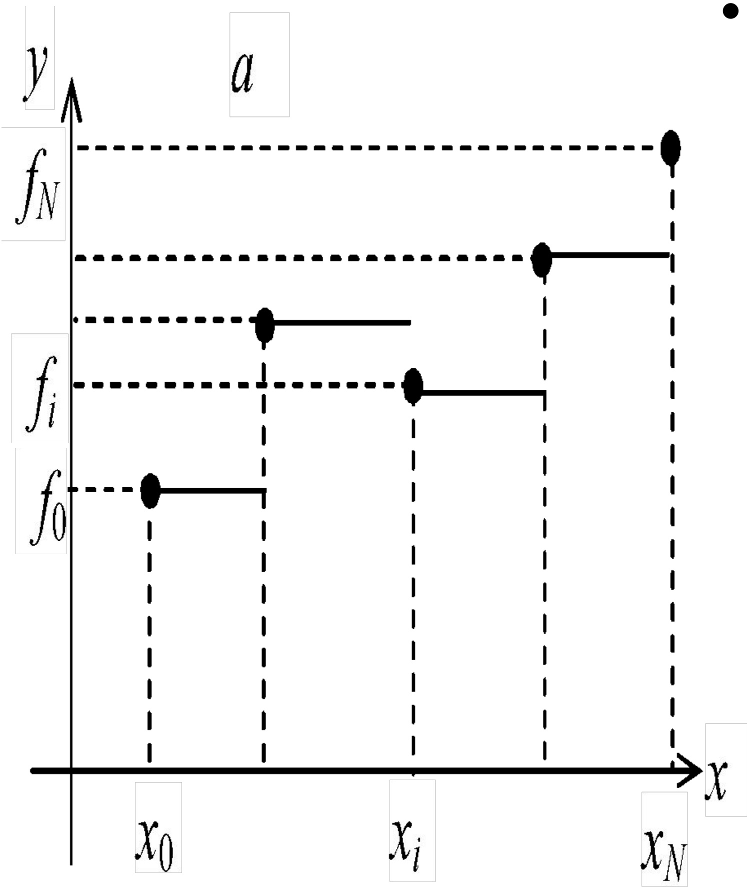
Интерполяция

Практически все интерполяционные методы базирующиеся на использовании в качестве интерполяционной функции полиномов, дают одни и те же результаты, но с разными затратами. Это объясняется тем, что полином *n-й* степени, содержащий *n+1* параметр и проходящий через все заданные *n+1* точки – единственный.

Интерполяция

Следует отметить, что существует очевидный способ построения интерполяционной функции: из условия прохождения функции через все точки составляется система уравнений, из решения которой находятся все неизвестные параметры. Однако, этот путь не всегда эффективен, особенно при большом числе точек.

Локальная интерполяция



- *Кусочно-постоянная интерполяция*. На каждом локальном отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \ldots, N$, интерполирующая функция является постоянной и равна левому: $F_i(z) = f_i$ или правому: $F_i(z) = f_i$ значению. Легко понять, что условия интерполяции выполняются. Построенная функция разрывная (рис. 1*а*), что ограничивает ее применение. Кроме того, в случае малого числа точек такая интерполяция дает большую погрешность.

Кусочно-постоянная интерполяция

При кусочно-постоянной интерполяции интерполяционный многочлен на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ равен константе, а именно, левому или правому значению функции.

Для левой кусочно-постоянной интерполяции $F(x) = f_{i-1}$ если $x_{i-1} \le x < x_i$

$$F(x) = \begin{cases} f_0, & x_0 \le x < x_1 \\ f_1, & x_1 \le x < x_2 \\ \ldots \\ f_{N-1}, & x_{N-1} \le x < x_N \end{cases}$$

Для правой кусочно-постоянной интерполяции $F(x) = f_i \quad x_{i-1} < x \le x_i$

$$F(x) = \begin{cases} f_1, & x_0 < x \le x_1 \\ f_2, & x_1 < x \le x_2 \\ \ldots \\ f_N, & x_{N-1} < x \le x_N \end{cases}$$

Кусочно-постоянная интерполяция

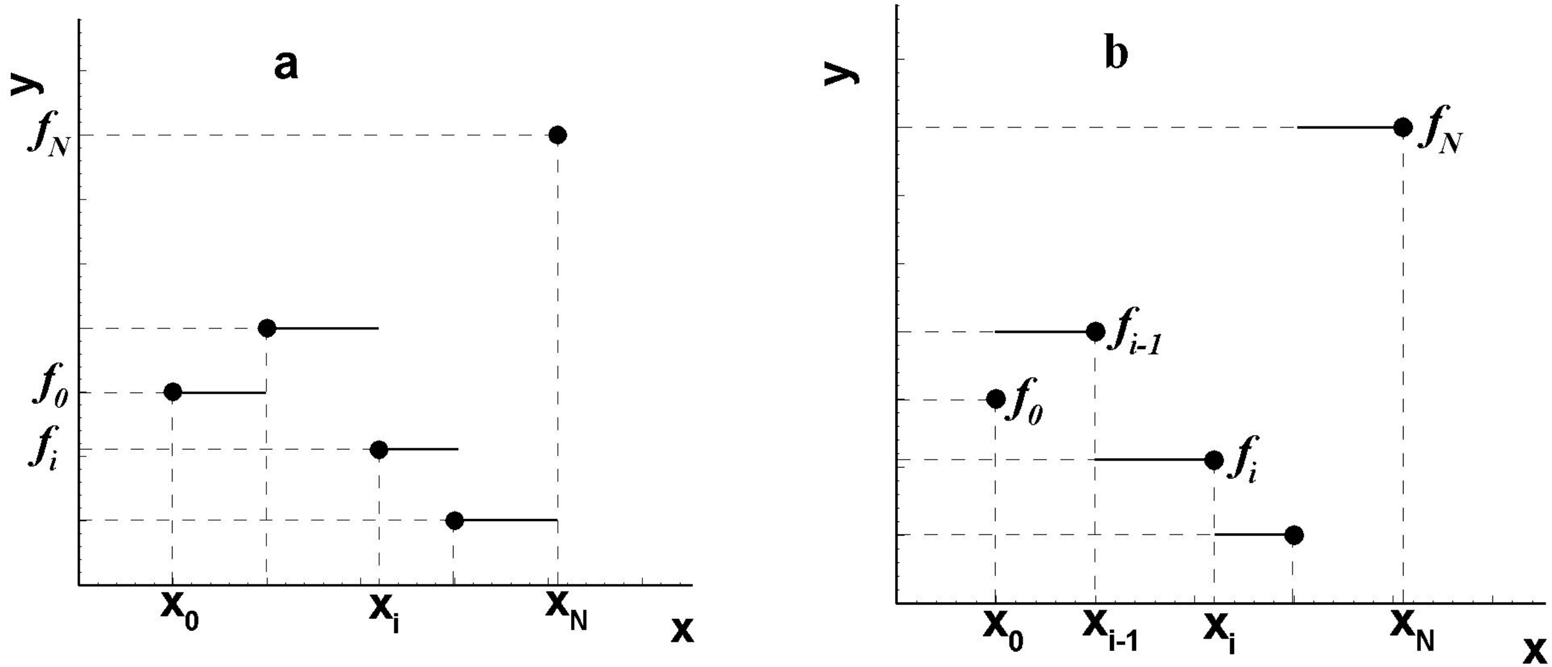
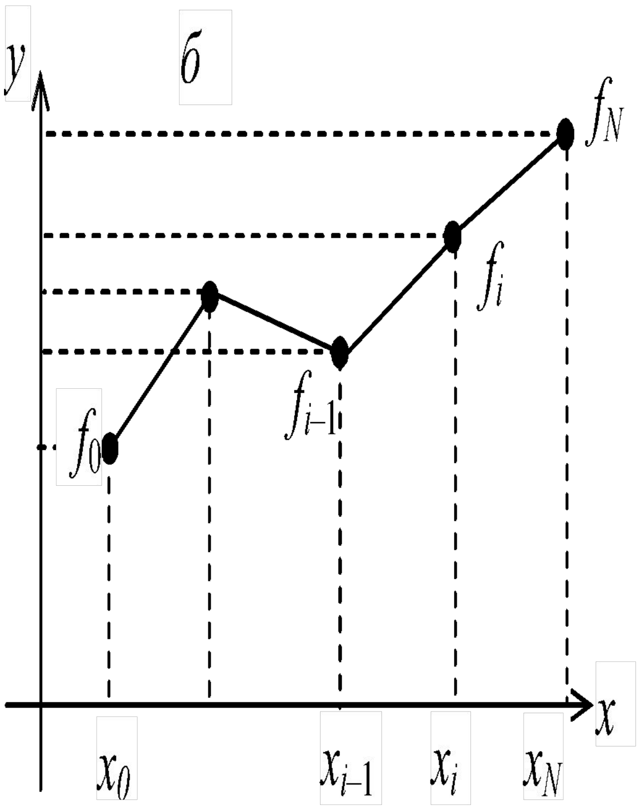


Рис. 2. Левая (*а*) и правая (*б*) кусочно–постоянная интерполяции

Локальная интерполяция



- *Кусочно-линейная интерполяция.* На каждом интервале $[x_{i-1}, x_i]$ функция является линейной $F_i(z) = k_i z + l_i$. Значения коэффициентов находятся из выполнения условий интерполяции на концах отрезка: $F_i(x_{i-1}) = f_{i-1}$, $F_i(x_i) = f_i$. Получаем систему уравнений: $k_i x_{i-1} + l_i = f_{i-1}$, $k_i x_i + l_i = f_i$, откуда находим сами коэффициенты. Итоговая функция будет непрерывной, но производная будет разрывной в каждом узле интерполяции. Погрешность такой интерполяции будет меньше, чем в предыдущем случае. Иллюстрация кусочно-линейной интерполяции приведена на рис. 1*б*.

Кусочно-линейная интерполяция

$$\begin{cases} k_i x_{i-1} + l_i = f_{i-1} \\ k_i x_i + l_i = f_i \end{cases} \qquad k_i = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \qquad l_i = f_i - \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} x_i$$

$$F(x) = \frac{f_i - f_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}(x - x_i) + f_i$$ если $$x_{i-1} \le x \le x_i$$

Т.е.

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + f_0, & x_0 \le x \le x_1, \\ \dfrac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f_1, & x_1 \le x \le x_2 \\ \ldots \\ \dfrac{f_N - f_{N-1}}{x_{N1} - x_{N-1}}(x - x_{N-1}) + f_{N-1}, & x_{N-1} \le x \le x_N \end{cases}$$

При использовании линейной интерполяции сначала нужно определить интервал, в который попадает искомое значение аргумента, а затем подставить его в формулу!

Локальная интерполяция

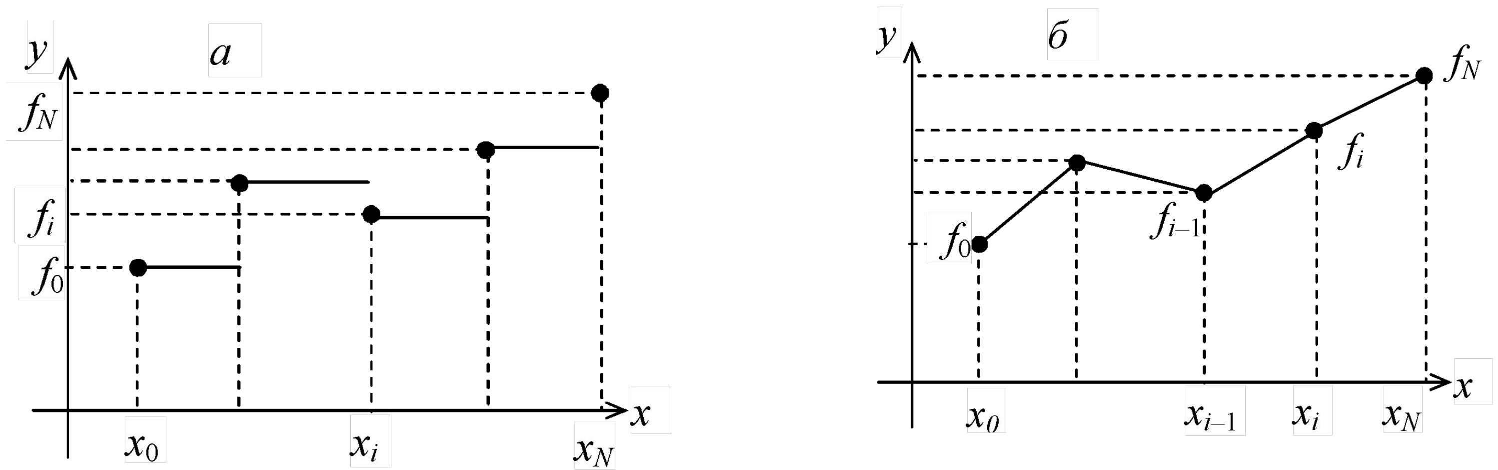


Рис. 1. Левая кусочно-постоянная (*а*) и кусочно-линейная (*б*) интерполяции

Пример вычисления кусочно-постоянной и кусочно-линейной интерполяции

$$\text{исх\_данн} := \begin{pmatrix} 10 & 42.04 \\ 20 & 125.70 \\ 30 & 209.30 \\ 40 & 355 \end{pmatrix}$$

кусочно постоянная интерполяция

при t=15 h=42.04

при t=15 h=125.70

Кусочно линейная интерполяция $F_i(x) = k_i x + l_i$

$$\frac{(125.7 - 42.04)}{20 - 10} = 8.366$$

$$125.7 - \frac{(125.7 - 42.04)}{20 - 10} \cdot 20 = -41.62$$

$$8.366 \cdot 15 - 41.62 = 83.87$$

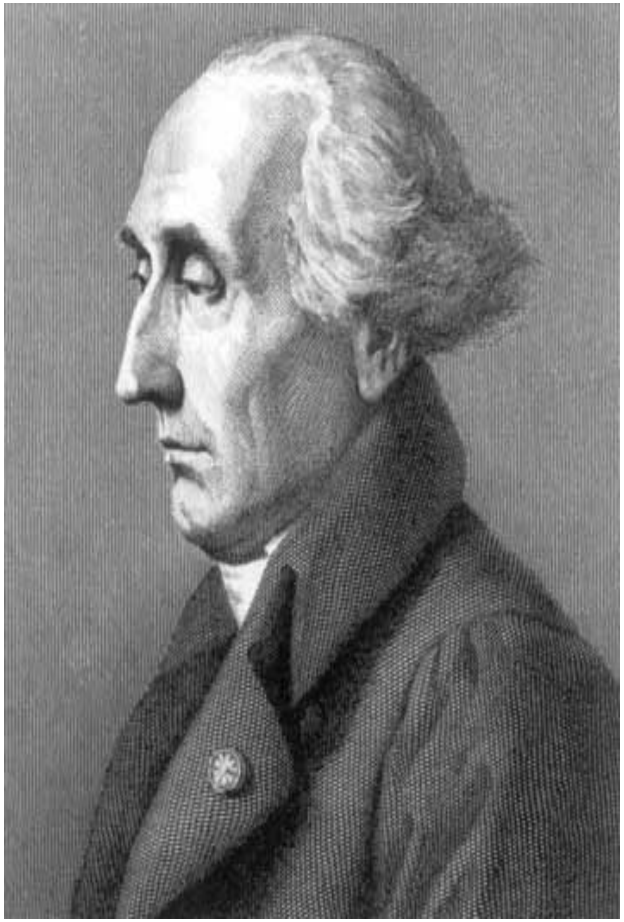
$$h := \text{исх\_данн}^{\langle 1 \rangle} \quad t := \text{исх\_данн}^{\langle 0 \rangle} \qquad z := 15$$

$$k := \frac{h_1 - h_0}{t_1 - t_0} = 8.366$$

$$l := h_1 - \frac{h_1 - h_0}{t_1 - t_0} \cdot t_1 = -41.62$$

$$h15 := k \cdot (z) + l = 83.87$$

Метод Лагранжа



ЛАГРАНЖ, ЖОЗЕФ ЛУИ (Lagrange, Joseph Louis) (1736–1813) (рис.1.2), французский математик и механик. Родился 25 января 1736 в Турине. Учился в Туринском университете. Стал профессором геометрии в Артиллерийской школе Турина. Лагранж внес существенный вклад во многие области математики, включая вариационное исчисление, теорию дифференциальных уравнений, решение задач на нахождение максимумов и минимумов, теорию чисел (теорема Лагранжа), алгебру и теорию вероятностей. В двух своих важных трудах – Теория аналитических функций (Théorie des fonctions analytiques, 1797) и О решении численных уравнений (De la résolution des équations numériques, 1798) – подытожил все, что было известно по этим вопросам в его время, а содержавшиеся в них новые идеи и методы были развиты в работах математиков 19 в.

Умер Лагранж в Париже 10 апреля 1813.

Метод Лагранжа

Пусть известны значения некоторой функции *f(x)* в *n+1* различных произвольных точках $y_i=f(x_i)$, $i=0,\dots n$. Для интерполирования (восстановления) функции в какой либо точке *x*, принадлежащей отрезку $[x_0, x_n]$, необходимо построить интерполяционный полином *n*-го порядка, который в методе Лагранжа представляется следующим образом:

$$L_n = y_0 \cdot Q_0(x) + y_i \cdot Q_i(x) + \cdots + y_n \cdot Q_n(x)$$

Метод Лагранжа

$$Q_i(x) = \frac{(x - x_0)\cdot(x - x_{i-1})\cdot(x - x_{i+1})\cdot(x - x_n)}{(x_i - x_0)\cdot(x_i - x_{i-1})\cdot(x_i - x_{i+1})\cdot(x_i - x_n)}$$

Если раскрыть произведение всех скобок в числителе, то получим полином *n*-го порядка от *x*, так как в числителе содержится n сомножителей первого порядка. Таким образом, интерполяционный полином Лагранжа, не что иное, как обычный полином *n*-го порядка, несмотря на форму записи.

$$R(x) = |f(x) - L_n(x)| \le \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\cdot\prod_{i=0}^{n}(x - x_i),$$

M_{n+1} максимальное значение *(n+1)*-й производной исходной функции *f(x)* на отрезке $[x_0, x_n]$:

Метод Лагранжа

Дана таблично заданная функция (табл. 1.1.). Требуется найти h(t) при t=15°C. В нашем случае n=3.

Таблица 1.1.

Данные для интерполяции по методу Лагранжа

n (кол-во точек)	0	1	2	3
t, °C	10	20	30	40
h, кДж/кг	42,04	125,70	209,30	355,00

__Решение:__

Запишем функцию Лагранжа в развернутом виде:

$$h(t)_{15} = h_0 \frac{(t-t_1)\cdot(t-t_2)\cdot(t-t_3)}{(t_0-t_1)\cdot(t_0-t_2)\cdot(t_0-t_3)} + h_1 \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_2)\cdot(t-t_3)}{(t_1-t_0)\cdot(t_1-t_2)\cdot(t_1-t_3)}$$

$$+h_2 \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_1)\cdot(t-t_3)}{(t_2-t_0)\cdot(t_2-t_1)\cdot(t_2-t_3)} + h_3 \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_1)\cdot(t-t_2)}{(t_3-t_0)\cdot(t_3-t_1)\cdot(t_3-t_2)} =$$

Метод Лагранжа

__Решение:__
Запишем функцию Лагранжа в развернутом виде:

$$h(t)_{15} = h_0 \frac{(t-t_1)\cdot(t-t_2)\cdot(t-t_3)}{(t_0-t_1)\cdot(t_0-t_2)\cdot(t_0-t_3)} + h_1 \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_2)\cdot(t-t_3)}{(t_1-t_0)\cdot(t_1-t_2)\cdot(t_1-t_3)}$$

$$+h_2 \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_1)\cdot(t-t_3)}{(t_2-t_0)\cdot(t_2-t_1)\cdot(t_2-t_3)} + h_3 \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_1)\cdot(t-t_2)}{(t_3-t_0)\cdot(t_3-t_1)\cdot(t_3-t_2)} =$$

$$= 42{,}04 \frac{(15-20)\cdot(15-30)\cdot(15-40)}{(10-20)\cdot(10-30)\cdot(10-40)} + 125{,}70 \frac{(15-10)\cdot(15-30)\cdot(15-40)}{(20-10)\cdot(20-30)\cdot(20-40)} +$$

$$+209{,}3 \frac{(15-10)\cdot(15-20)\cdot(15-40)}{(30-10)\cdot(30-20)\cdot(30-40)} + 355{,}0 \frac{(15-10)\cdot(15-20)\cdot(15-30)}{(40-10)\cdot(40-20)\cdot(40-30)}$$

$$= 247{,}47375.$$

Метод Лагранжа

Попробуем найти значение функции h(t) при t=15ºC при n=2. Для интерполяции выберем точки 0, 1 и 2. Снова запишем функцию Лагранжа:

$$h(t)_{15} = h_0 \frac{(t-t_1)\cdot(t-t_2)}{(t_0-t_1)\cdot(t_0-t_2)} + h_1 \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_2)}{(t_1-t_0)\cdot(t_1-t_2)} + h_2 \frac{(t-t_0)\cdot(t-t_1)}{(t_2-t_0)\cdot(t_2-t_1)} =$$

$$= 42{,}04 \frac{(15-20)\cdot(15-30)}{(10-20)\cdot(10-30)} + 125{,}70 \frac{(15-10)\cdot(15-30)}{(20-10)\cdot(20-30)} +$$

$$+209{,}3 \frac{(15-10)\cdot(15-20)}{(30-10)\cdot(30-20)} = 83{,}88.$$

Метод Лагранжа

Èíòåðïîëÿöèÿ ïî ôîðìóëå Ëàãðàíæà

Èñõîäíûå äàííûå:

$$\text{äàííûå} := \begin{pmatrix} 10 & 42.04 \\ 20 & 125.7 \\ 30 & 209.3 \\ 40 & 355 \end{pmatrix}$$ - çàäàåì ìàòðèöó èñõîäíûõ äàííûõ

$t := \text{äàííûå}^{\langle 0 \rangle}$ $h := \text{äàííûå}^{\langle 1 \rangle}$ - óêàçûâàåì èñõîäíûå äàííûå

$n := \text{length}(t) - 1$ $i := 0..n$ $j := 0..n$

$$t = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \\ 40 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} 42.04 \\ 125.7 \\ 209.3 \\ 355 \end{pmatrix}$$ - ïðîâåðÿåì èñõîäíûå äàííûå

Çàïèøåì îáùóþ ôîðìóëó Ëàãðàíæà:

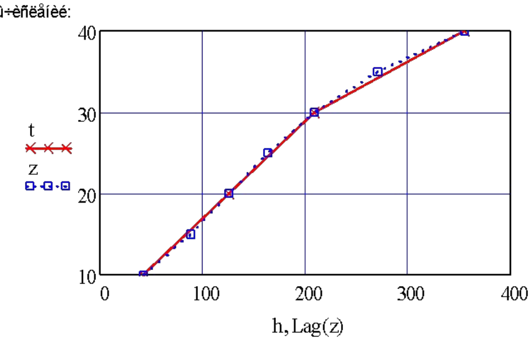
$z := 10, 15..40$ - çàäàåì øàã âû÷èñëåíèé

$$\text{Lag}(z) := \sum_i \left[h_i \cdot \left(\prod_j \text{if}\left(i = j, 1, \frac{z - t_j}{t_i - t_j} \right) \right) \right] \qquad \text{Lag}(15) = 87.762$$

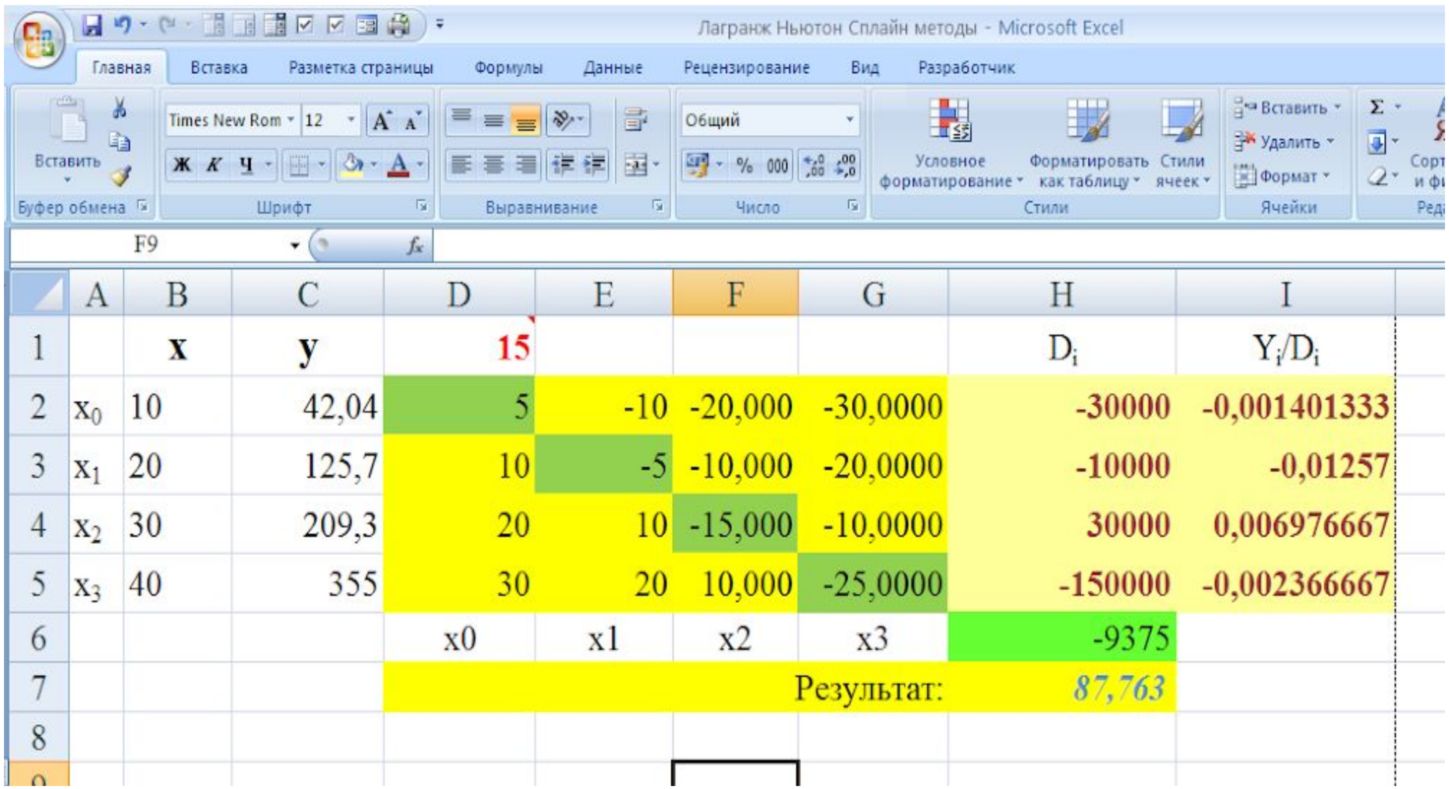
Ðåçóëüòàòû âû÷èñëåíèé:

$\text{Lag}(z) =$

42.04
87.762
125.7
163.623
209.3
270.502
355



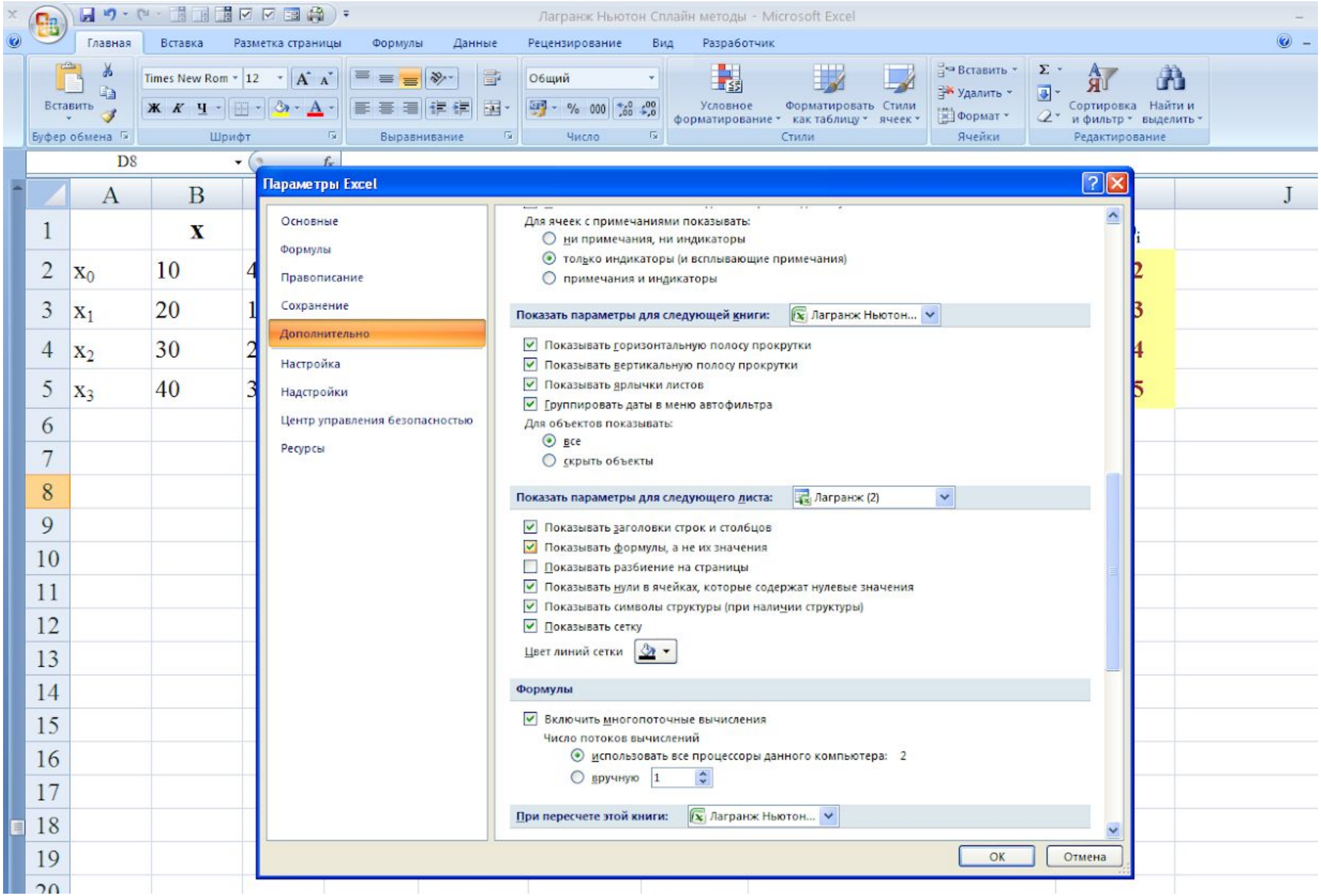
Метод Лагранжа в MS Excel



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**x**	**y**	**15**				D_i	Y_i/D_i
2	x_0	10	42,04	5	-10	-20,000	-30,0000	**-30000**	**-0,001401333**
3	x_1	20	125,7	10	-5	-10,000	-20,0000	**-10000**	**-0,01257**
4	x_2	30	209,3	20	10	-15,000	-10,0000	**30000**	**0,006976667**
5	x_3	40	355	30	20	10,000	-25,0000	**-150000**	**-0,002366667**
6				x0	x1	x2	x3	-9375	
7							Результат:	*87,763*	
8									

Метод Лагранжа в MS Excel

	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**x**	**y**	**15**				D_i	Y_i/D_i
2	10	42,04	=D1-B2	=B2-B3	=B2-B4	=B2-B5	=ПРОИЗВЕД(D2:G2)	=C2/H2
3	20	125,7	=B3-B2	=D1-B3	=B3-B4	=B3-B5	=ПРОИЗВЕД(D3:G3)	=C3/H3
4	30	209,3	=B4-B2	=B4-B3	=D1-B4	=B4-B5	=ПРОИЗВЕД(D4:G4)	=C4/H4
5	40	355	=B5-B2	=B5-B3	=B5-B4	=D1-B5	=ПРОИЗВЕД(D5:G5)	=C5/H5
6			x0	x1	x2	x3	=ПРОИЗВЕД(D2;E3;F4;G5)	
7						Результат:	*=H6*СУММ(I2:I5)*	
8								


Лагранж Ньютон Сплайн методы - Microsoft Excel
Главная
Вставка
Разметка страницы
Формулы
Данные
Рецензирование
Вид
Разработчик
Вставить
Times New Rom
12
Буфер обмена
Шрифт
Выравнивание
Общий
Число
Условное форматирование
Форматировать как таблицу
Стили ячеек
Стили
Вставить
Удалить
Формат
Ячейки
Сортировка и фильтр
Найти и выделить
Редактирование
D8
Параметры Excel
Основные
Формулы
Правописание
Сохранение
Дополнительно
Настройка
Надстройки
Центр управления безопасностью
Ресурсы
Для ячеек с примечаниями показывать:
ни примечания, ни индикаторы
только индикаторы (и всплывающие примечания)
примечания и индикаторы
Показать параметры для следующей книги:
Лагранж Ньютон...
Показывать горизонтальную полосу прокрутки
Показывать вертикальную полосу прокрутки
Показывать ярлычки листов
Группировать даты в меню автофильтра
Для объектов показывать:
все
скрыть объекты
Показать параметры для следующего листа:
Лагранж (2)
Показывать заголовки строк и столбцов
Показывать формулы, а не их значения
Показывать разбиение на страницы
Показывать нули в ячейках, которые содержат нулевые значения
Показывать символы структуры (при наличии структуры)
Показывать сетку
Цвет линий сетки
Формулы
Включить многопоточные вычисления
Число потоков вычислений
использовать все процессоры данного компьютера: 2
вручную
1
При пересчете этой книги:
Лагранж Ньютон...
ОК
Отмена
A
B
J
x
x0
10
x1
20
x2
30
x3
40

Метод Ньютона

Английский математик, физик, алхимик и историк Исаак Ньютон родился в местечке Вулсторп в Линкольншире в семье фермера. Отец Ньютона умер незадолго до его рождения; мать вскоре вышла вторично замуж за священника из соседнего городка и переехала к нему, оставив сына с бабушкой в Вулсторпе.

В 1668 г. Ньютону была присвоена степень магистра, а в 1669 г. Барроу передал ему физико-математическую кафедру, которую Ньютон занимал до 1701 г. В те же годы Ньютон разрабатывал основы математического анализа, о чем стало широко известно из переписки европейских ученых, хотя сам Ньютон не опубликовал тогда по этому поводу ни одной строчки: первая публикация Ньютона об основах анализа была напечатана лишь в

Метод Ньютона

Интерполяция может производится для произвольно и равномерно расположенных узлов интерполяции

$$x_{i+1} = x_i + h \qquad h = \frac{(x_0 - x_n)}{n} \qquad \Delta y_i^k = \Delta y_{i+1}^{k-1} - \Delta y_i^{k-1}$$

Интерполяционный многочлен Ньютона записывается следующим образом:

$$P_n = \frac{\Delta y_0 \cdot (x - x_0)}{h} + \frac{\Delta^2 y_0 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1)}{2! \cdot h^2} + \frac{\Delta^3 y_0 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)}{3! \cdot h^3} + \frac{\Delta^i y_0 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})}{n! \cdot h^n}.$$

Метод Ньютона

Часто вводят безразмерную переменную *q*, показывающую сколько содержится шагов от x_0 до заданной точки *x*:

$$q = \frac{(x - x_0)}{h}$$

В этом случае выражение для интерполяционного полинома запишется в следующем виде (первая интерполяционная формула Ньютона):

$$P_n = y_0 + \Delta y_0 \cdot q + \frac{\Delta^2 y_0 \cdot q \cdot (q-1)}{2!} + \frac{\Delta^3 y_0 \cdot q \cdot (q-1) \cdot (q-2)}{3!} + \cdots$$

$$+ \frac{\Delta^i y_0 \cdot q \cdot (q-1) \cdot \ldots \cdot (q-n+1)}{n!}.$$

Метод Ньютона

Существует и вторая интерполяционная формула Ньютона (1687 год):

$$P_n = y_0 + \Delta y_{n-1} \cdot q + \frac{\Delta^2 y_{n-2} \cdot q \cdot (q+1)}{2!} + \frac{\Delta^3 y_{n-3} \cdot q \cdot (q+1) \cdot (q+2)}{3!} + \cdots$$

$$+ \frac{\Delta^i y_0 \cdot q \cdot (q+1) \cdot \ldots \cdot (q+n-1)}{n!}.$$

Погрешность интерполяции можно оценить по выражению:

$$R(x) = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} \cdot h^{n+1}}{(n+1)!} \cdot q \cdot (q-1) \cdot (q-2) \cdot \ldots \cdot (q-n)$$

Метод Ньютона

Дана таблично заданная функция (табл. 1.1.). Требуется найти h(t) при t=15°C. В нашем случае n=3.

n (кол-во точек)	0	1	2	3
t, °C	10	20	30	40
h, кДж/кг	42,04	125,70	209,30	355,00

Метод Ньютона

Для интерполяции будем использовать только первые три точки, а остальные для оценки погрешности.

В нашем случае *n*=2. Определяем значение безразмерной переменной *q* по известной формуле:

$$q = \frac{(x - x_0)}{h} = \frac{(15 - 10)}{10} = 0{,}5$$

Метод Ньютона

Таблица конечных разностей для интерполирования по формулам Ньютона

№ п/п	t, °C	h, кДж/кг	Δh	$\Delta^2 h$	$\Delta^3 h$
1	10	42,04	83,69	-0,09	62,01
2	20	125,7	83,60	62,1	-
3	30	209,3	145,7	-	
4	40	355	-		

Метод Ньютона

Подставляем все необходимые значения в формулу Ньютона из нашей таблицы (лист 19), получим:

$$h(t)_{15} = 42{,}04 + 83{,}69 \cdot 0{,}5 + \frac{-0{,}09 \cdot 0{,}5 \cdot (0{,}5 - 1)}{2!} = 83{,}8962.$$

Метод Ньютона в MS Excel

	A	B	C	D	E	F
1	**15**	**t**	**h**	$\Delta^1 h$	$\Delta^2 h$	$\Delta^3 h$
2	x_0	10	42,04	83,66	-0,06	62,16
3	x_1	20	125,7	83,6	62,1	
4	x_2	30	209,3	145,7		
5	x_3	40	355			
6				Результат:	83,8775	
7	q=	0,5				

Метод Ньютона в MS Excel

	A	B	C	D	E	F
1	**15**	**t**	**h**	$\Delta^1 h$	$\Delta^2 h$	$\Delta^3 h$
2	x_0	10	42,04	=C3-C2	=D3-D2	=E3-E2
3	x_1	20	125,7	=C4-C3	=D4-D3	
4	x_2	30	209,3	=C5-C4		
5	x_3	40	355			
6				Результат:	=C2+(D2*B7)+((E2*B7*(B7-1))/(1*2))	
7	q=	=(A1-B2)/(B3-B2)				

Пример *Интерполирование по формулам Ньютона в программе Mathcad.*

$$\text{èñõäàí} := \begin{pmatrix} 10 & 42.04 \\ 20 & 125.7 \\ 30 & 209.3 \\ 40 & 355 \end{pmatrix} \qquad x := \text{èñõäàí}^{\langle 0 \rangle} \qquad x0 := 15 \qquad y := \text{èñõäàí}^{\langle 1 \rangle}$$

$$q := \frac{(x0 - x_0)}{h} = 0.5 \qquad h := x_1 - x_0 = 10$$

$$y = \begin{pmatrix} 42.04 \\ 125.7 \\ 209.3 \\ 355 \end{pmatrix} \qquad \Delta y2 := \begin{pmatrix} \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta y_2 - \Delta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.06 \\ 62.1 \end{pmatrix} \qquad \Delta y3 := \left(\Delta y2_1 - \Delta y2_0\right) = (62.16)$$

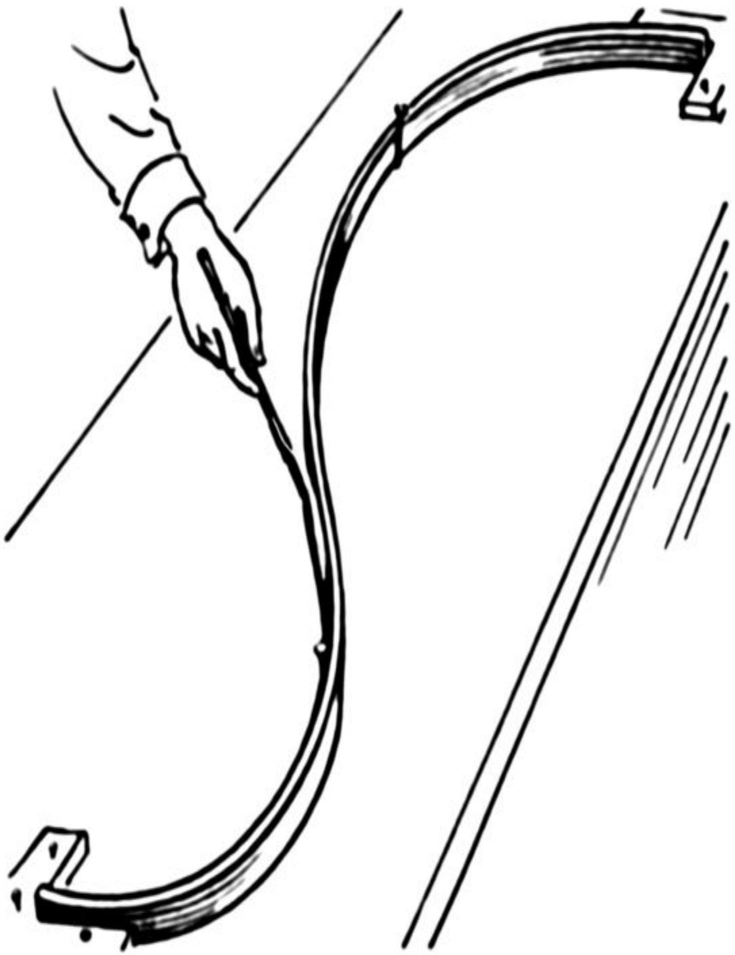
$$y_0 = 42.04 \qquad \Delta y := \begin{pmatrix} y_1 - y_0 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83.66 \\ 83.6 \\ 145.7 \end{pmatrix}$$

$$\Delta y2_0 = -0.06$$

$$\Delta y_0 = 83.66$$

$$h15 := y_0 + \Delta y_0 \cdot q + \frac{\Delta y2_0 \cdot q \cdot (q - 1)}{2!} = 83.8775$$

Метод сплайнов



Слово сплайн, происходящее от английского слова *spline,* означает гибкую линейку, используемую для проведения гладких кривых через заданные точки на плоскости. Форма этого универсального лекала на каждом отрезке описывается кубической параболой. Сплайны широко используются в инженерных приложениях, в частности, в компьютерной графике, поскольку позволяют с хорошей точностью задать кривые в виде нескольких массивов коэффициентов.

Метод сплайнов

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i=1,2,\ldots N$ будем искать функцию $S(x)= S_i(x)$ в виде полинома третьей степени:

$$S_i(x) = a_i + b_i \cdot (x - x_{i-1}) + c_i \cdot (x - x_{i-1})^2 + d_i \cdot (x - x_{i-1})^3,$$

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i \frac{(x - x_i)^2}{2} + d_i \frac{(x - x_i)^3}{6}$$

где *a, b, c, d* – коэффициенты, подлежащие определению на всех *n* элементарных отрезках.

К важным достоинствам интерполяции кубическими сплайнами относится получение функции, имеющей минимальную возможную кривизну. К недостаткам сплайновой интерполяции относится необходимость получения сравнительно большого числа параметров.

Метод сплайнов

Неизвестные коэффициенты $a_i, b_i, c_i, d_i \quad i = 0,1,2,\dots,N$

находим из:
•условий интерполяции: $S_1(x_0) = f_0 \quad S_i(x_i) = f_i \quad i = 1,2,\dots,N$

•непрерывности функции $S_i(x_{i-1}) = S_{i-1}(x_{i-1}) \quad i = 2,3,\dots,N$

- непрерывности первой и второй производной:

$$S_i'(x_{i-1}) = S_{i-1}'(x_{i-1}) \quad S_i''(x_{i-1}) = S_{i-1}''(x_{i-1}) \qquad i = 2,3,\dots,N$$

Учитывая, что

$$S_{i-1}(x) = a_{i-1} + b_{i-1}(x - x_{i-1}) + c_{i-1}\frac{(x - x_{i-1})^2}{2} + d_{i-1}\frac{(x - x_{i-1})^3}{6}$$

Метод сплайнов

Для определения $4N$ неизвестных получаем систему $4N-2$ уравнений:

$$a_i = f_i \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$b_i h_i - c_i \frac{h_i^2}{2} + d_i \frac{h_i^3}{6} = f_i - f_{i-1} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$b_i - b_{i-1} = c_i h_i - \frac{d_i h_i^2}{2} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$d_i h_i = c_i - c_{i-1} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}$$

Недостающие два уравнения выводятся из дополнительных условий:

$$S''(a) = S''(b) = 0$$

Метод сплайнов

Можно показать, что при этом $c_0 = c_N = 0$

. Из системы можно исключить неизвестные $b_i \quad d_i$

, получив систему $N+1$ линейных уравнений (СЛАУ) для определения коэффициентов c_i

$$h_i c_{i-1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_{i+1}c_{i+1} = 6\left(\frac{f_{i+1} - f_i}{h_i} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_{i-1}}\right)$$

$$i = 1,2,\ldots,N-1$$

После этого вычисляются коэффициенты
b и d

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{h_i} \qquad b_i = \frac{c_i h_i}{2} - \frac{d_i h_i^2}{6} + \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \qquad i = 1,2,\ldots,N$$

Метод сплайнов

В случае постоянной сетки $h_i = h$ система уравнений упрощается:

$$4c_1 + c_2 = 6\frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{h^2}$$

$$c_{i-1} + 4c_i + c_{i+1} = 6\frac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$$

$$i = 2,3,\ldots,N-2$$

$$c_{N-2} + 4c_{N-1} + c_N = 6\frac{f_N - 2f_{N-1} + f_{N-2}}{h^2}$$

$$c_N = 0$$

Метод сплайнов

Для вычисления значения в произвольной точке отрезка необходимо решить систему уравнений на коэффициенты c_i, , затем найти все коэффициенты b_i и d_i, . Далее, необходимо определить, на какой интервал попадает эта точка, и, зная номер , вычислить значение сплайна и его производных в точке.

Метод сплайнов

$$S(z) = a_{i0} + b_{i0}(z - x_{i0}) + c_{i0}\frac{(z - x_{i0})^2}{2} + d_{i0}\frac{(z - x_{i0})^3}{6}$$

$$S'(z) = b_{i0} + c_{i0}(z - x_{i0}) + d_{i0}\frac{(z - x_{i0})^2}{2}$$

$$S''(z) = c_{i0} + d_{i0}(z - x_{i0})$$

Пример сплайн интерполяции ручной способ

Метод сплайн интерполяции

$$b1 := 6\cdot\frac{209.3 - 2\cdot 125.7 + 42.04}{10^2} = -0.004 \qquad b2 := 6\cdot\frac{355 - 2\cdot 209.3 + 125.7}{10^2} = 3.726$$

$$b3 := 6\cdot\frac{501 - 2\cdot 355 + 209.3}{10^2} = 0.018$$

$$\phi := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad в := \begin{pmatrix} 0 \\ b1 \\ b2 \\ b3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$c := \phi^{-1}\cdot в = \begin{pmatrix} 0 \\ -0.267 \\ 1.064 \\ -0.261 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad c_1 = -0.267$$

$$a1 := 125.7 \qquad h := 10$$

$$d1 := \frac{c_1 - c_0}{h} = -0.027 \qquad b1 := \frac{c_1\cdot h}{2} - \frac{d1\cdot h^2}{6} + \frac{125.7 - 42.04}{h} = 7.477$$

$$S := a1 + b1\cdot(15 - 20) + (c_1)\cdot\left[\frac{(15-20)^2}{2}\right] + (d1)\cdot\left[\frac{(15-20)^3}{6}\right] = 85.537$$

Пример сплайн интерполяции

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	15	t	h	10						
2	x_0	10	42,04							
3	x_1	20	125,7							
4	x_2	30	209,3							
5	x_3	40	355							
6	x_4	50	501							
7					матрица А				матр. В	
8				4	0	0	0	0	0	
9				0	4	1	0	0	-0,0036	
10				0	1	4	1	0	3,726	
11				0	0	1	4	1	0,018	
12				0	0	0	0	4	0	
13										
14				Обращенная матрица А					Решение A^{-1}*b	
15				0,25	0	0	0	0	0,000	
16				0	0,27	-0,1	0,02	-0	-0,267	
17				0	-0,1	0,29	-0,1	0,02	1,064	
18				0	0,02	-0,1	0,27	-0,1	-0,261	
19				0	0	0	0	0,25	0,000	
20										
21	d_1=	-0,02668								
22	b_1=	7,47671		Ответ по полиному 3-й степени:					85,53741071	
23	a_1=	125,7								
24										

Пример сплайн интерполяции MS Excel

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	15	t	h	=B3-B2					
2	x_0	10	42,04						
3	x_1	20	125,7						
4	x_2	30	209,3						
5	x_3	40	355						
6	x_4	50	501						
7						матрица А			матр. В
8				4	0	0	0	0	0
9				0	4	1	0	0	=6*(C4-2*C3+C2)/$D$1^2
10				0	1	4	1	0	=6*(C5-2*C4+C3)/$D$1^2
11				0	0	1	4	1	=6*(C6-2*C5+C4)/$D$1^2
12				0	0	0	0	4	0
13									
14					Обращенная матрица А				Решение A^{-1}*b
15				=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МУМНОЖ(D15:H19;I8:I12)
16				=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МУМНОЖ(D15:H19;I8:I12)
17				=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МУМНОЖ(D15:H19;I8:I12)
18				=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МУМНОЖ(D15:H19;I8:I12)
19				=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МОБР(A)	=МУМНОЖ(D15:H19;I8:I12)
20									
21	d_1=	=(I16-I15)/D1							
22	b_1=	=(I16*D1/2)-(B21*D1^2/6)+((C3-C2)/D1)				Ответ по полиному 3-й степени:			=B23+B22*(A1-B3)+I16*(((A1-B3)^2)/2)+B21*(((A1-B3)^3)/6)
23	a_1=	=C3							
24									

Интерполяция в MathCAD

Функции интерполяции определяют кривую, точно проходящую через заданные точки. Из-за этого результат очень чувствителен к ошибкам данных.

Кубическая сплайн-интерполяция позволяет провести кривую через набор точек таким образом, что первые и вторые производные кривой непрерывны в каждой точке. Эта кривая образуется путем создания ряда кубических полиномов, проходящих через наборы из трех смежных точек. Кубические полиномы затем состыковываются друг с другом, чтобы образовать кривую.

MathCAD поставляется с тремя сплайн-функциями:

cspline(vx,vy) – генерирует кривую сплайна, которая может быть кубическим полиномом в граничных точках;

pspline(vx,vy) – генерирует кривую сплайна, которая приближается к параболе в граничных точках;

lspline(vx,vy) – генерирует кривую сплайна, которая приближается к прямой в граничных точках.

Интерполяция в MathCAD

$$Ëàíöùå := \begin{pmatrix} 10 & 42.04 \\ 20 & 125.7 \\ 30 & 209.3 \\ 40 & 355 \end{pmatrix} \qquad x := 10, 15 .. 40 \qquad t := Ëàíöùå^{\langle 0 \rangle} \qquad h := Ëàíöùå^{\langle 1 \rangle}$$

$Sp\_ls := lspline(t, h)$

$Sp\_lspline(x) := interp(Sp\_ls, t, h, x)$

$Sp\_lspline(x) =$

42.04
85.428
125.7
162.847
209.3
275.938
355

$Sp\_ps := pspline(t, h)$

$Sp\_pspline(x) := interp(Sp\_ps, t, h, x)$

$Sp\_pspline(x) =$

42.04
85.82
125.7
163.623
209.3
272.445
355

$Sp\_cs := cspline(t, h)$

$Sp\_cspline(x) := interp(Sp\_cs, t, h, x)$

$Sp\_cspline(x) =$

42.04
87.762
125.7
163.623
209.3
270.502
355