СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ СИГНАЛОВ

Лекция №5

к.т.н., доцент кафедры, Томин Н.В.

История анализа сигналов

В 19 веке, французский математик Жан Батист Жозеф Фурье показал, что любую функцию, удовлетворяющую некоторым условиям (непрерывность во времени, периодичность, удовлетворение условиям Дирихле) можно разложить в ряд, который в дальнейшем получил его имя — ряд Фурье.

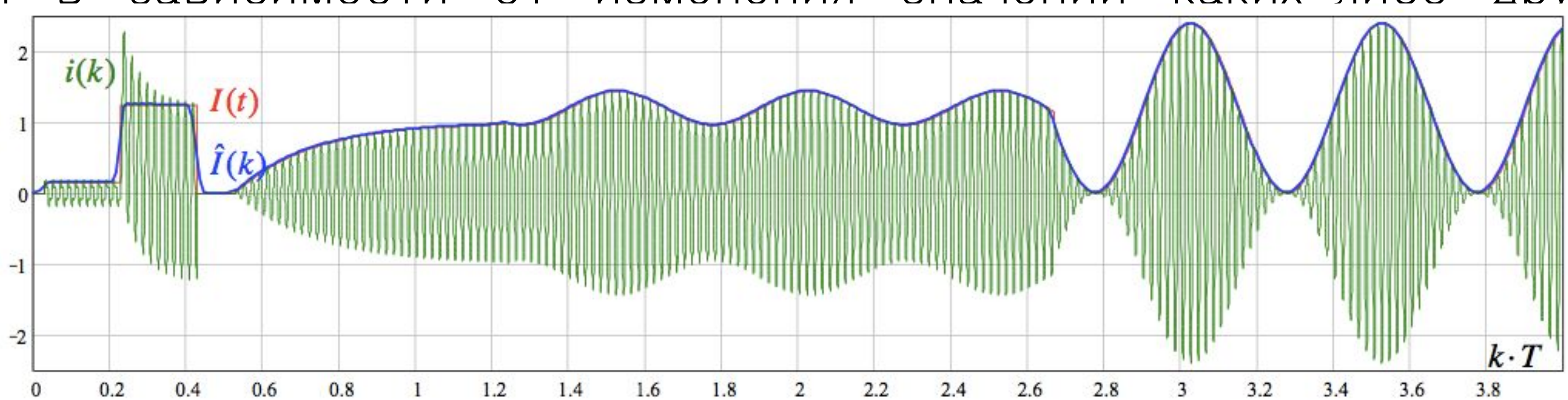
В инженерной практике разложение периодических функций в ряд Фурье широко используется, например, в задачах теории цепей: несинусоидальное входное воздействие раскладывают на сумму синусоидальных и рассчитывают необходимые параметры цепей, например, по методу наложения.

Жан Батиист Жозеф Фурье, французкий математик и физик

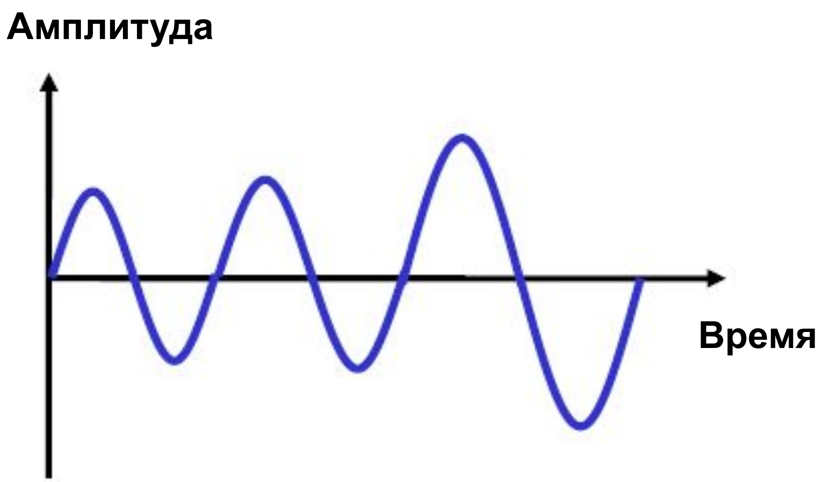
Основные понятия о сигнале

В технических отраслях знаний термин **<u>"сигнал"</u>** (signal, от латинского signum – знак) используется в широком смысловом диапазоне.

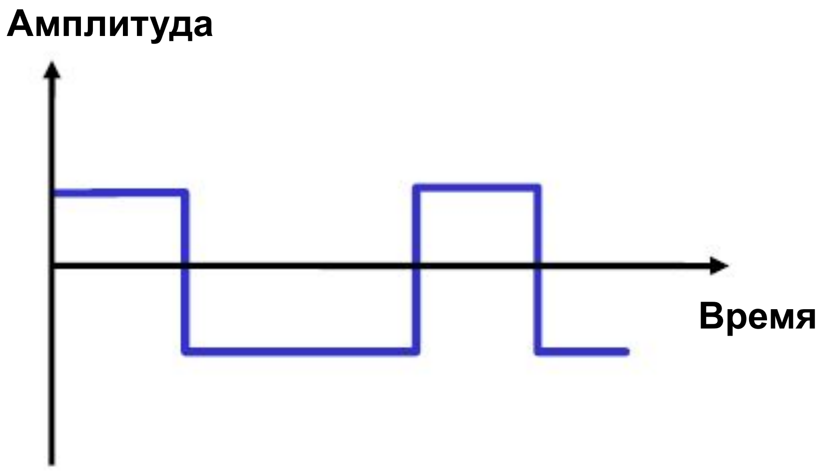
Под ним понимают и техническое средство для передачи, обращения и использования информации – электрический, магнитный, оптический сигнал; и физический процесс, отображающий информационное сообщение – изменение какого-либо параметра носителя информации (электромагнитных колебаний, светового потока и т.п.) во времени, в пространстве или в зависимости от изменения значений каких-либо других арг



Основные понятия о сигнале



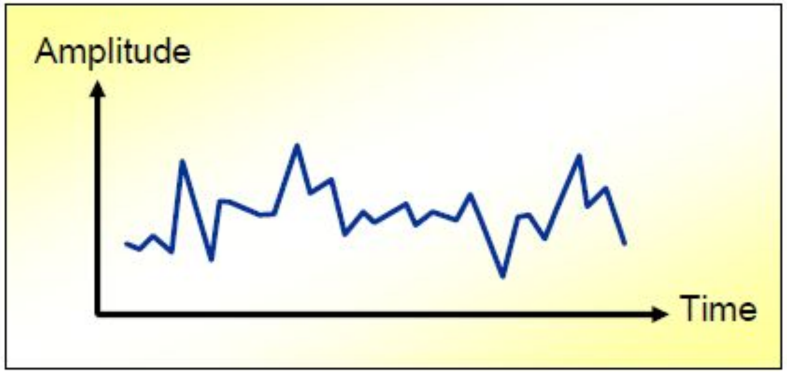
Аналоговый сигнал



Цифровой сигнал

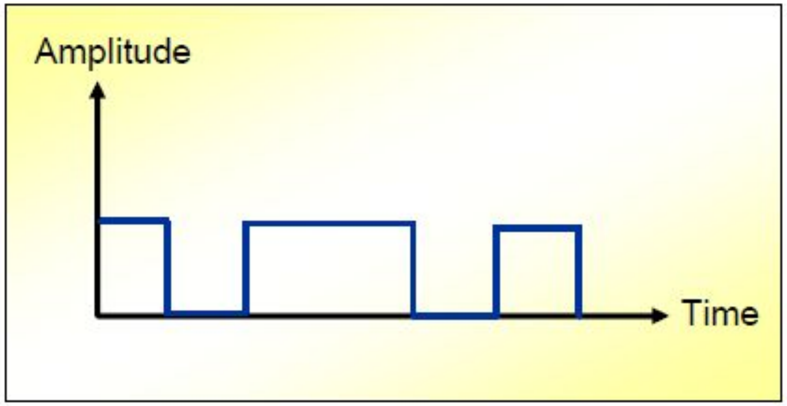
Основные понятия о сигнале

Временное представление



Непрерывный сигнал

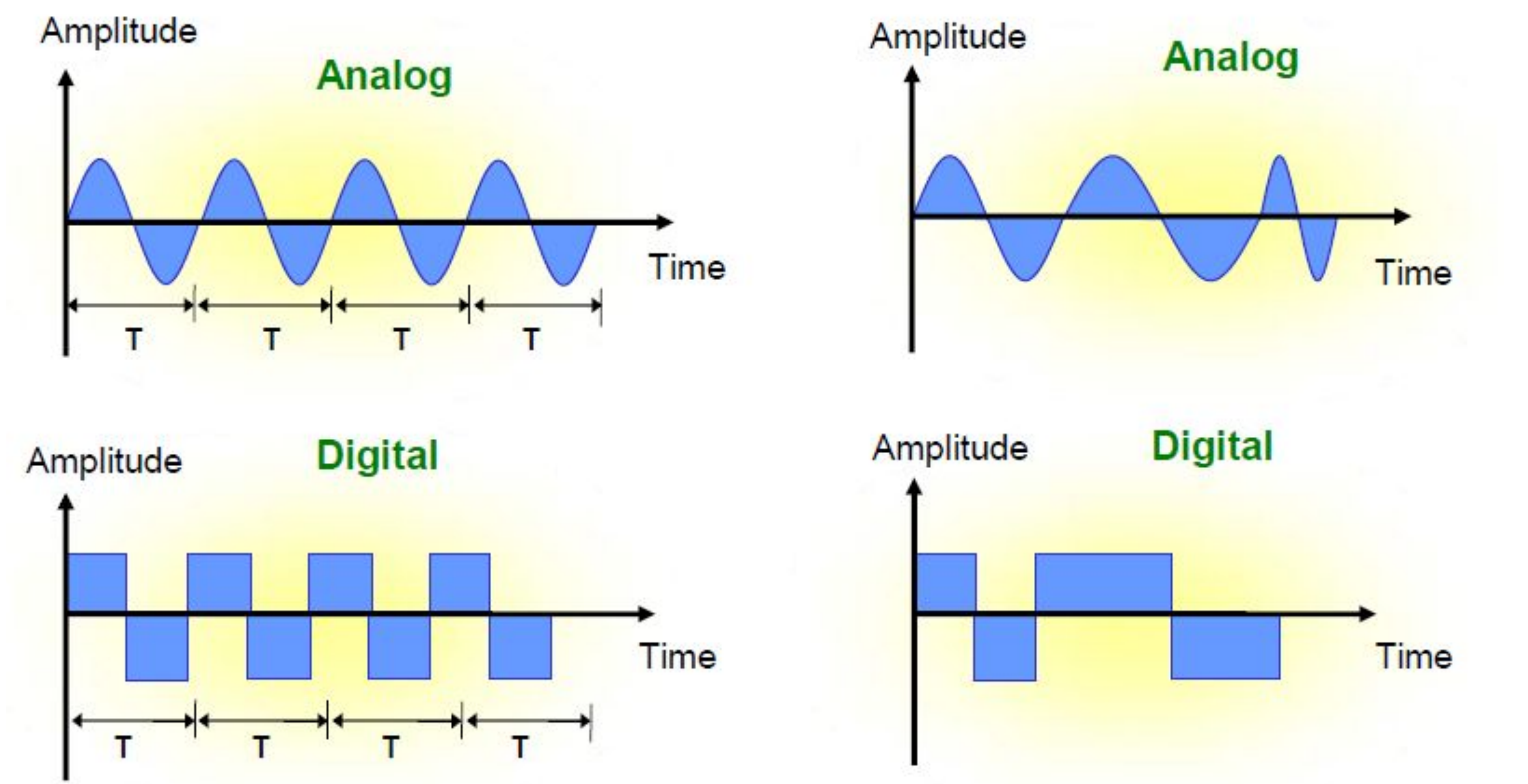
$$\lim s(t) = s(a)$$



Дискретный сигнал

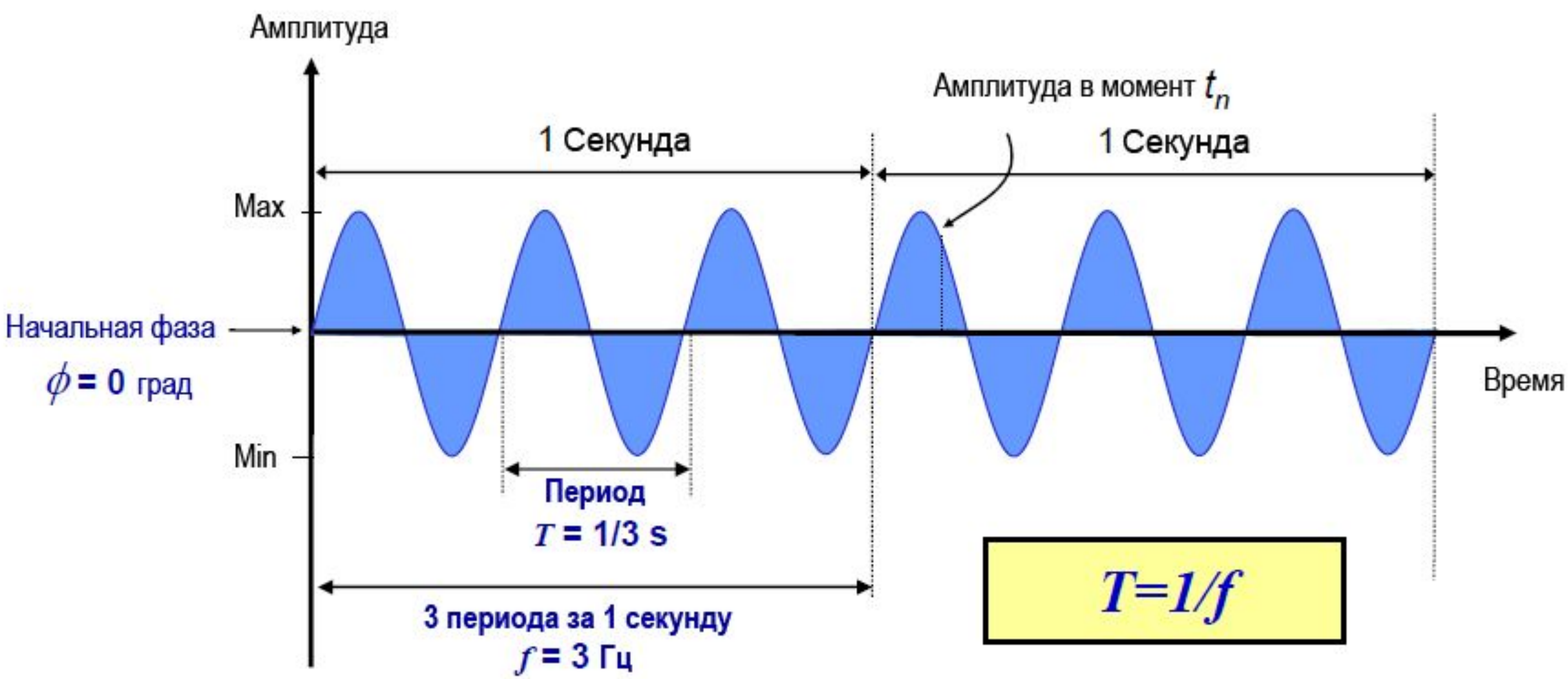
Основные понятия о сигнале

Периодические и апериодические сигналы



Основные понятия о сигнале

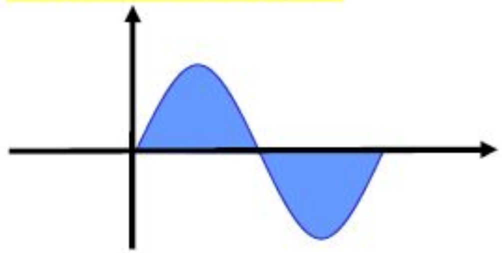
Компоненты сигнала



- **Амплитуда –** уровень или мощность сигнала
- **Частота –** период повторения сигнала
- **Фаза –** положение сигнала относительно нуля

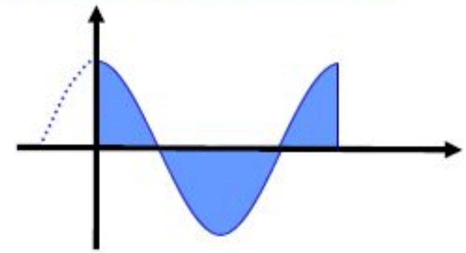
Основные понятия о сигнале

$s(t) = sin(2\pi ft)$



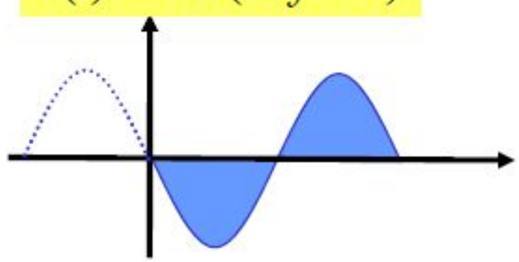
0 градусов

$s(t) = sin(2\pi ft + \pi/2)$



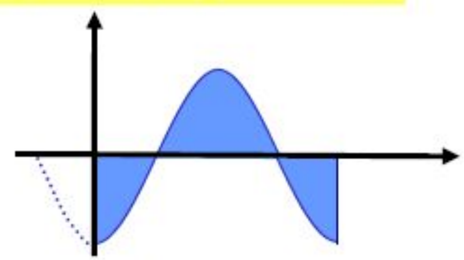
90 градусов

$s(t) = sin(2\pi ft + \pi)$



180 градусов

$s(t) = sin(2\pi ft + 3\pi/2)$

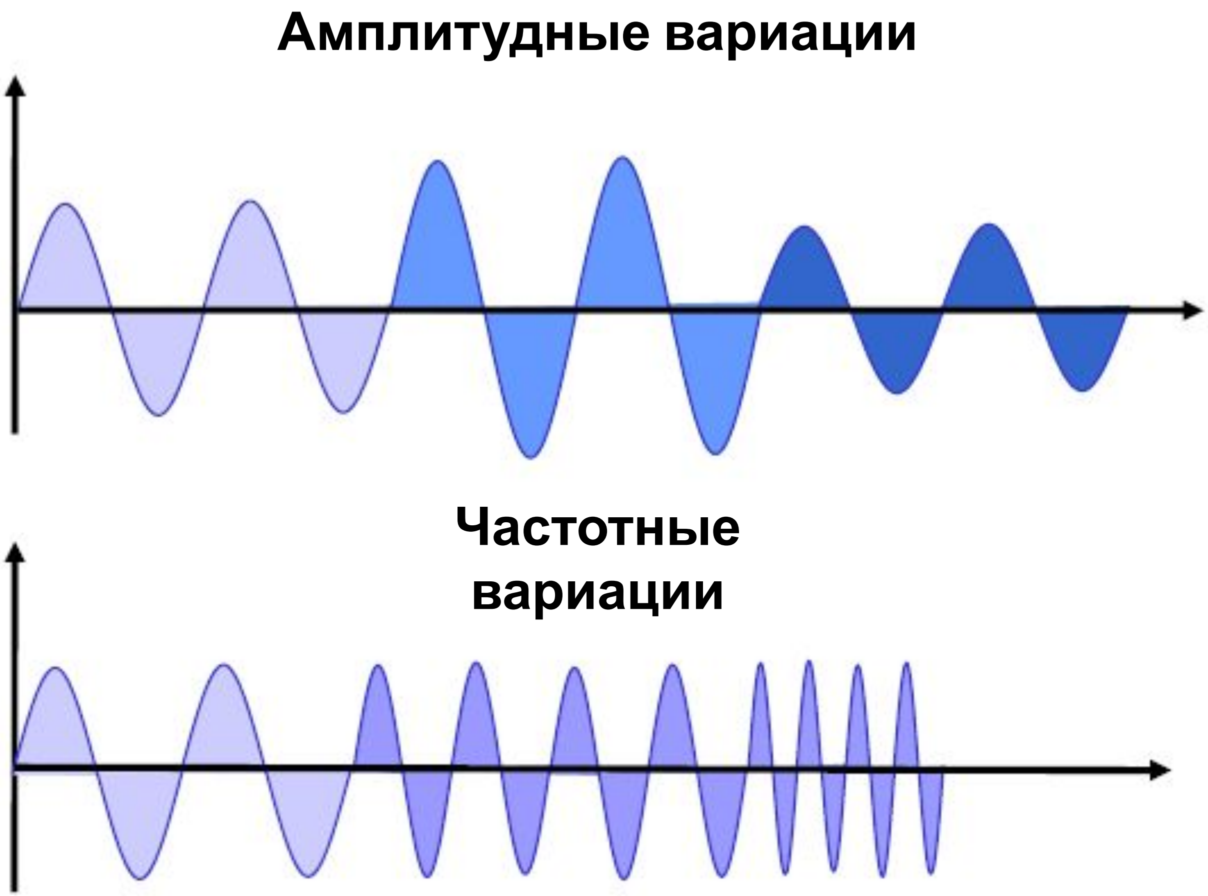


270 градусов

Фазовый сдвиг

Основные понятия о сигнале

Вариации амплитуды и частоты

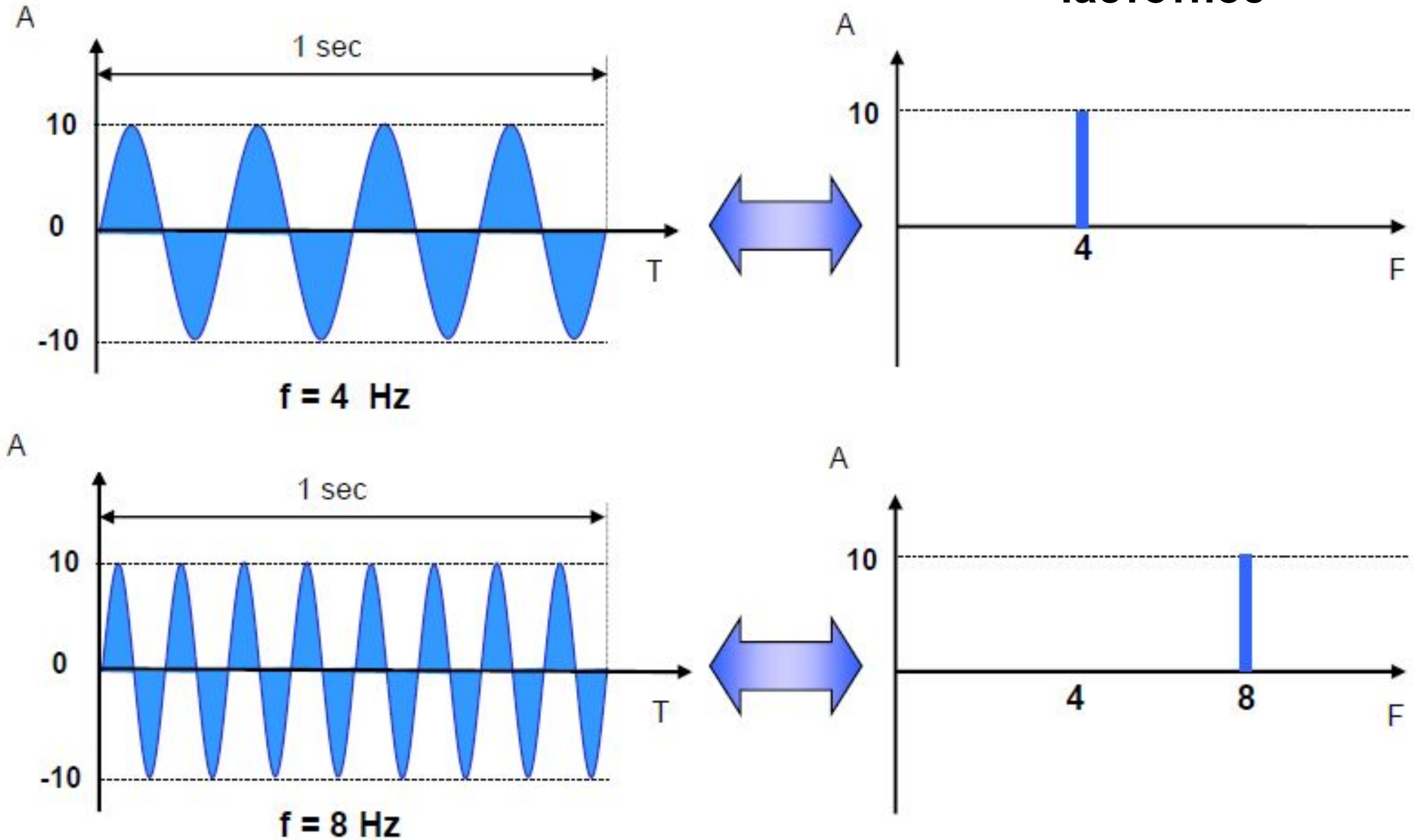


Основные понятия о сигнале

Представления сигнала

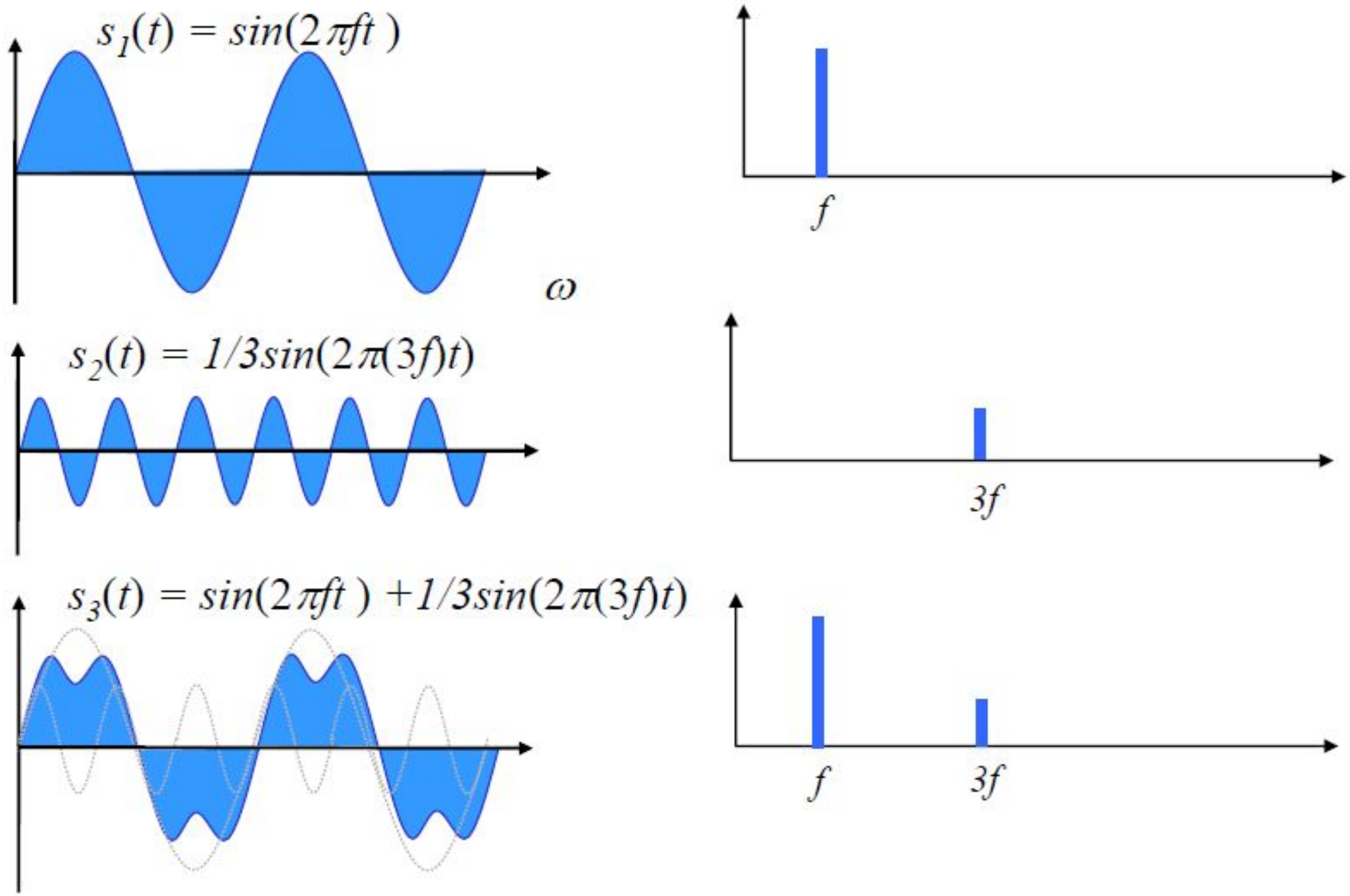
Временное

Частотное



Основные понятия о сигнале

Частотные составляющие



Основные понятия о сигнале

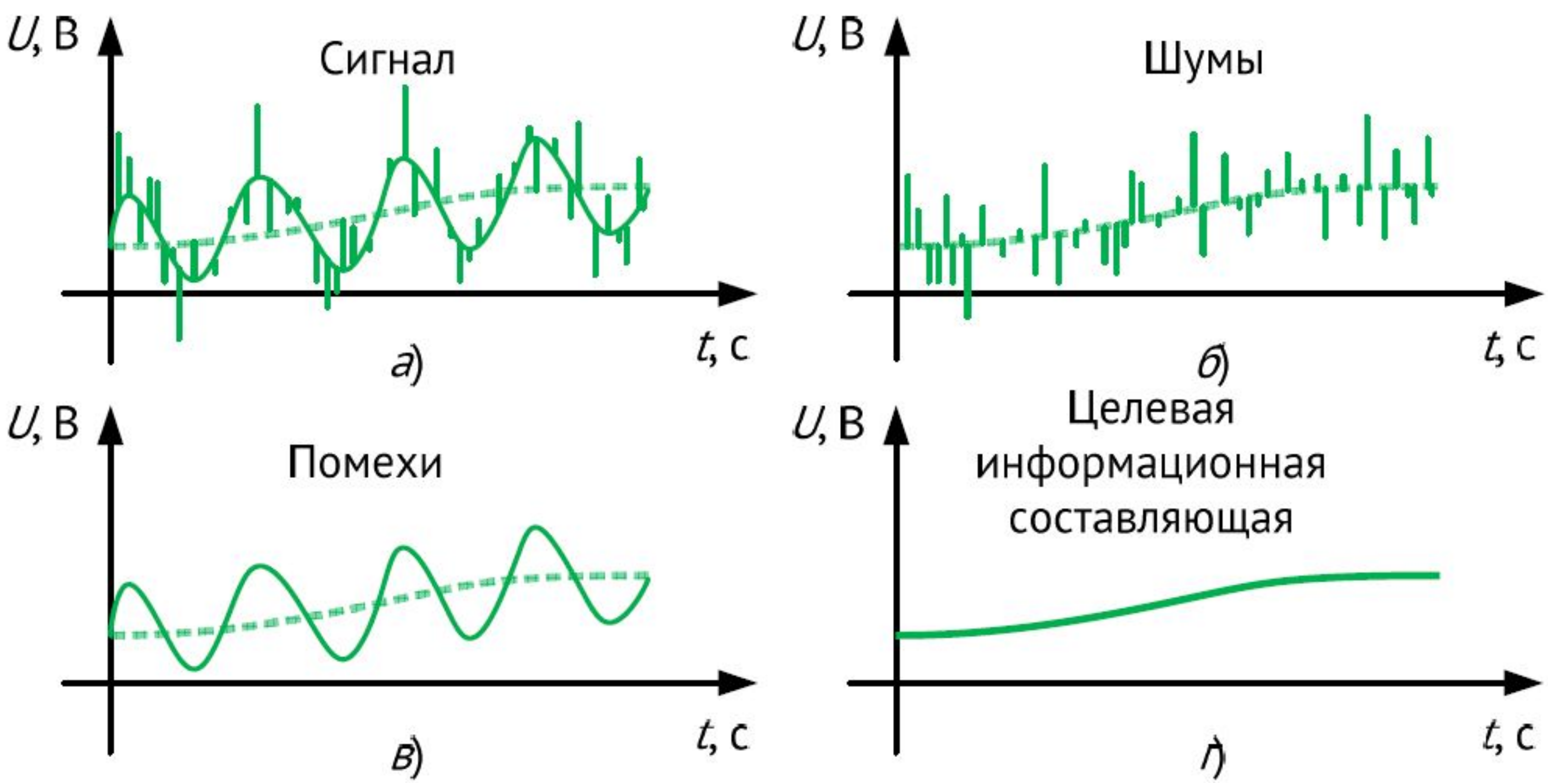
Под "анализом" сигналов имеется в виду **не только их чисто математические преобразования**, но и <u>получение на основе этих преобразований выводов о специфических особенностях соответствующих процессов и объектов</u>.

Целями анализа сигналов обычно являются:

- определение или оценка числовых параметров сигналов (энергия, средняя мощность, среднее квадратическое значение и пр.).
- изучение изменения параметров сигналов во времени.
- разложение сигналов на элементарные составляющие для сравнения свойств различных сигналов.
- сравнение степени близости, "похожести", "родственности“ различных сигналов, в том числе с определенными количественными оценками.

Основные понятия о сигнале

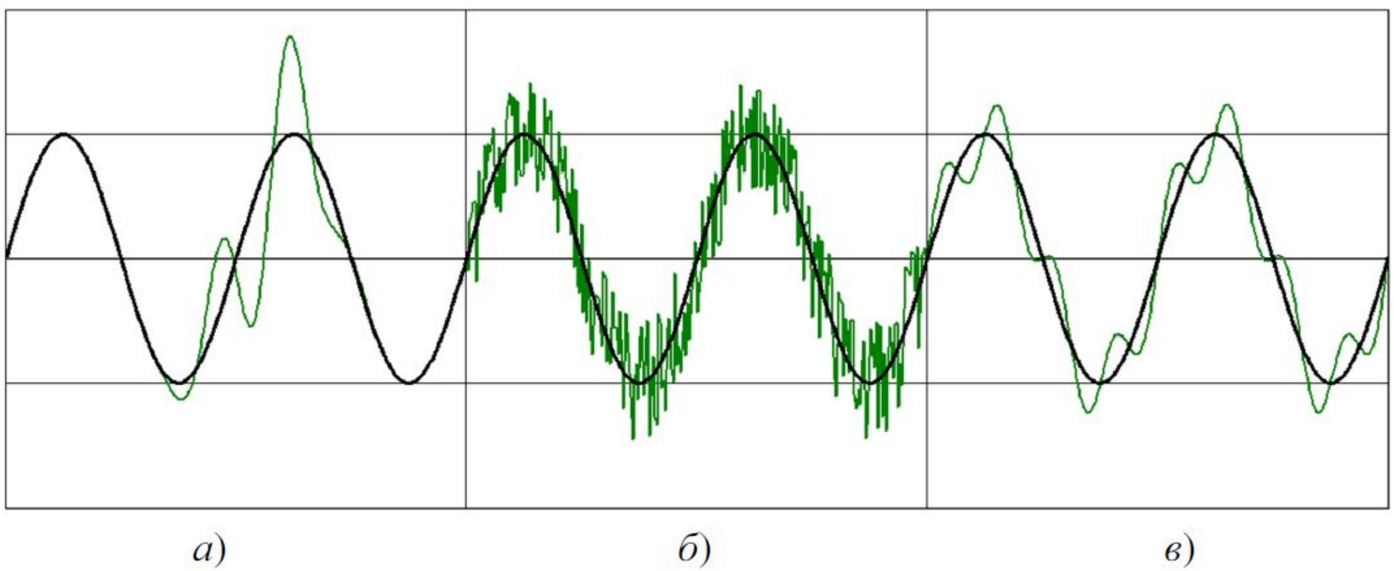
При детектировании сигналов, несущих целевую информацию (г), в сумме с основным сигналом регистрируются и мешающие сигналы – шумы и помехи (а). Шумы, обычно, имеют случайный характер (б). К помехам относят стационарные искажения полезных сигналов при влиянии различных факторов (наводки, вибрация, и пр.) (в).



Основные понятия о сигнале

Шумы бывают **<u>внутренние</u>** (к примеру, тепловые шумы электронных потоков в электрических цепях) и **<u>внешние</u>** (молнии, магнитные поля, вспышки на солнце и пр.).

Помехи подразделяются на флуктуационные, импульсные и периодические

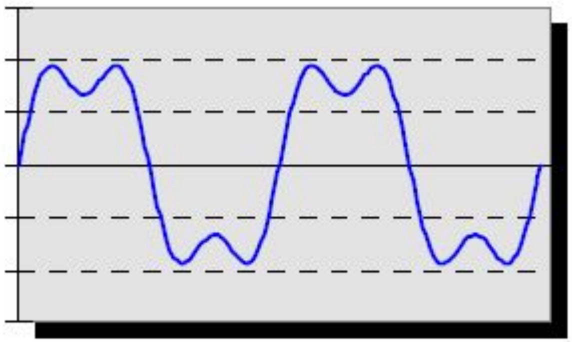


Детектируемый сигнал, содержащий:
а) флуктуационные, б) импульсные, в) периодические помехи

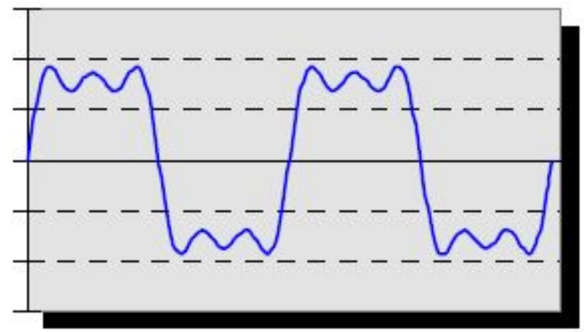
Основные понятия о сигнале

Гармоники

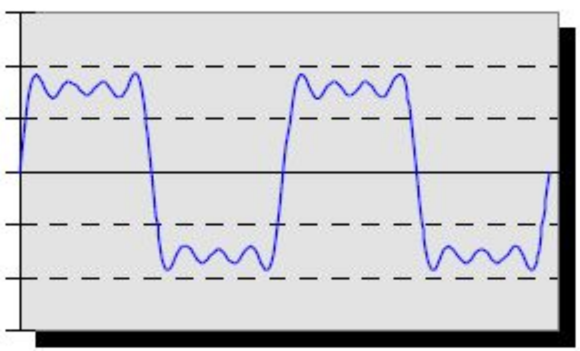
$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n2\pi t/T)] + b_n \sin(n2\pi t/T)]$$



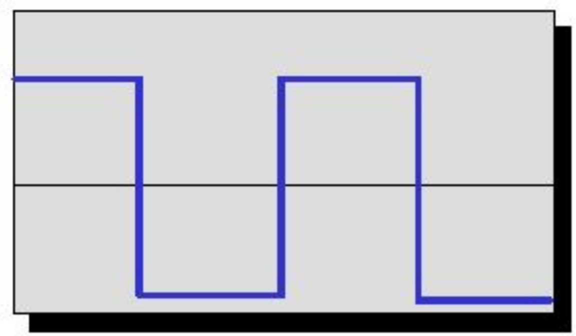
1 и 3 гармоники



1, 3 и 5 гармоники



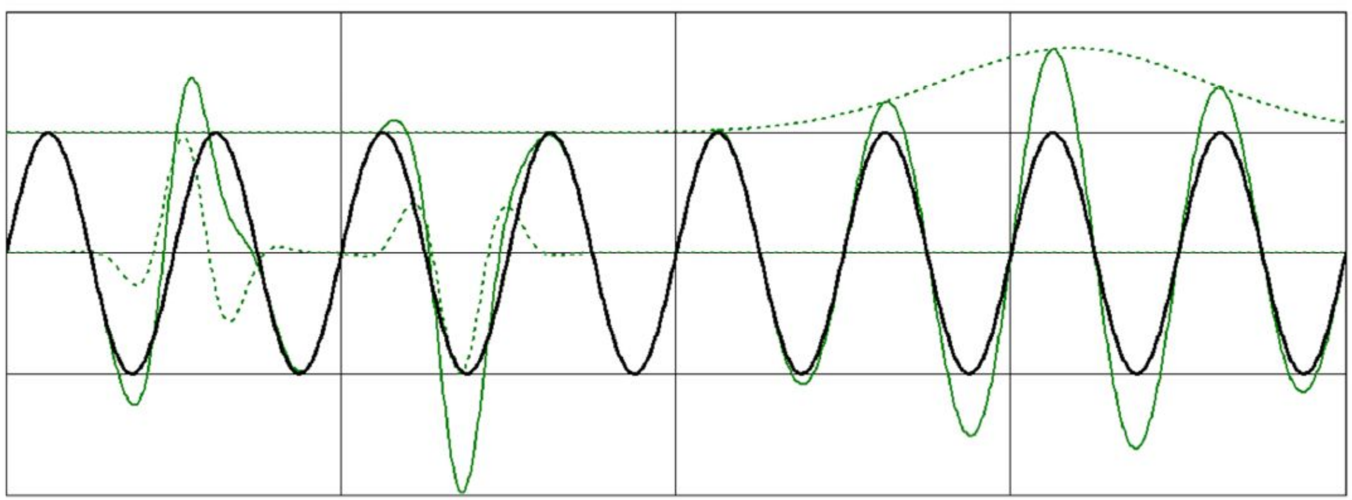
1, 3, 5 и 7 гармоники



бесконечное число гармоник

Основные понятия о сигнале

В зависимости от характера воздействия на сигнал помехи разделяют на аддитивные и мультипликативные. Аддитивные (налагающиеся) помехи суммируются с сигналом, не зависят от его значений и формы и не изменяют информативной составляющей самого сигнала. Мультипликативные (деформирующие) помехи могут изменять форму информационной части сигнала, иметь зависимость от его значен



а) б)

Детектируемый сигнал, содержащий:
а) аддитивные, б) мультипликативные помехи

Основные понятия о сигнале

Выделение полезных составляющих из общей суммы зарегистрированных сигналов или максимальное подавление шумов и помех в информационном сигнале при сохранении его полезных составляющих является одной из основных задач первичной обработки результатов наблюдений.

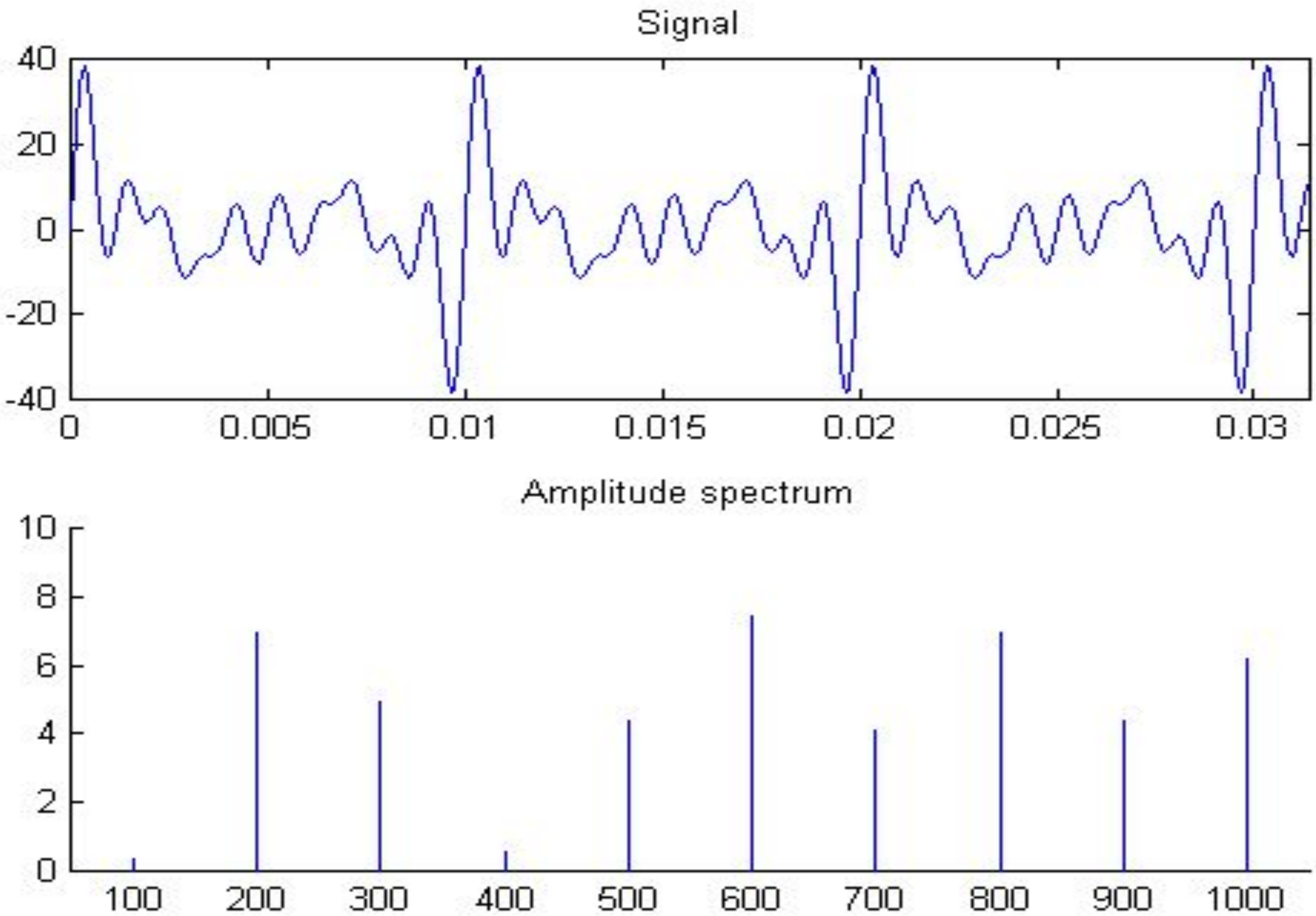
Теорема Фурье

Всякое периодическое колебание частоты *F* можно получить в результате суммирования бесконечного числа гармоник с частотами *F, 2F, 3F, 4F, ⋯,* и **специально подобранными** амплитудами и фазами

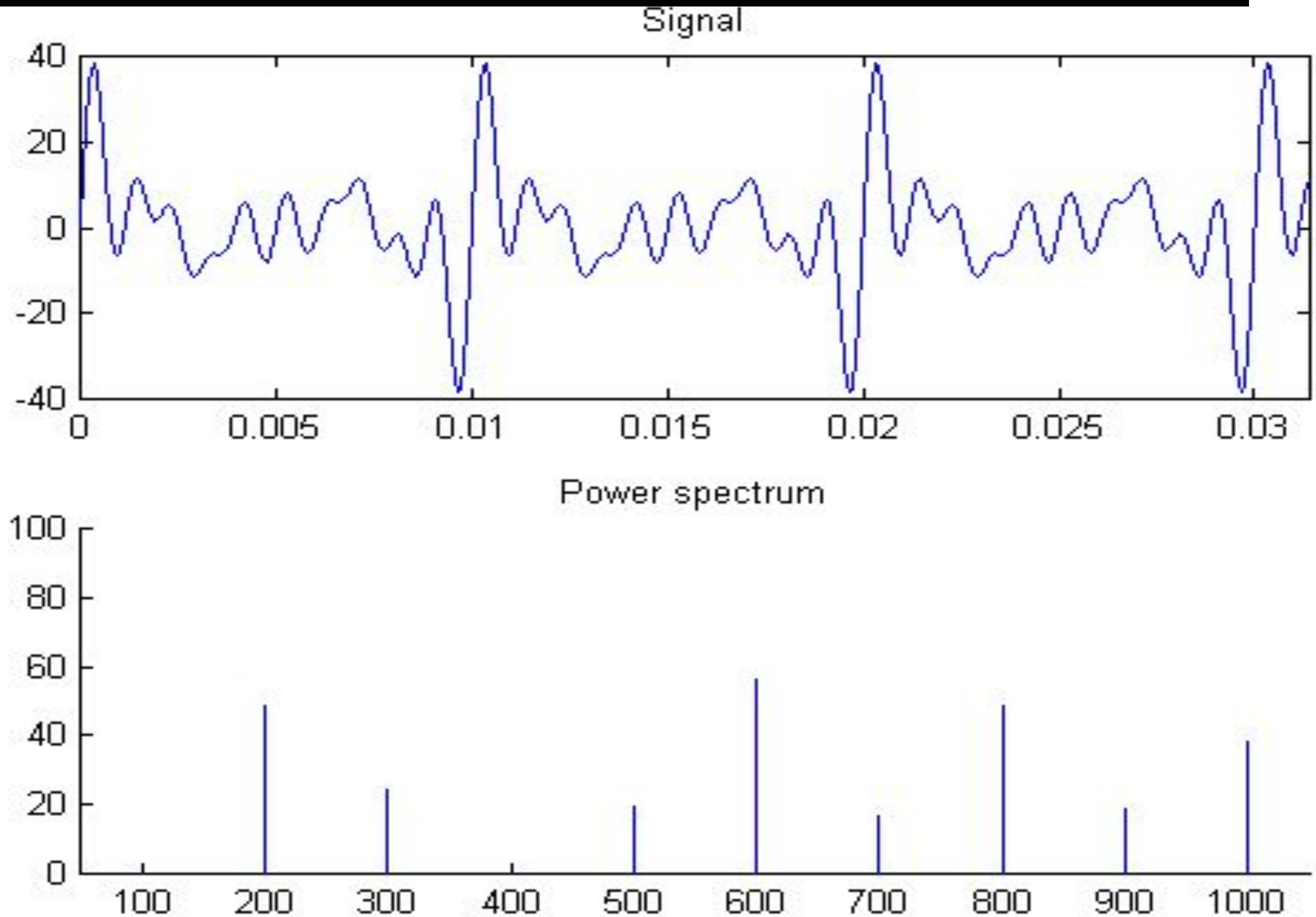
x(t) = A$_0$ *+ A*$_1$*sin(2πFt + ϕ*$_1$*) + A*$_2$*sin(2π2Ft + ϕ*$_2$*) + A*$_3$*sin(2π3Ft + ϕ*$_3$*) + ... (и т.д.) ИЛИ*

$$x(t) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(2\pi kFt + \varphi_k)$$

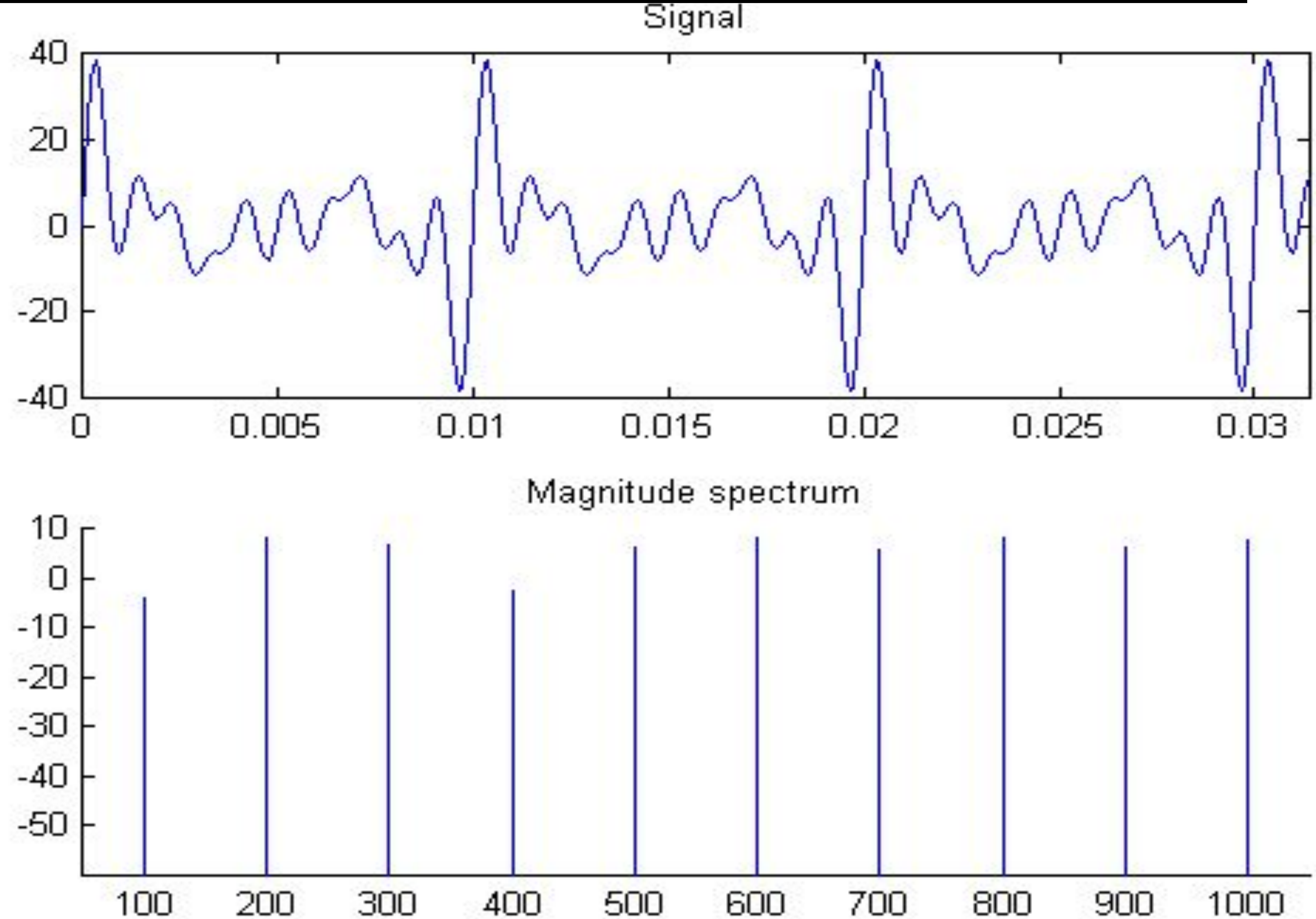
Амплитудно-частотный спектр



Спектр мощности



Логарифмический спектр



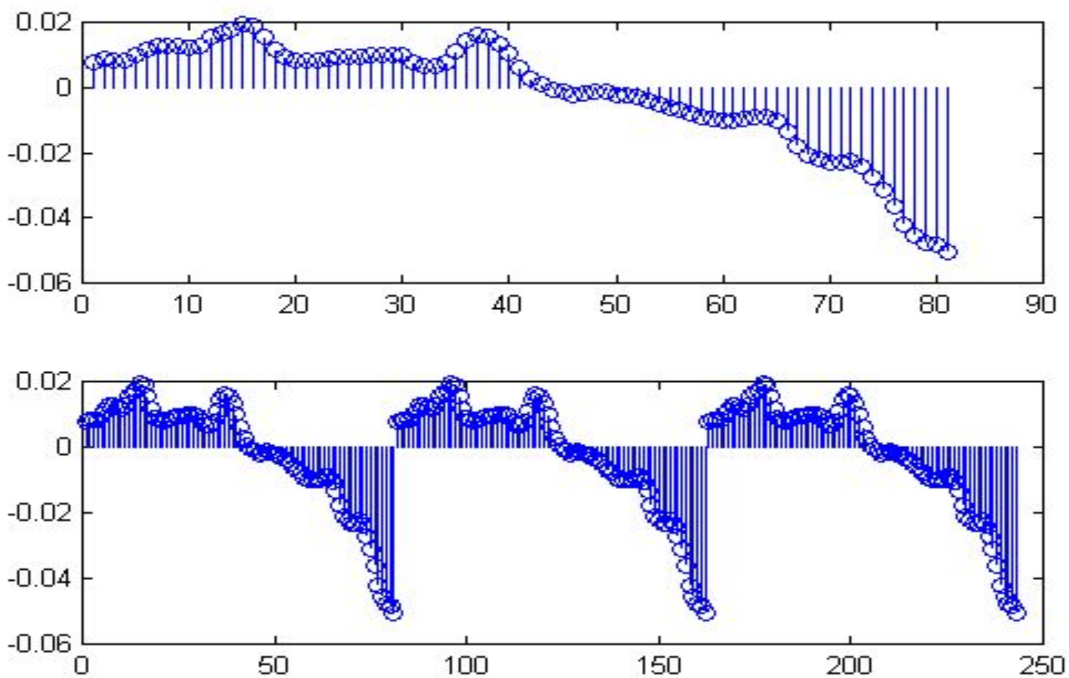
Преобразование Фурье

Цифровая обработка сигналов заключается в том, что напряжение, ток, или любой другой физический сигнал преобразовываются в последовательность чисел, которая способна подвергаться математическим преобразованиям в вычислительном устройстве. Трансформированный цифровой сигнал, т. е. эту числовую последовательность при необходимости можно преобразовать обратно в напряжение или ток.

Первоначальный сигнал, предположим напряжение, является непрерывной зависимостью от времени. Подобный сигнал, определенный в каждый момент времени, называют **аналоговым**. А представляющая этот сигнал последовательность чисел, в данной обработке, называется **дискретным рядом**.

Преобразование Фурье

С точки зрения спектрального анализа дискретных сигналов, ЛЮБОЙ дискретный сигнал считается **<u>периодически продолженным</u>**. Поэтому любой сигнал (вне зависимости от того, является ли он физически периодически или нет) рассматривается как **<u>периодически продолженный</u>** (= периодический).



Теорема Фурье

- Раз любой дискретный сигнал рассматривается как периодический (с периодом ***T***, равным длительности сигнала), то к нему можно применить теорему Фурье
- Следовательно, любой дискретный сигнал может быть представлен как сумма гармоник с частотами ***(1/T), (2/T), (3/T), (4/T)*** и т.д.

<u>Пример</u>

Пусть длительность T анализируемого сигнала = 20 миллисекунд (0.02 секунд). Тогда сигнал может быть представлен в виде суммы гармоник с частотами 50 Гц (1 / 0.02), 100 Гц (2 / 0.02), и т.д.

Дискретное преобразование Фурье

- **Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) (Discrete Fourier Transform, DFT)** – результат применения теоремы Фурье к дискретному сигналу
- ДПФ позволяет вычислить спектр сигнала по самому сигналу
- **Обратное дискретное преобразование Фурье (ОДПФ) (Inverse Discrete Fourier Transform, IDFT)** позволяет вычислить сигнал по его спектру
- При работе с данными дискретными последовательностями зачастую оперируют **номерами отсчетов и спектральных гармоник сигналов** не привязывая их к действительному масштабу частоты и времени.

Прямое ДПФ

- Прямое дискретное преобразование Фурье позволяет получить для цифрового сигнала *x(n)*, период которого задан *N* точками, *N* значений спектральной характеристики, расположенных равномерно в полосе от 0 до *fS* с шагом *2π/N* или *fS/N*.
- Математическая запись преобразования Фурье:

$$X(k) \equiv X(\omega_k) \equiv X(\frac{2\pi k}{N})$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j(2\pi/N)kn}, k = 0,1,\ldots, N-1$$

- Сигнал x(n) определен только в диапазоне от 0 до

Прямое ДПФ

- Для двух крайних точек в спектре сигнала X(0) и X(N/2) легко определить их значения:

$$X(0)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)$$

и

$$X(N/2)=\sum_{n=0}^{N-1}e^{-j\pi n}x(n)=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n x(n)$$

- В обобщенном виде формула для прямого ДПФ записывается:

$$X(k)=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn},k=0,1,\ldots,N-1$$

- Базовая комплексная функция или коэффициент преобразования Фурье записывается следующим образом:

$$W_N^{kn}=e^{-j(\frac{2\pi}{N})kn}=\cos(\frac{2\pi kn}{N})-j\sin(\frac{2\pi kn}{N}),$$

$$0\le k,n\le N-1$$

Обратное ДПФ

– **Обратное преобразование Фурье** позволяет восстановить сигнал x(n) во временной области по его спектру X(k). Математическая запись обратного преобразования Фурье следующая:

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j(2\pi/N)kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-kn},$$

$$n = 0,1,\ldots, N-1$$

Свойства ДПФ

Свойство 1

– Если длина сигнала в отсчетах = N, то количество гармоник в Фурье-разложении также будет N (а не бесконечное число, как для непрерывных сигналов)

– Соответствующий спектр Фурье также будет иметь N спектральных линий

Свойства ДПФ

Пример

- Пусть частота дискретизации сигнала 16 кГц, длительность сигнала в отсчетах = 160 отсчетов (10 миллисекунд). Тогда общее количество гармоник ДПФ-разложения = 160
- Частота самой нижней гармоники будет равна 1 / 0.01 = 100 Гц
- Частота самой высокой гармоники будет равна 160 / 0.01 = 16 кГц
- Разрешение между соседними гармониками по частоте = разности между частотами соседних гармоник = 100 Гц

Свойства ДПФ

Свойство 2

– Если частота дискретизации сигнала = *Fs*, то частота самой высокой гармоники в ДПФ-разложении равна частоте дискретизации *Fs*

– Если длительность сигнала (в секундах) = T , то разрешение по частоте равно 1/T

Свойства ДПФ

Скорость вычисления спектра

– Если длина сигнала в отсчетах = N, то общее количество операций, необходимых для вычисления спектра, примерно равно N^2

– Например, если длина сигнала = 256 отсчетов, для вычисления спектра необходимо совершить 65536 операций

– <u>Нельзя ли сократить число операций?</u>

Быстрое преобразование Фурье

- **Быстрое преобразование Фурье (БПФ) (Fast Fourier Transform, FFT)** – способ «быстрого» вычисления ДПФ за счет одного математического трюка
- **Обратное быстрое преобразование Фурье (ОБПФ) (Inverse Fast Fourier Transform, IFFT) –** способ «быстрого» вычисления ОДПФ за счет одного <u>математического трюка</u>
- Общее количество операций в БПФ – примерно $N \log_2 N$
- Например, для 256 отсчетов имеем количество операций 2048 операций (вместо 65536 для ДПФ)

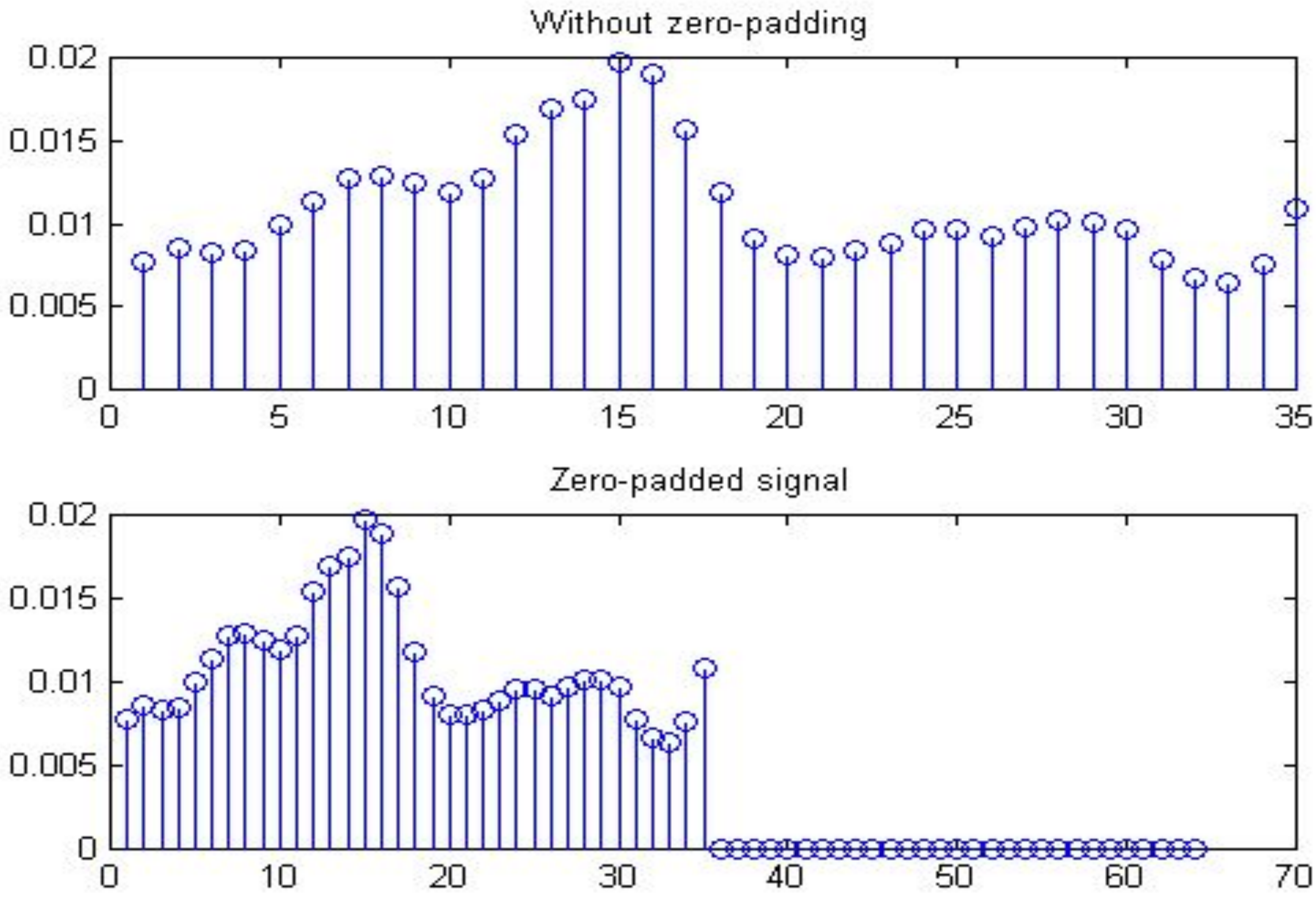
В чём трюк?

- Если длина сигнала в отсчетах есть степень двойки (например, 256 отсчетов = 2^8, 512 отсчетов = 2^9), то количество операций можно существенно сократить
- Для эффективного использования БПФ длина сигнала в отсчетах должна быть 64 или 128 или 256 или 512 или 1024 или 2048 и т.д.

- <u>Как этого добиться в действительности?</u>

Быстрое преобразование Фурье

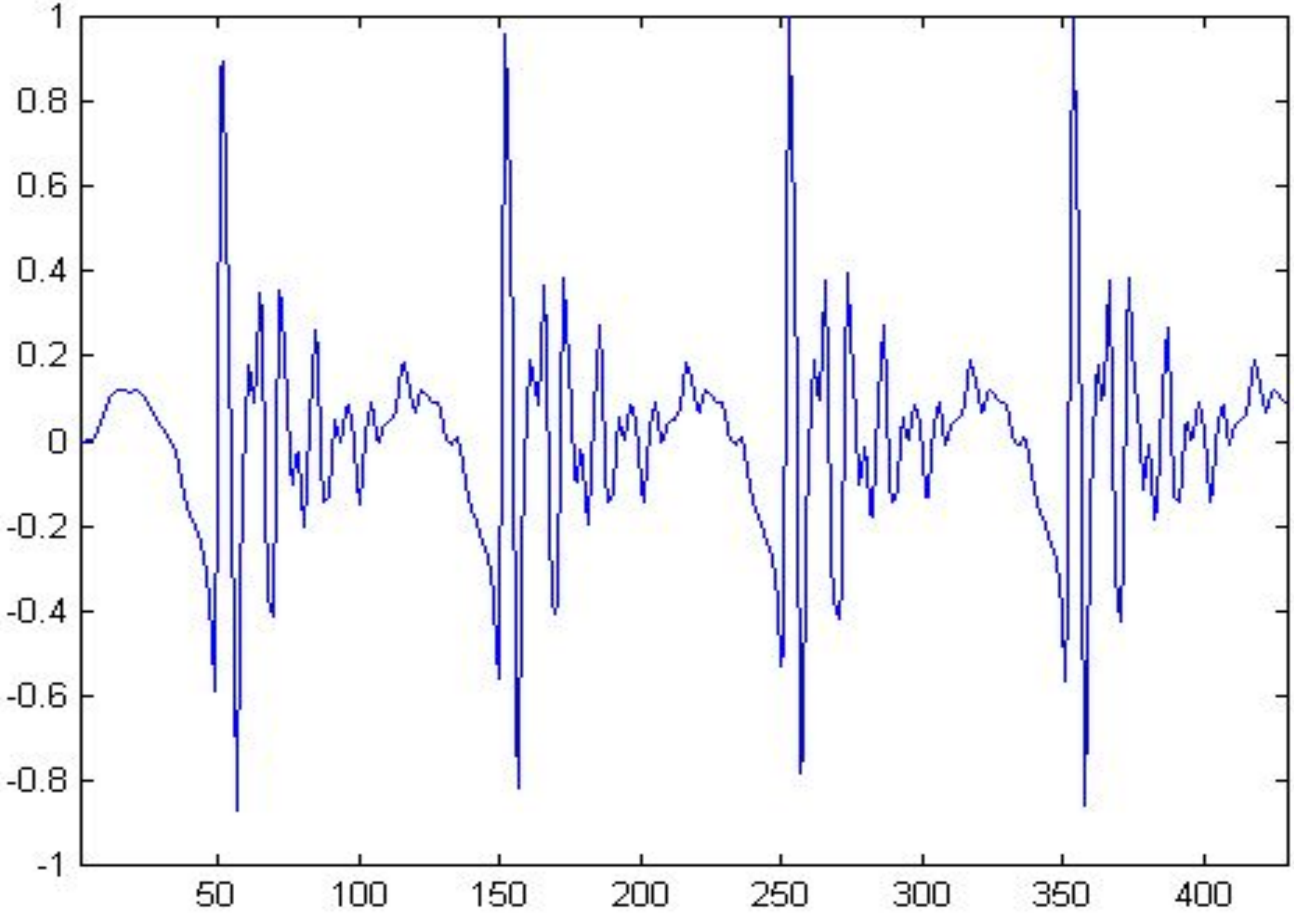
Дополнение нулями (zero-padding)



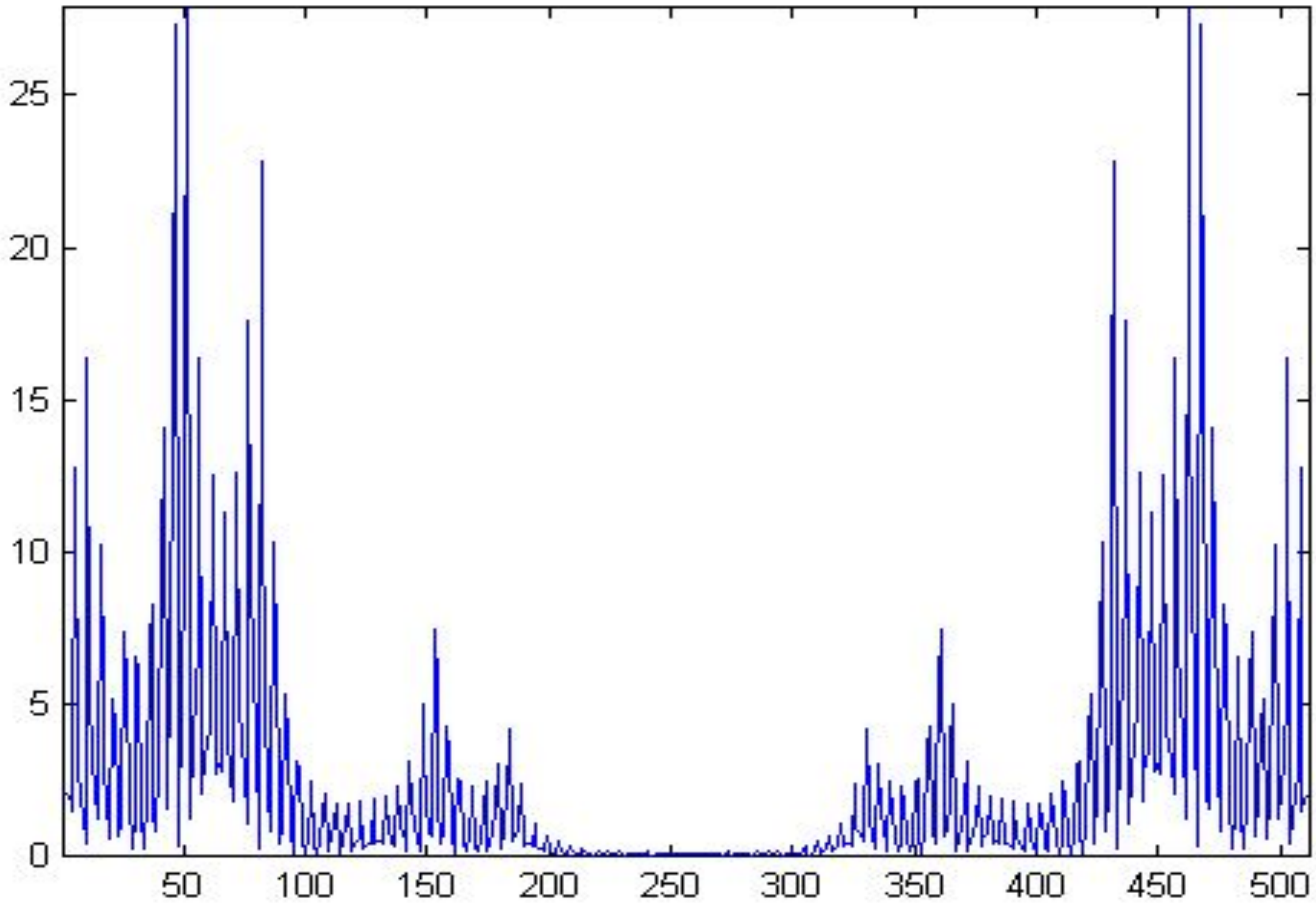
MATLAB

- ***Y = fft(x)*** - без дополнения нулями (может вычислять ОЧЕНЬ медленно, если длина сигнала ***x*** в отсчетах не равна степени двойки)
- ***Y = fft(x, N)*** – с дополнением нулями до ***N*** (где ***N*** – число, равное степени двойки, и большее, чем исходная длина сигнала ***x*** в отсчетах)
- ***X = ifft(Y)*** – ОБПФ

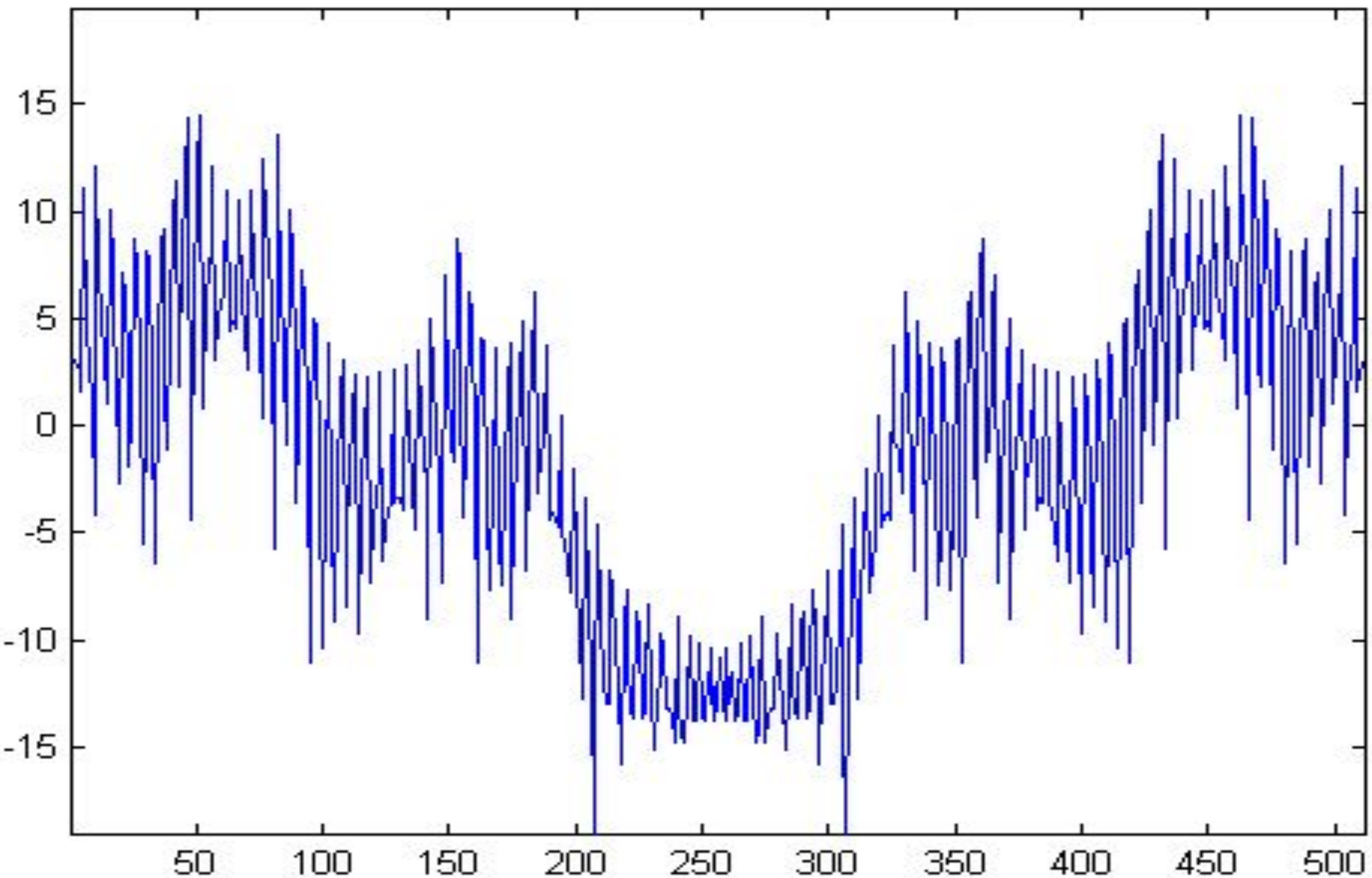
Пример



512-БПФ (амплитудный спектр)



512-БПФ (логарифмический спектр)



Пример

- Жилой массив. В каждой квартире постоянно включаются или отключаются, причём в разное время, отдельные электроприёмники. Рассмотрим нестационарный сигнал и проведем для него преобразование Фурье.