Лекция 6. Механические колебания

1. Гармонические колебания и их характерис-
тики.
2. Метод вращающегося вектора амплитуды.
3. Гармонический осциллятор. Пружинный,
физический и математический маятники.
4. Превращение энергии при свободных меха-
нических колебаниях.
5. Затухающие колебания
6. Вынужденные колебания. Резонанс.
7. Сложение гармонических колебаний одного
направления и частоты.

Гармонические колебания и их характеристики

Наряду с поступательным и вращательным движениями тел в механике значительный интерес представляет и ***колебательное*** движение.

Механическими колебаниями называются повторяющиеся во времени изменения физической величины, описывающей механическое движение тела (координата, угол отклонения, скорость, ускорение, сила, кинетическая и потенциальная энергия и т. п.).

Колебания называются ***периодическими***, если значения физических величин, изменяющихся в процессе колебаний, повторяются через равные промежутки времени, которые называются ***периодом колебания.***

Простейшим типом периодических колебаний являются ***гармонические колебания***, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса или косинуса:

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

где x – ***координата*** колеблющейся около положения равновесия вдоль оси Ox точки,

A – ***амплитуда колебаний*** – максимальное смещение (x_m) колеблющейся величины от положения равновесия,

ω_0 – ***циклическая частота колебаний***,

t – ***время***, φ – ***начальная фаза колебаний***.

Периодически изменяющийся аргумент косинуса $(\omega_0 t + \varphi)$ называется ***фазой колебания.***

За один период фаза колебания получает приращение равное 2π, т. е.

$$\omega_0(t+T)+\varphi=(\omega_0 t+\varphi)+2\pi,$$

откуда

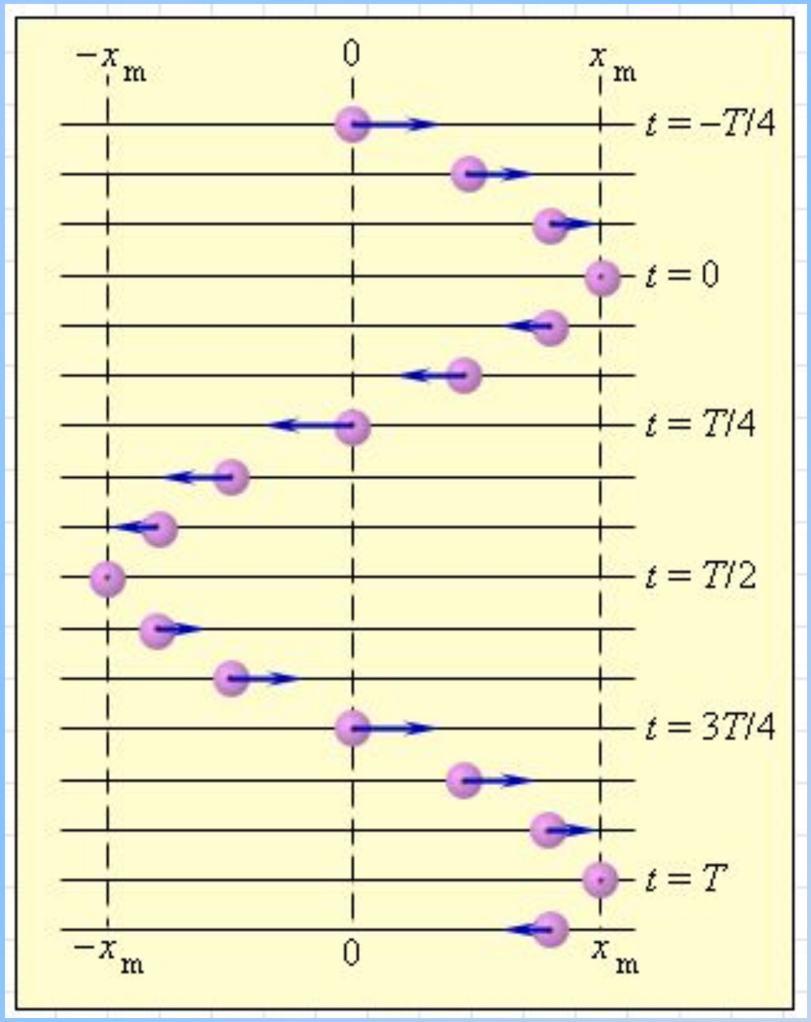
$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega_0}.}$$

Величина, обратная периоду колебаний $\boxed{\nu=\frac{1}{T}}$ называется ***частотой колебаний***.

Частота колебаний измеряется в **герцах** (Гц) и равна числу колебаний за 1с.

Частота колебаний связана с циклической частотой соотношением:

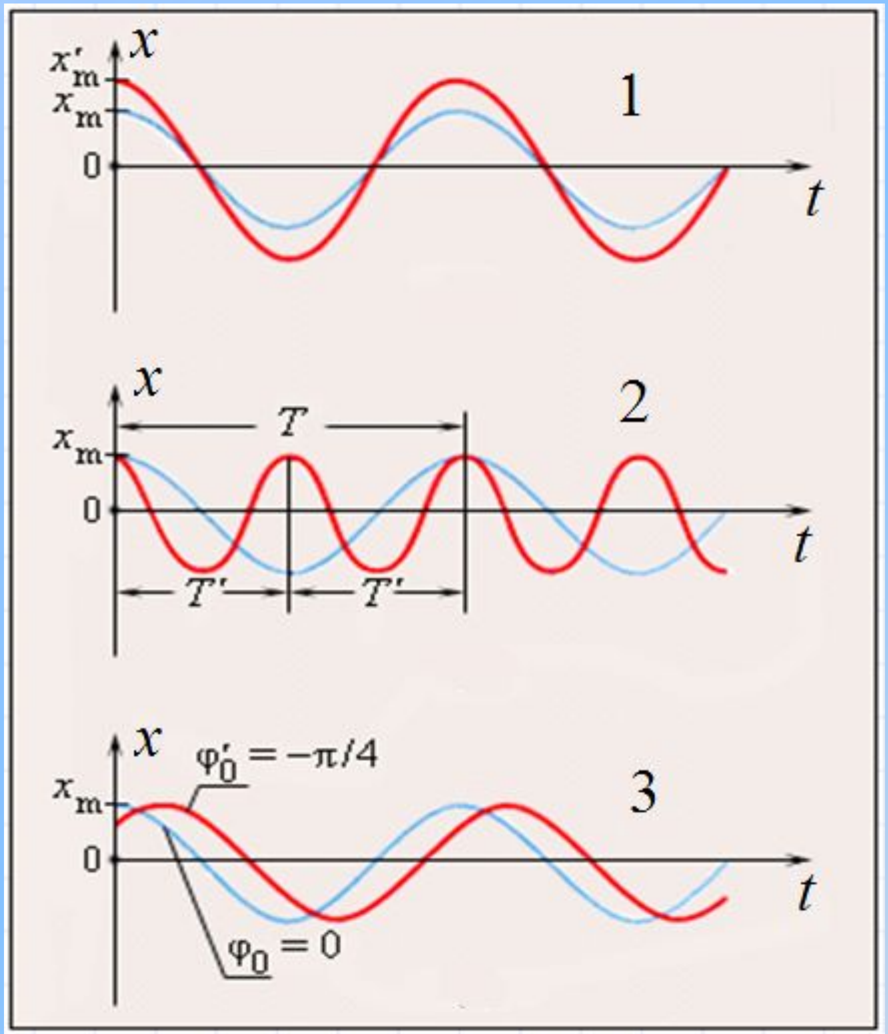
$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$



На этом рисунке изображены положения тела через одинаковые промежутки времени при гармонических колебаниях.

Такую картину можно получить экспериментально при освещении колеблющегося тела короткими периодическими вспышками света (стробоскопическое освещение).

Стрелки изображают векторы скорости тела в различные моменты времени.



На этих рисунках показаны изменения, которые происходят на графике гармонического процесса $x(t)$, если изменяются (красные кривые): амплитуда x_m колебаний (рис.1), период T (рис. 2), начальная фаза φ_0 (рис. 3).

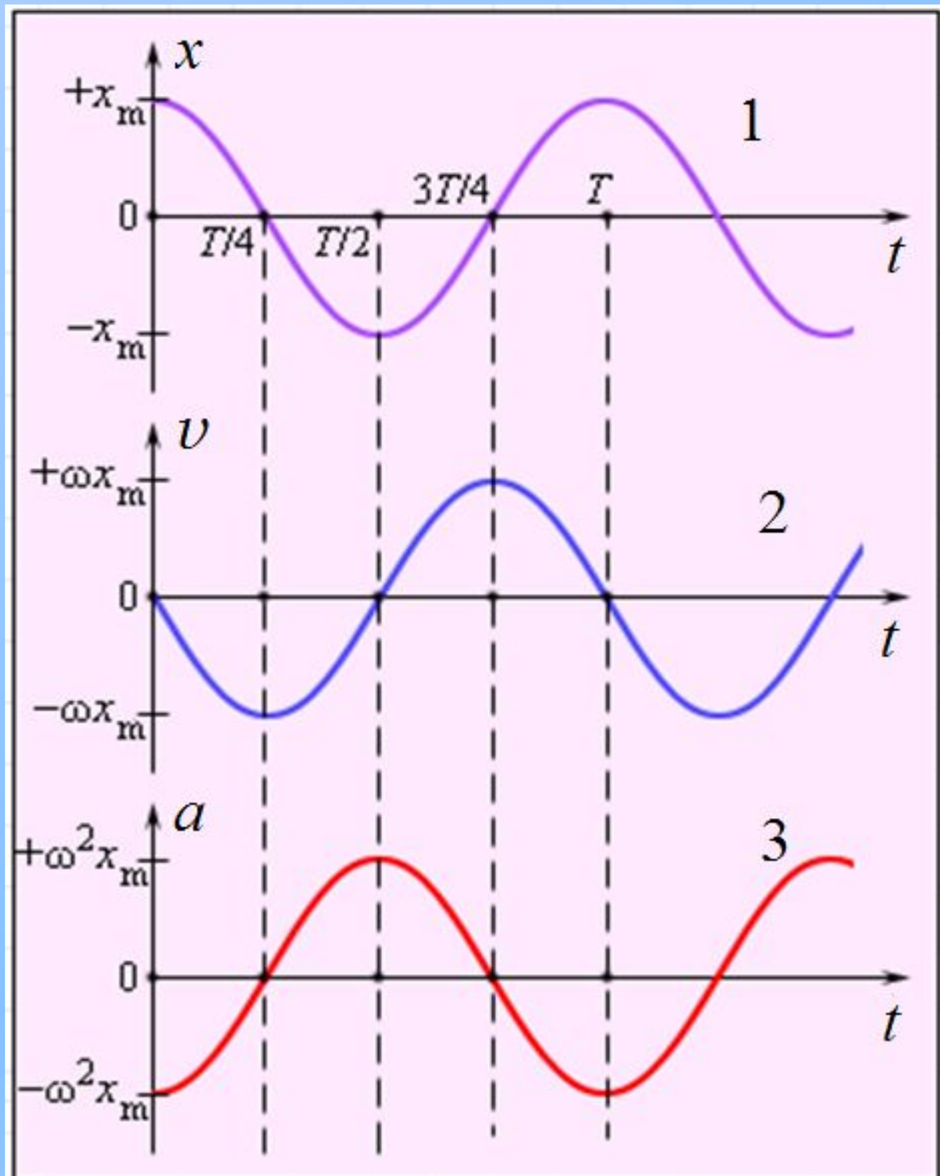
Колебания называются ***свободными (или собственными)***, если они продолжаются неограниченно долго за счёт первоначально сообщённой кинетической или потенциальной энергии.

Совокупность тел, участвующих в колебательном процессе, называют ***колебательной системой.***

Найдём скорость и ускорение колеблющейся вдоль оси Ox точки, как первую и вторую производные от смещения по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega_0 \sin\left(\omega_0 t + \varphi\right) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right);$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = -A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi\right) = A\omega_0^2 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \pi\right).$$



На этом рисунке пока-
заны графики смеще-
ния (1), скорости (2) и
и ускорения (3) колеб-
лющейся точки от вре-
мени при гармоничес-
ких колебаниях.

Видно, что фаза скоро-сти отличается от фа-зы смещения на $\pi/2$, а фаза ускорения на π.

Запишем выражение для ускорения в виде:

$$a_x + A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = a_x + \omega_0^2 x = 0.$$

Или

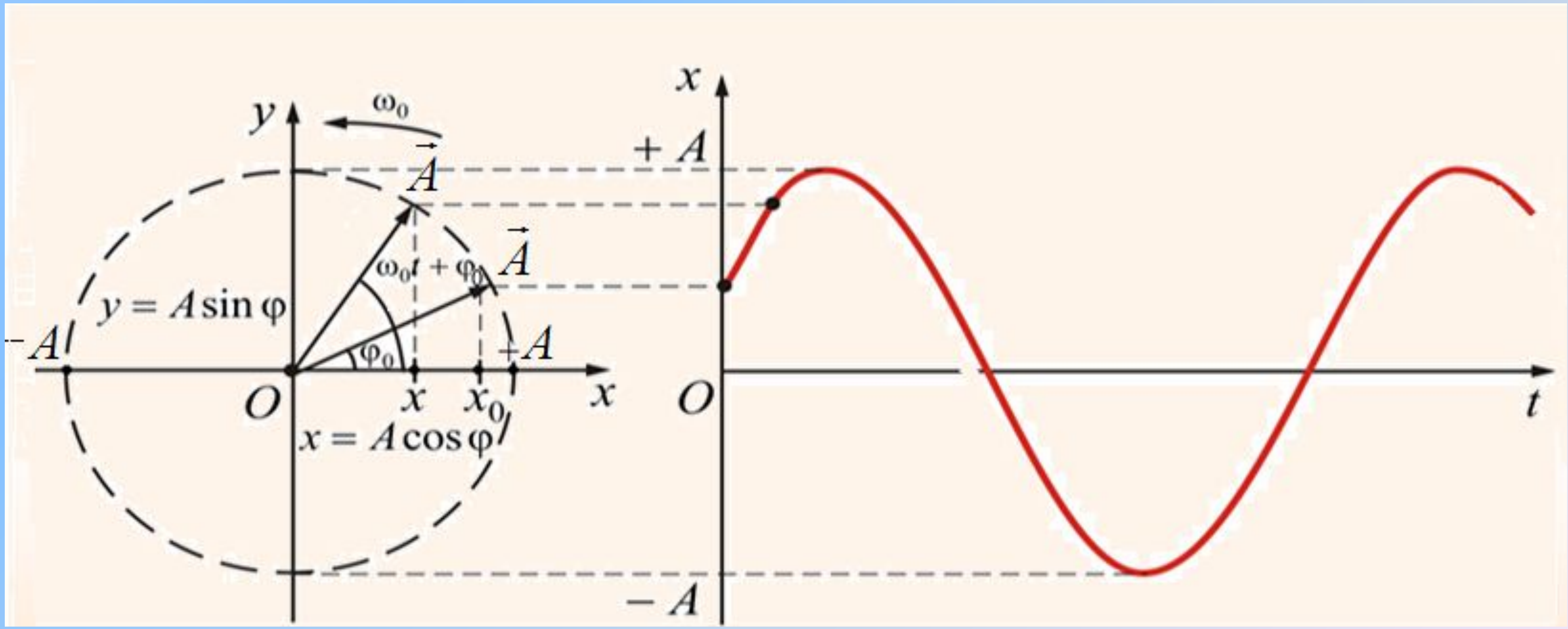
$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.}$$

Это уравнение называется ***дифференциальное уравнение гармонических колебаний.***

Метод вращающегося вектора амплитуды

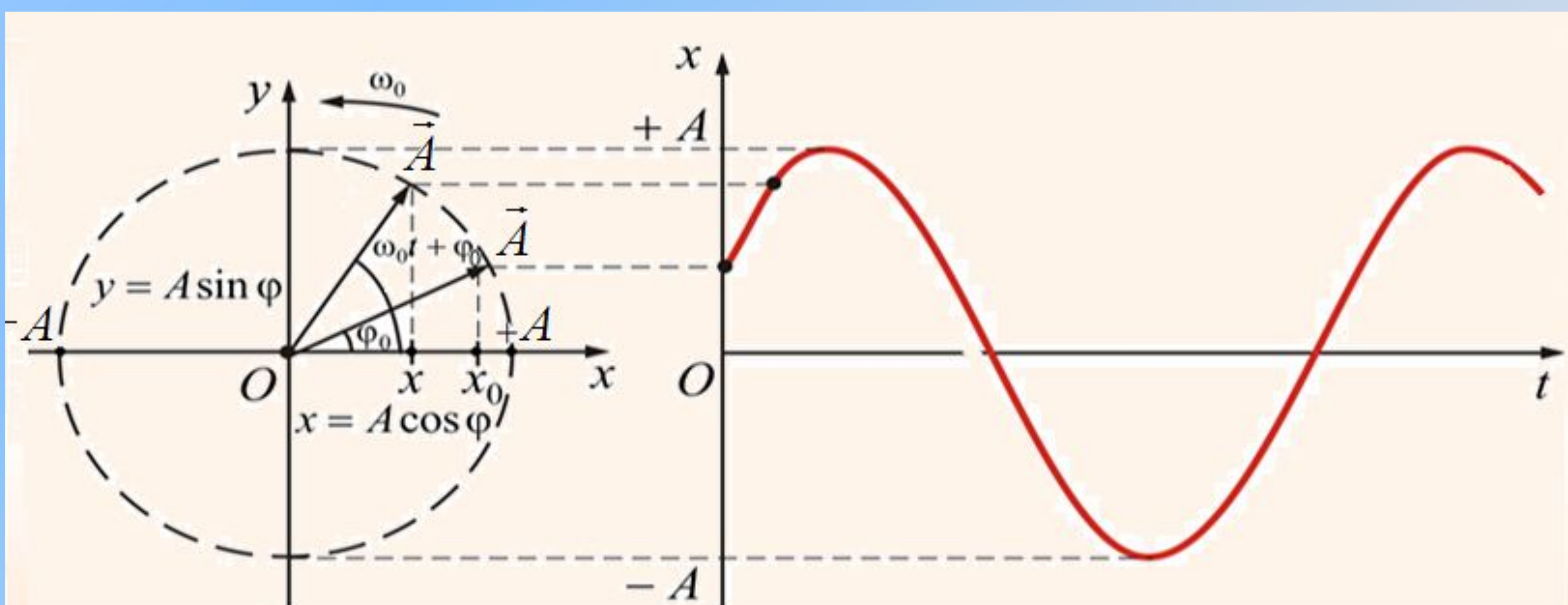
Гармонические колебания изображаются графически **методом вращающегося вектора амплитуды**.

Из произвольной точки O, выбранной на оси Ox, проводим под углом φ_0 вектор $\vec{A}$, по модулю равный амплитуде гармонического колебания A.



Приводим его во вращение с угловой скоростью ω_0 вокруг точки O в плоскости координатных осей x, y.

По мере того, как вектор $\vec{A}$ будет вращаться по окружности, проекция конца вектора на ось Ox будет совершать линейные гармонические колебания с циклической частотой ω_0: $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)$



Гармонический осциллятор. Пружинный, математический и физический маятники

Свободные колебания совершаются под действием внутренних сил системы после того, как система была выведена из положения равновесия.

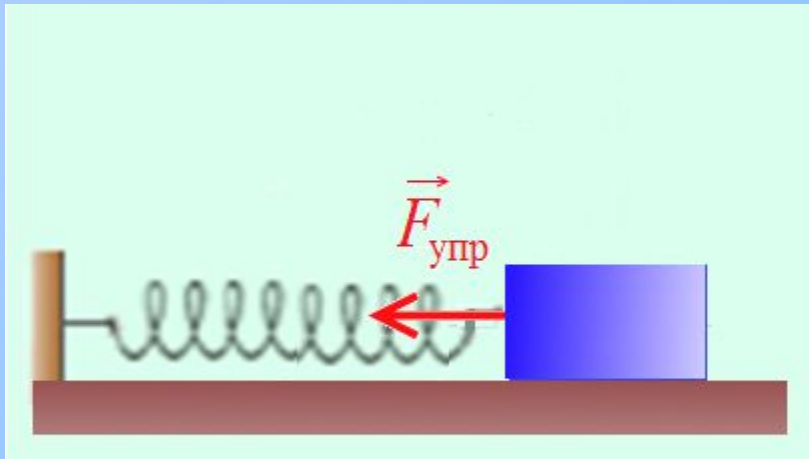
Для того чтобы свободные колебания совершались по гармоническому закону, необходимо, чтобы сила, стремящаяся возвратить тело в положение равновесия, была пропорциональна смещению тела из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению: $F(t) = ma_x(t) = -m\omega_0^2 x(t).$

В этом соотношении ω_0 – циклическая частота гармонических колебаний.

Таким свойством обладает упругая сила в пределах применимости **закона Гука**: $F_{\text{упр}} = -kx$.

Силы любой другой физической природы, удовлетворяющие этому условию, называются ***квазиупругими***.

Тело, совершающее колебания под действием квазиупругих сил, называют ***гармоническим осциллятором, а уравнение вида*** $\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}$ – ***уравнением гармонического осциллятора*** .



руз массы *m*, прикреплён-
изонтальной пру-
ой конец

колебательную систему, способную совершать сво-бодные гармонические колебания (***пружинный мая-тник***).

Циклическая частота ω_0 свободных колебаний груза на пружине находится из второго закона Ньютона:

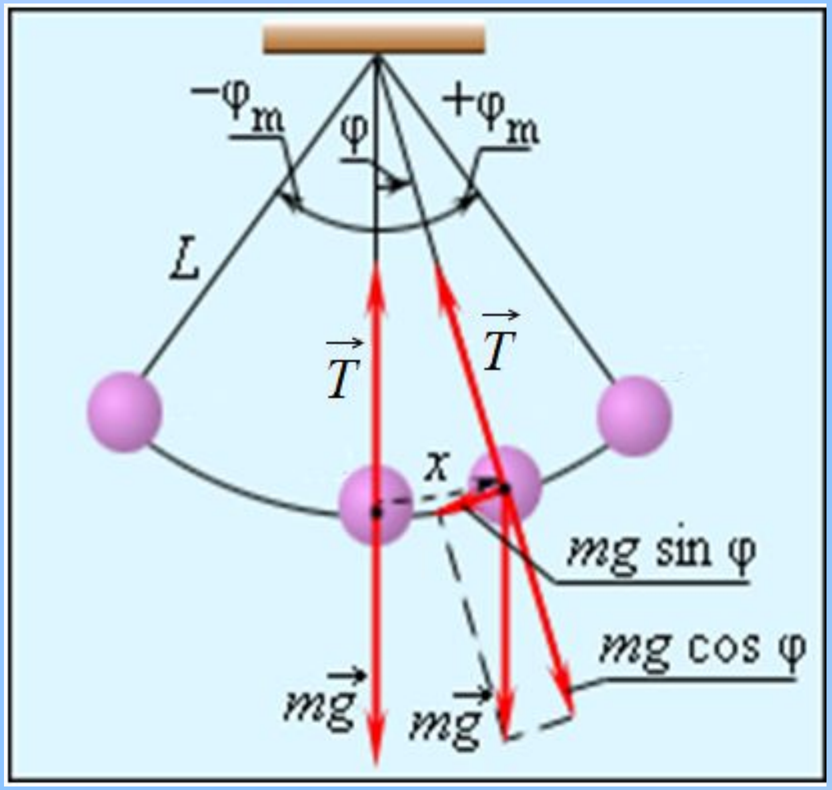
$$ma_x = F_{упр} \Rightarrow m\ddot{x} = -kx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Следовательно, колебания пружинного маятника описываются уравнением гармонического осцилля-тора.

Откуда $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ и $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$

Математическим маятником называют тело небольших размеров, подвешенное на тонкой нерастяжимой нити, масса которой пренебрежимо мала по сравнению с массой тела.

В положении равновесия, когда маятник висит по отвесу, сила тяжести mg уравновешивается силой натяжения нити T.



При отклонении маятника из положения равновесия на некоторый угол φ появляется касательная составляющая силы тяжести

$$F_\tau = -mg \sin \varphi.$$

Знак «минус» в этой формуле означает, что касательная составляющая направлена в сторону, противоположную отклонению маятника.

Эта составляющая создаст вращающий момент

$$M = -l \cdot mg \sin\varphi \approx -l \cdot mg\,\varphi$$

В соответствии с основным законом динамики вращательного движения этот момент сил должен быть равен

$$-l \cdot mg\,\varphi = I\ddot{\varphi},$$

где I – момент инерции тела относительно оси подвеса, $\ddot{\varphi}$ – угловое ускорение тела.

Или $$I\ddot{\varphi} + l\,mg\,\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{l\,mg}{I}\varphi = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{lmg}{ml^2}\varphi = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.}$$

Таким образом, колебания математического маятника описываются уравнением гармонического осцилля-

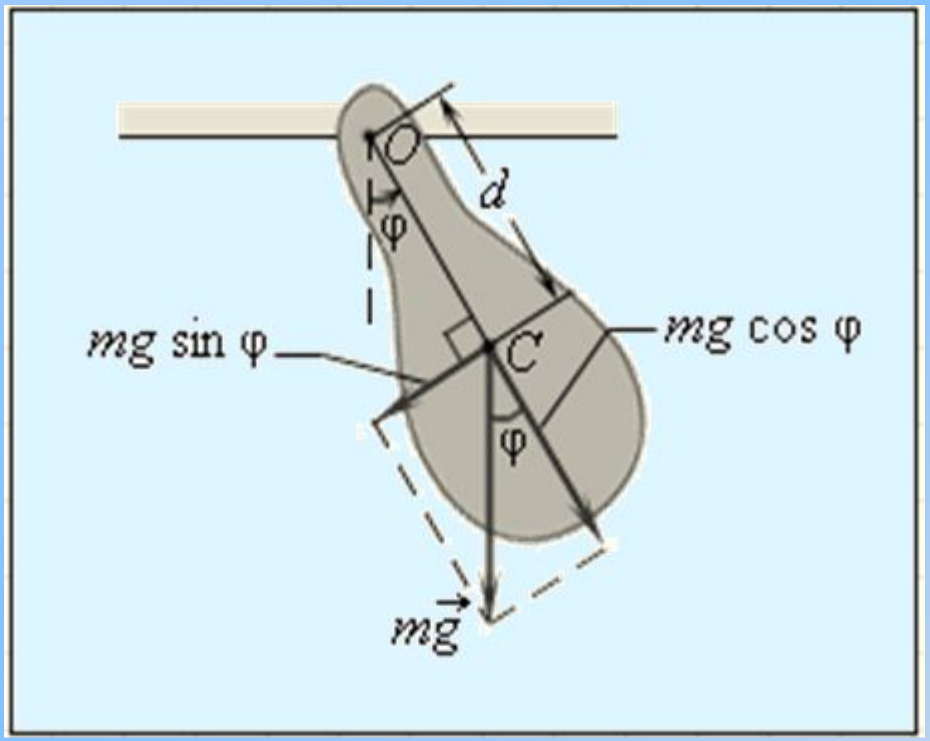
тора.

Следовательно, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{g}{l}}$ и $\boxed{T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}}$

Любое тело, насаженное на горизонтальную ось вращения и способное совершать в поле тяготения свободные колебания называется физическим маятником.

Он отличается от математического маятника только распределением масс.

В положении устойчивого равновесия центр масс *C* физического маятника находится ниже оси вращения *O* на вертикали, проходящей через ось.



При отклонении маятника на угол φ возникает момент силы тяжести, стремящийся возвратить маятник в положение равновесия:

$$M = -(mg\sin\varphi)d$$

где d – расстояние между осью вращения и центром масс *C*.

Знак «минус» в этой формуле означает, что момент сил стремится повернуть маятник в направлении, противоположном его отклонению из положения равновесия.

Как и в случае математического маятника, возвращающий момент M пропорционален $\sin \varphi$.

Это означает, что только при малых углах φ, когда $\sin \varphi \approx \varphi$, физический маятник способен совершать свободные гармонические колебания.

В случае малых колебаний $M = -mgd\,\varphi$, и основной закон динамики для вращательного движения физического маятника принимает вид:

$$I\ddot{\varphi} - mgd\,\varphi = 0, \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{mgd}{I}\varphi = 0.$$

Таким образом, колебания физического маятника также описываются уравнением гармонического осциллятора.

Следовательно, $$\frac{mgd}{I} = \omega_0^2 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}.$$

Период колебания физического маятника отсюда:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgd}}}$$

Сравнивая формулы $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{l}{g}}$ $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{I}{mgd}}$

заключаем, что математический маятник с длиной $l_{\text{пр}} = \dfrac{I}{md}$, которая называется ***приведённая длина физического маятника,*** будет колебаться с тем же периодом, что и физический.

Центр качания – точка на продолжении прямой *OC* и отстоящая от точки подвеса на расстоянии $l_{\text{пр}}$.

Точка подвеса и центр качания обладают ***свойством взаимозаменяемости:***

если физический маятник подвесить за центр качания, то его период не изменится и прежняя точка подвеса сделается новым центром качания.

Превращение энергии при свободных механических колебаниях

При свободных механических колебаниях кинетическая и потенциальная энергии тела изменяются периодически.

При максимальном отклонении тела от положения равновесия его скорость, а, следовательно, и кинетическая энергия обращаются в нуль.

В этом положении потенциальная энергия колеблющегося тела достигает максимального значения.

Для груза на горизонтально расположенной пружине потенциальная энергия – это энергия упругих деформаций пружины. Для математического маятника – это энергия в поле тяготения Земли.

Когда тело при своем движении проходит через положение равновесия, его скорость максимальна.

В этот момент оно обладает максимальной кинетической и минимальной потенциальной энергией.

Увеличение кинетической энергии происходит за счет уменьшения потенциальной энергии.

Таким образом, при гармонических колебаниях происходит периодическое превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот.

Кинетическую энергию колеблющегося тела вычислим по формуле:

$$E_{\text{k}} = \frac{m v^2}{2} = \frac{m \omega_0^2 A^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_0) =$$

$$= \frac{m A^2 \omega_0^2}{4} \left[1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi_0) \right]$$

Потенциальная энергия материальной точки, совершающей гармонические колебания по действием упругой силы $F = m\omega_0^2 x$,

$$E_{\text{р}} = -\int_0^x F\,dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}\cos^2(\varphi_0 t + \quad) =$$

$$= \frac{mA^2\omega_0^2}{4}\left[1 + \cos 2(\,.\ {}_0 t + \quad)\right]$$

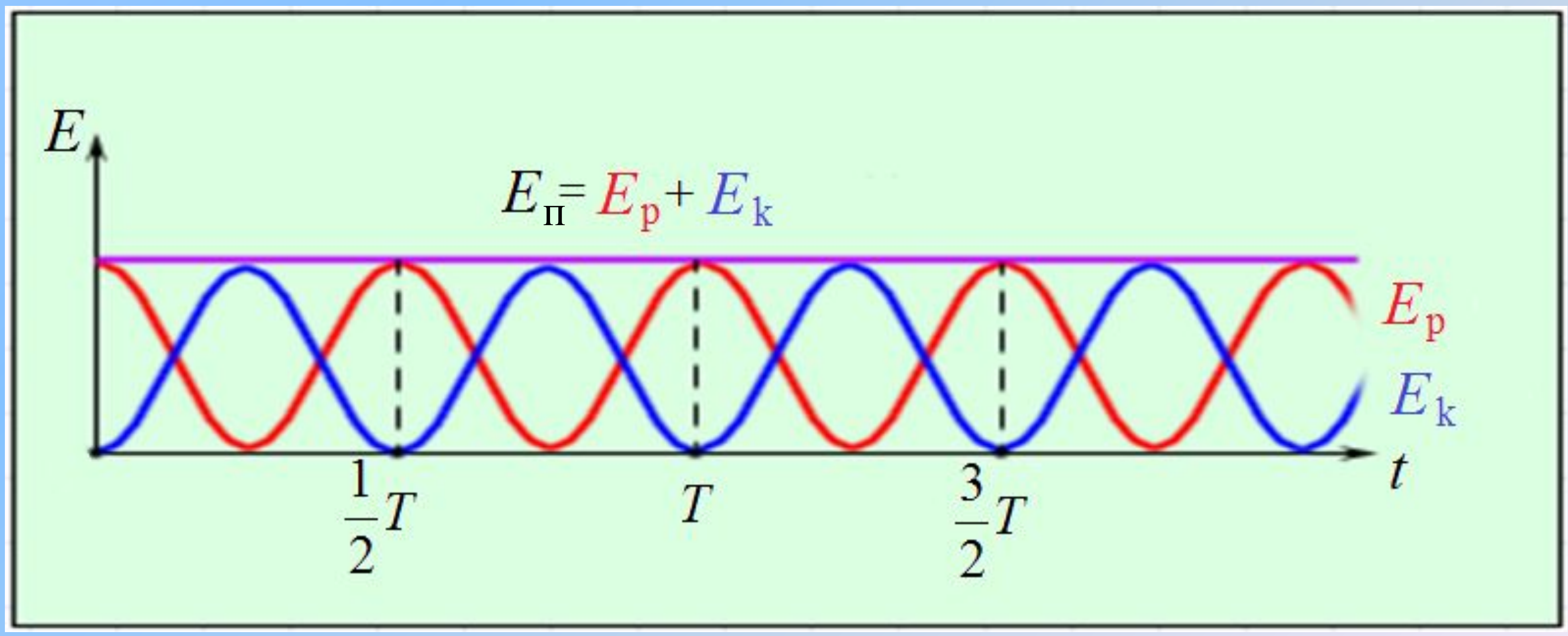
Из этих формул следует, что кинетическая и потенциальная энергии колеблются с удвоенной частотой.

Так как $\sin^2(\varphi_0 t + \quad) + \cos^2(\varphi_0 t + \quad) = 1,$

то полная энергия колеблющейся точки

$$E_{п} = E_{k} + E_{p} = \frac{m\omega_0^2 A^2}{2}$$

остаётся при свободных гармонических колебаниях величиной постоянной.



Затухающие колебания

В реальных условиях любая колебательная система находится под воздействием сил трения (сопротивления).

При этом часть механической энергии превращается во внутреннюю энергию теплового движения атомов и молекул, и колебания становятся затухающими.

Затухающие колебания описываются дифференциальным уравнением вида:

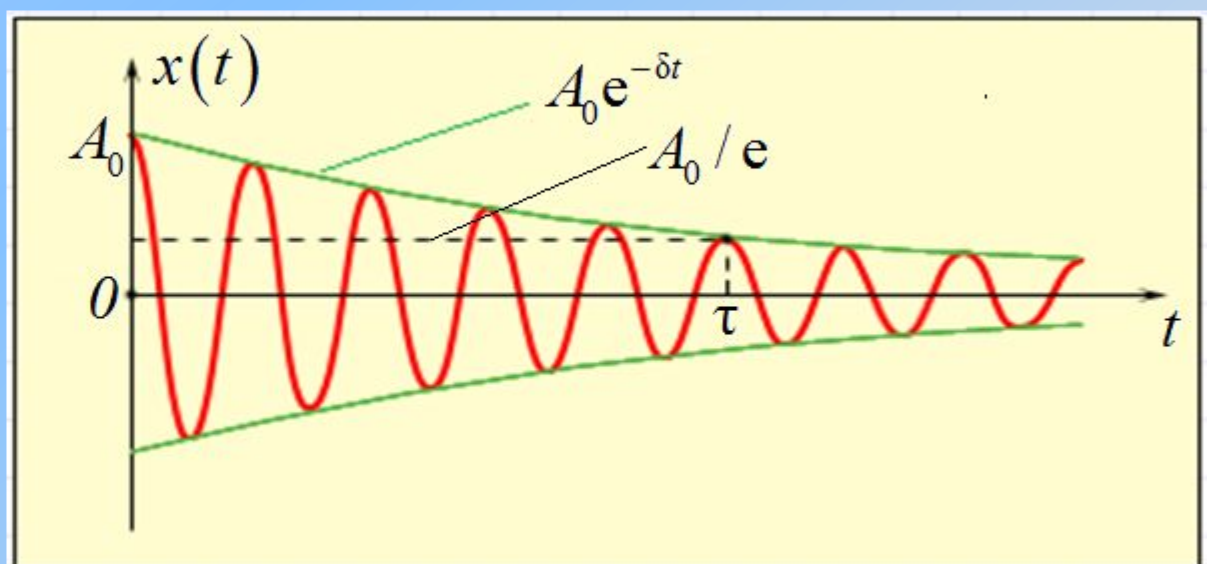
$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

где δ – коэффициент затухания.

Если коэффициент затухания удовлетворяет неравенству $\delta \ll \omega_0$, то решение этого уравнения име-ет вид:

$$x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$$

где e – основание натурального логарифма, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.



Промежуток времени τ, в течении которого амплитуда колебаний уменьшается в е раз, называется ***временем релаксации***.

Период затухающих колебаний

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$

Отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

называется ***декрементом затухания***, а его натуральный логарифм

$$\theta = \ln e^{\delta T} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N_e},$$

где N_e – число колебаний, совершаемых за время релаксации, – ***логарифмическим декрементом затухания.***

Для пружинного маятника массой m, колеблющегося под действием упругой силы $F = -kx$, сила сопротивления (трения) пропорциональна скорости:

$F_c = -r\dot{x}$, где r – коэффициент сопротивления.

С учётом этих сил уравнение движения пружинного маятника примет вид: $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}.$

Если в это уравнение подставить величины $k = m\omega_0^2$, $r = 2\delta m$ то получим уравнение $\boxed{\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0,}$ решением которого будет уравнение

$$\boxed{x = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)}$$

Важной характеристикой колебательной системы, совершающей затухающие колебания, является ***добротность*** Q.

Этот параметр определяется как число полных колебаний N_e, совершаемых системой за время релаксации, умноженное на π :

$$\boxed{Q = \pi N_e.}$$

Чем медленнее происходит затухание свободных колебаний, тем выше добротность колебательной системы.

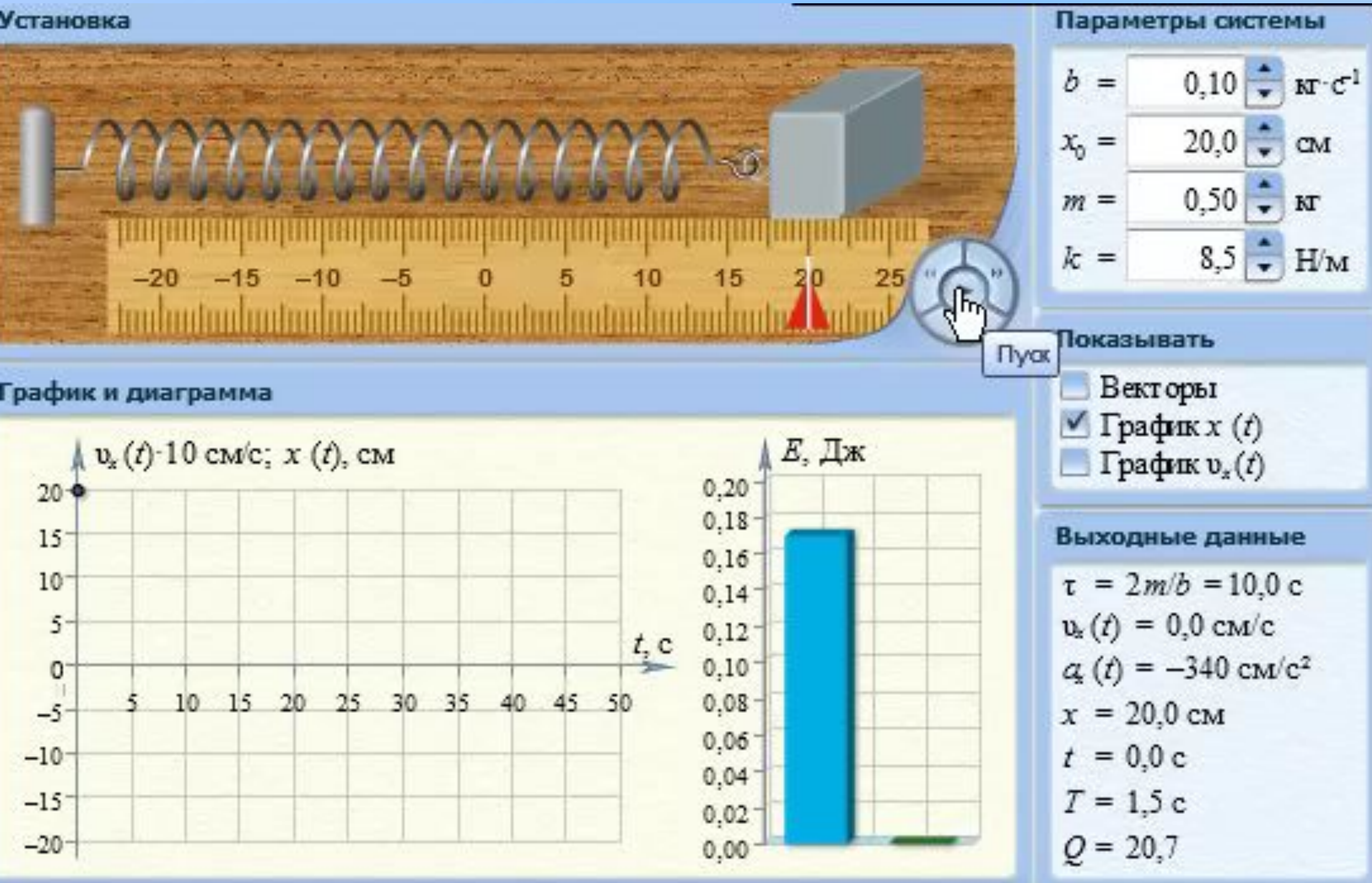
Добротности механических колебательных систем могут быть очень высокими – порядка нескольких сотен и даже тысяч.

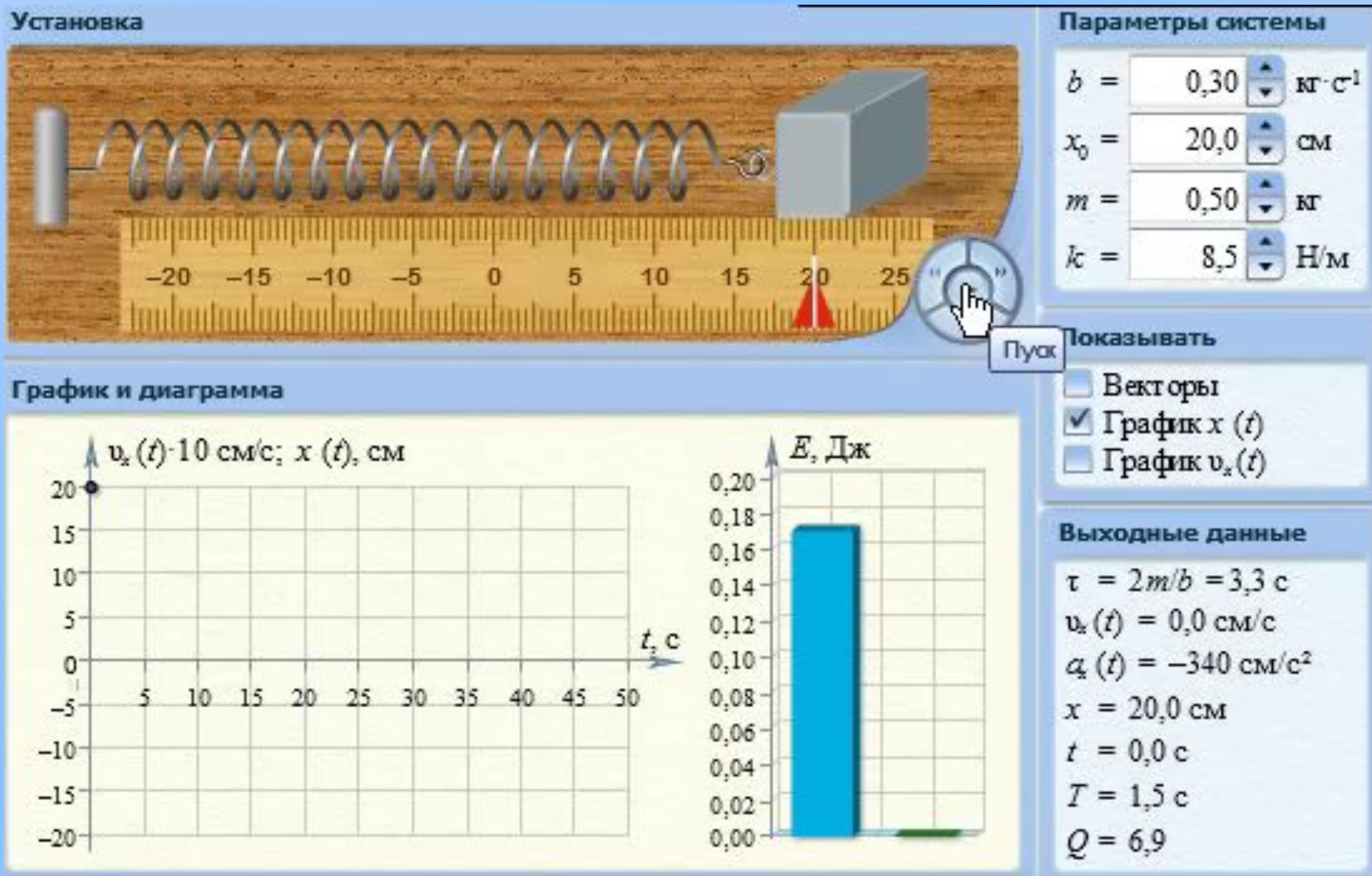
Понятие добротности имеет глубокий энергетичес-кий смысл.

Можно определить добротность Q колебательной системы следующим энергетическим соотношением:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Полный запас энергии КС}}{\text{Потеря энергии за 1 период}}$$

Таким образом, добротность характеризует относительную убыль энергии колебательной системы из-за наличия трения на интервале времени, равном одному периоду колебаний.


Установка
Параметры системы
b = 0,10 кг·с-1
x0 = 20,0 см
m = 0,50 кг
k = 8,5 Н/м
–20 –15 –10 –5 0 5 10 15 20 25
Пуск
Показывать
Векторы
График x (t)
График υx (t)
График и диаграмма
υx (t)·10 см/с; x (t), см
t, с
E, Дж
Выходные данные
τ = 2m/b = 10,0 с
υx (t) = 0,0 см/с
ax (t) = –340 см/с2
x = 20,0 см
t = 0,0 с
T = 1,5 с
Q = 20,7


Установка
–20 –15 –10 –5 0 5 10 15 20 25
Параметры системы
b = 0,30 кг·с⁻¹
x₀ = 20,0 см
m = 0,50 кг
k = 8,5 Н/м
Пуск
Показывать
Векторы
График x (t)
График υₓ (t)
График и диаграмма
υₓ (t)·10 см/с; x (t), см
20 15 10 5 0 –5 –10 –15 –20
t, с
5 10 15 20 25 30 35 40 45 50
E, Дж
0,20 0,18 0,16 0,14 0,12 0,10 0,08 0,06 0,04 0,02 0,00
Выходные данные
τ = 2m/b = 3,3 с
υₓ (t) = 0,0 см/с
aₓ (t) = –340 см/с²
x = 20,0 см
t = 0,0 с
T = 1,5 с
Q = 6,9

Вынужденные колебания. Резонанс

Рассмотрим систему, на которую кроме упругой силы (– *kx*) и сил сопротивления (– *r*υ) действует добавочная периодическая сила *F* – ***вынуждающая сила***:

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0\cos\omega t$$

Или

$$\boxed{\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0\cos\omega t}$$

Уравнение установившихся вынужденных колебаний имеет вид

$$x = A\sin(\omega t + \varphi)$$

где $$A = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}},$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Проанализируем зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы и коэффициента затухания.

1. $\omega = 0$ – частота вынуждающей силы равна нулю. Тогда $A_{\text{ст}} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ – статическая амплитуда (смещение) в отсутствии колебаний;

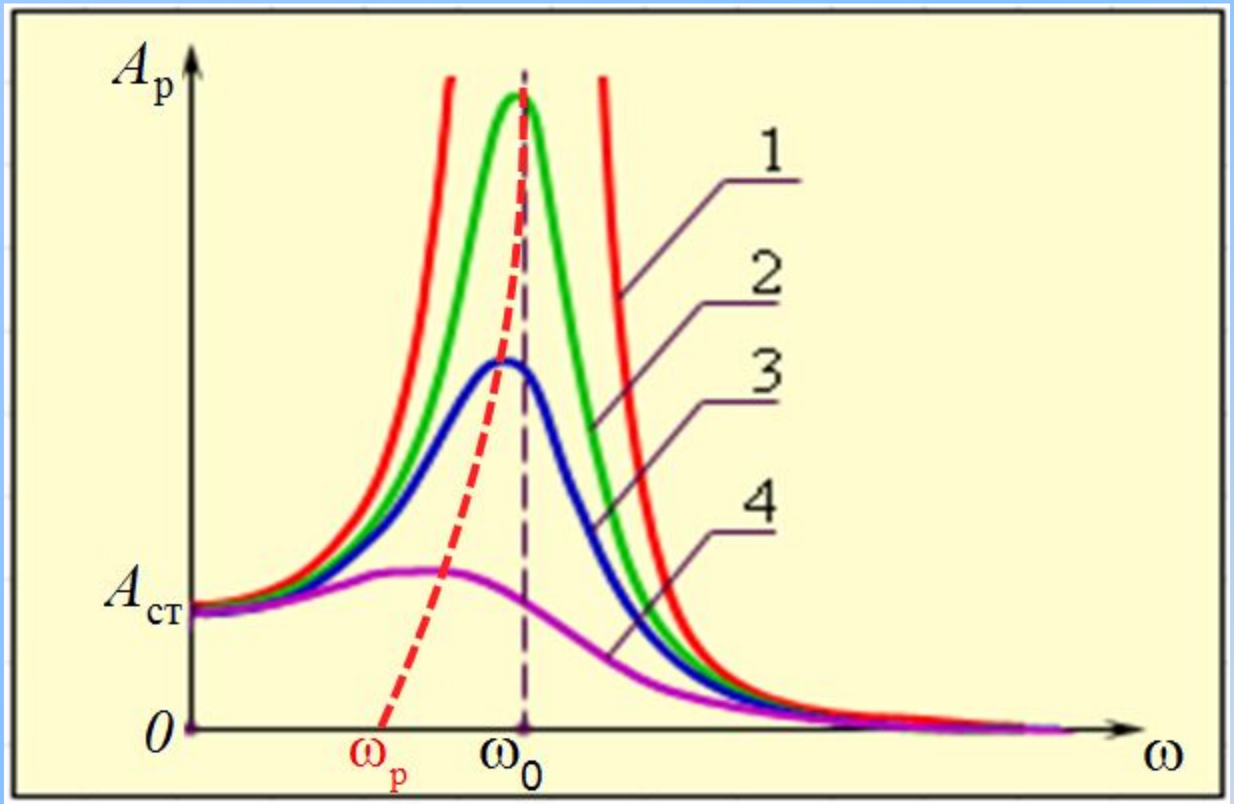
2. $\boxed{\delta = 0}$ – (затухания нет). С увеличением ω (но при $\omega < \omega_0$) амплитуда растёт и при $\omega = \omega_0$ происходит резкое увеличение амплитуды вынужденных колебаний ($A \to \infty$). Это явление называется ***резонансом***.

При дальнейшем увеличении частоты вынуждающей силы ($\omega > \omega_0$) амплитуда уменьшается и при $\omega \to \infty$ $A \to 0$.

3. $\delta \neq 0$ В реальных условиях амплитуда установившихся вынужденных колебаний определяется условием: работа внешней силы в течение периода колебаний должна равняться потерям механической энергии за то же время из-за трения.

Чем меньше трение (т. е. чем выше добротность Q колебательной системы), тем больше амплитуда вынужденных колебаний при резонансе.

$$A_\text{р} = \frac{F_0}{2m\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}.$$



На рисунке приведены резонансные кривые при различных значениях коэффициента затухания:

$\delta_1 = 0; \quad \delta_4 > \delta_3 > \delta_2$.

У колебательных систем с невысокой добротностью $(Q < 10)$ резонансная частота с увеличением коэффициента затухания смещается в сторону низких частот:

$$\omega_{\text{р}} = \sqrt{\left(\omega_0^2 - 2\delta^2\right)}.$$

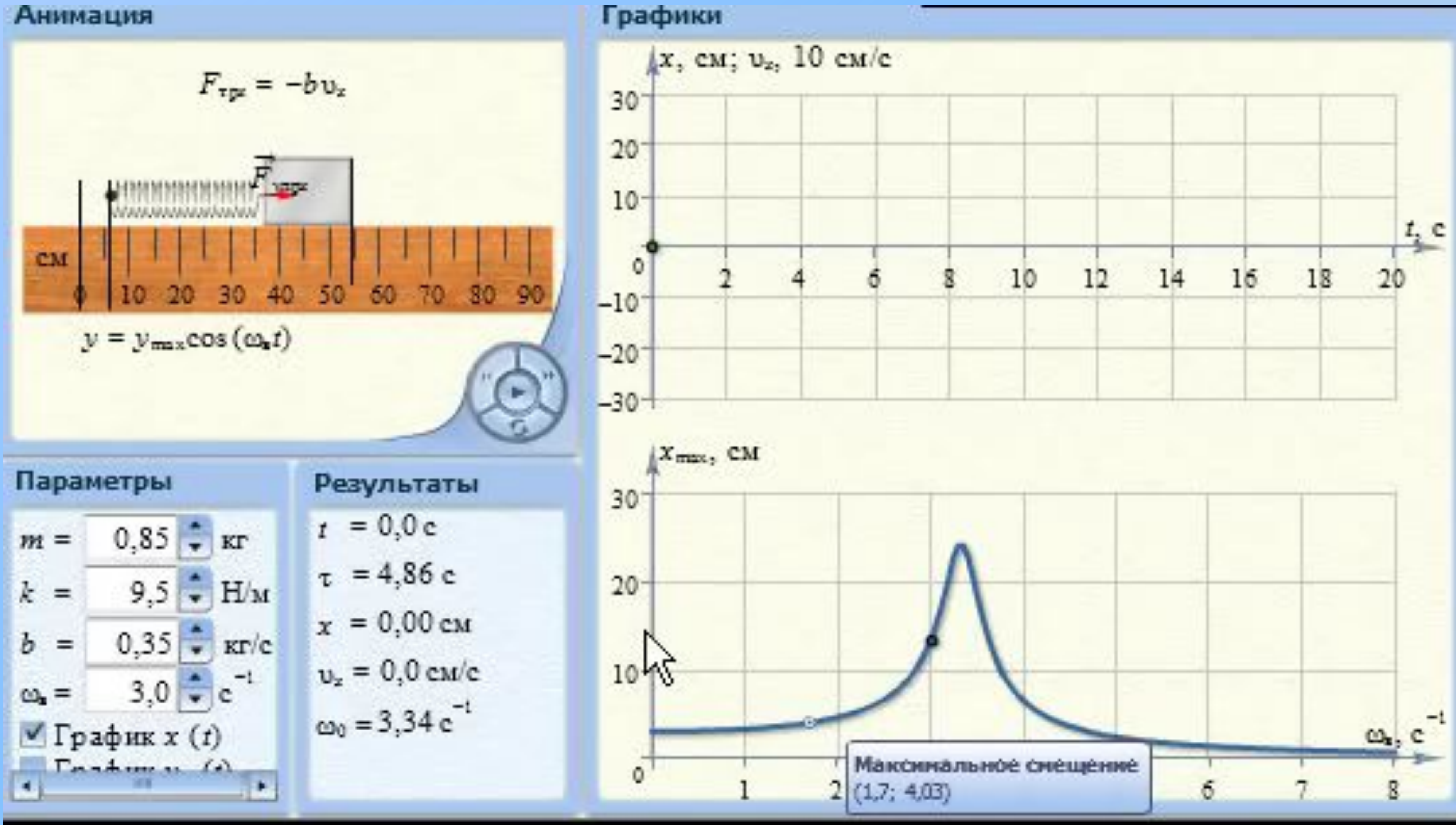
Явление резкого увеличения поглощения энергии колебательной системой при резонансе называется ***резонансным поглощением энергии.***

Явление резонанса играет большую роль в природе, науке и технике. Большинство сооружений и машин, обладая определённой упругостью, способны совершать малые свободные колебания.

Поэтому внешние периодические воздействия могут вызвать их резонанс, что может привести к механическим разрушениям и поломкам.

Предотвратить вредное воздействие резонанса можно путём уменьшения добротности систем, подверженных механическим колебаниям.

Полезное применение резонанса: акустика (усиление звучания музыкальных инструментов; радиотехника и электротехника (выделение полезного сигнала, измерение частоты колебаний различных систем); резонансное поглощение энергии гамма-квантов (эффект Мёссбауэра, ЭПР, ЯМР) и т.д.


Анимация
Графики
$F_{тр x} = -b\upsilon_x$
$\vec{F}_{упр}$
см
0 10 20 30 40 50 60 70 80 90
$y = y_{max}\cos(\omega_в t)$
x, см; υ_x, 10 см/с
t, с
x_{max}, см
$\omega_в$, $с^{-1}$
Параметры
m = 0,85 кг
k = 9,5 Н/м
b = 0,35 кг/с
$\omega_в$ = 3,0 $с^{-1}$
График x (t)
Результаты
t = 0,0 с
τ = 4,86 с
x = 0,00 см
υ_x = 0,0 см/с
ω_0 = 3,34 $с^{-1}$
Максимальное смещение
(1,7; 4,03)

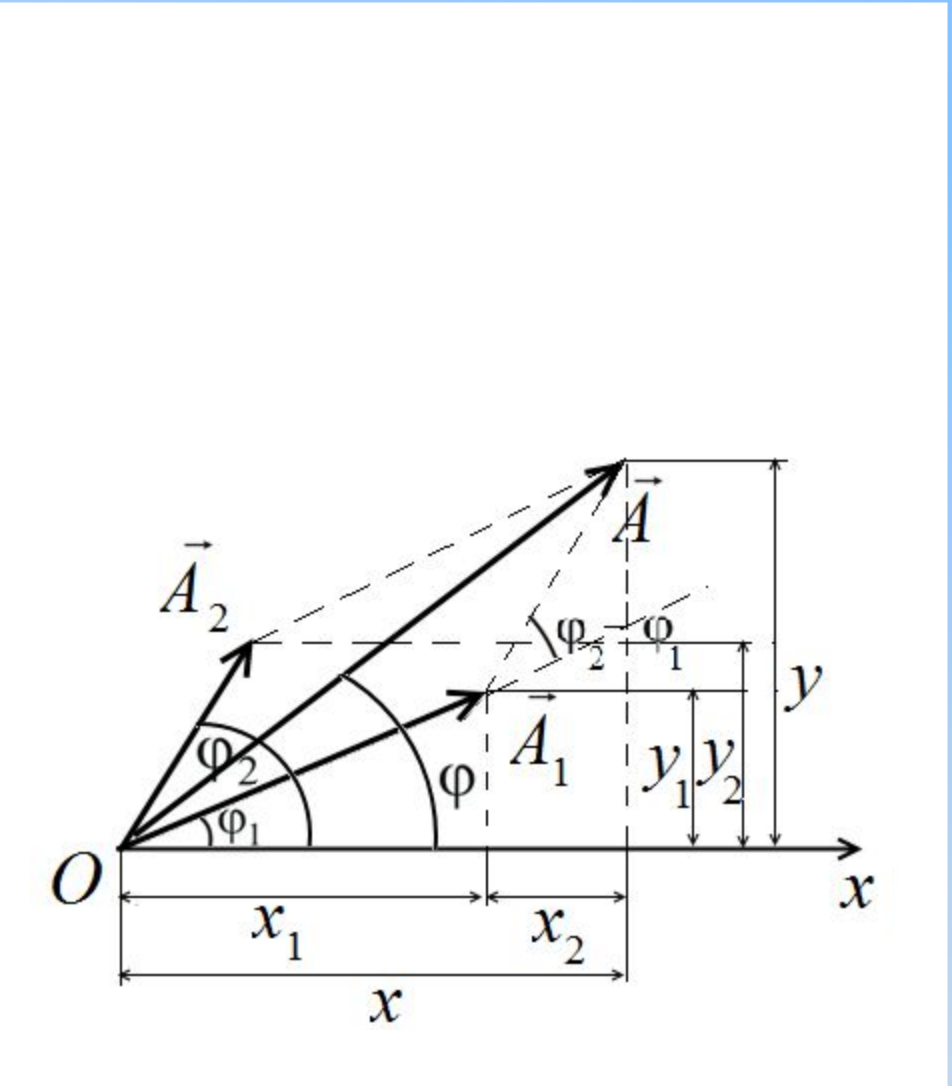
Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты

Пусть точка одновременно участвует в двух гармонических колебаниях одинакового периода, направленных вдоль одной прямой.

$$x_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega_0 t + \varphi_2)$$

Найдём уравнение результирующего колебания, воспользовавшись методом вращающегося вектора амплитуды.



Построим векторные диаграммы этих коле-
баний.

Так как векторы A_1 и A_2 вращаются с одинаковой угловой скоростью ω_0, то разность начальных фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ между ними остаётся постоянной.

Очевидно, что уравнение результирующего колебания будет

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega_0 t + \varphi),$$

где

$$\boxed{A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}}$$

Проанализируем выражение для результирующей амплитуды:

Если: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2m\pi \quad (m = 0, 1, 3, ...)$

Тогда $A = A_1 + A_2,$ т. е. результирующая амплитуда равна сумме слагаемых амплитуд.

Если: $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m + 1)\pi \quad (m = 0, 1, 3, ...)$

Тогда $A = \left|A_1 - A_2\right|,$ т. е. результирующая амплитуда равна разности слагаемых амплитуд.