Векторы

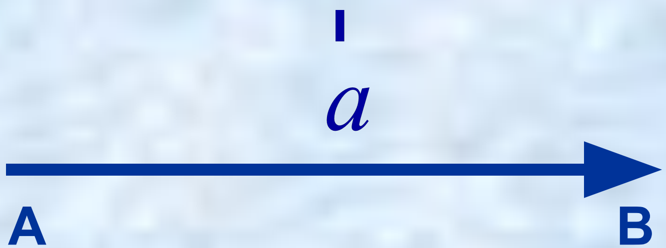
План.

1. *Векторное n – мерное пространство.*
2. *Пространство R^2 и R^3.*
3. *Скалярное произведение векторов. Длина вектора. Угол между векторами.*
4. *Плоскость в трехмерном пространстве.*
5. *Прямая линия в трехмерном пространстве.*
6. *Линейная зависимость и линейная независимость векторов. Базис пространства R^n.*

Векторное n – мерное пространство.

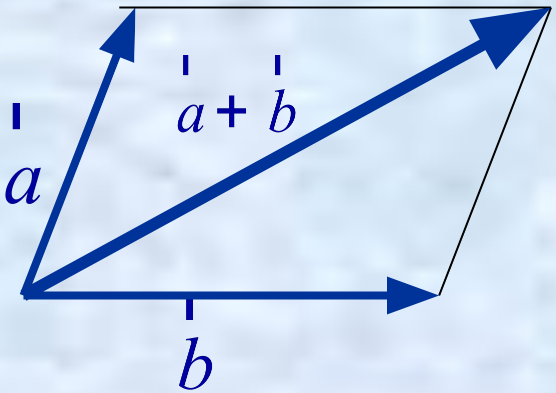
- Определение. *Пусть* n *– любое натуральное число. Упорядоченная совокупность n чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *называется* n *– мерным вектором.*

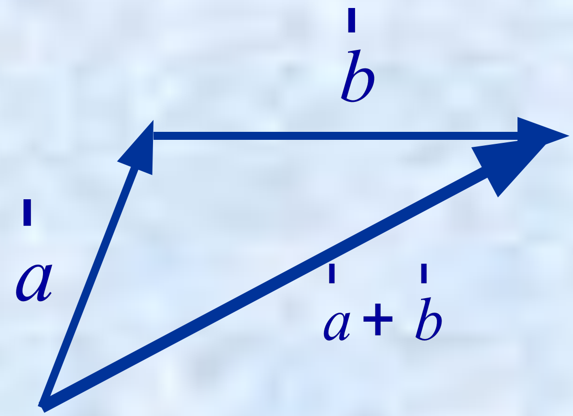
$$\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) = \vec{a}(a_i)_n$$

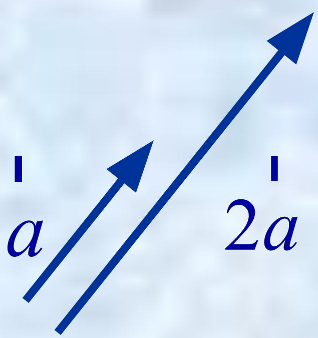


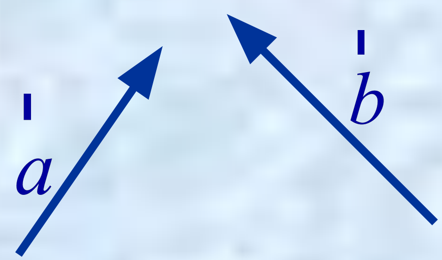
$\overrightarrow{AB}$

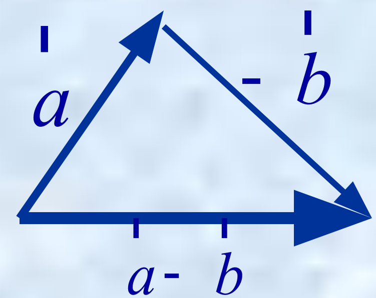
Линейные действия над векторами



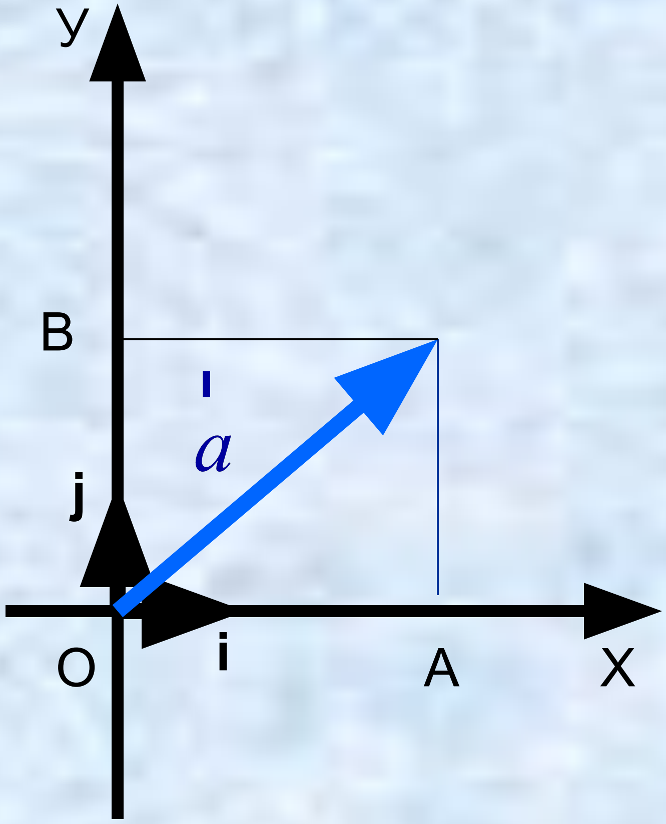








Пространство R^2.

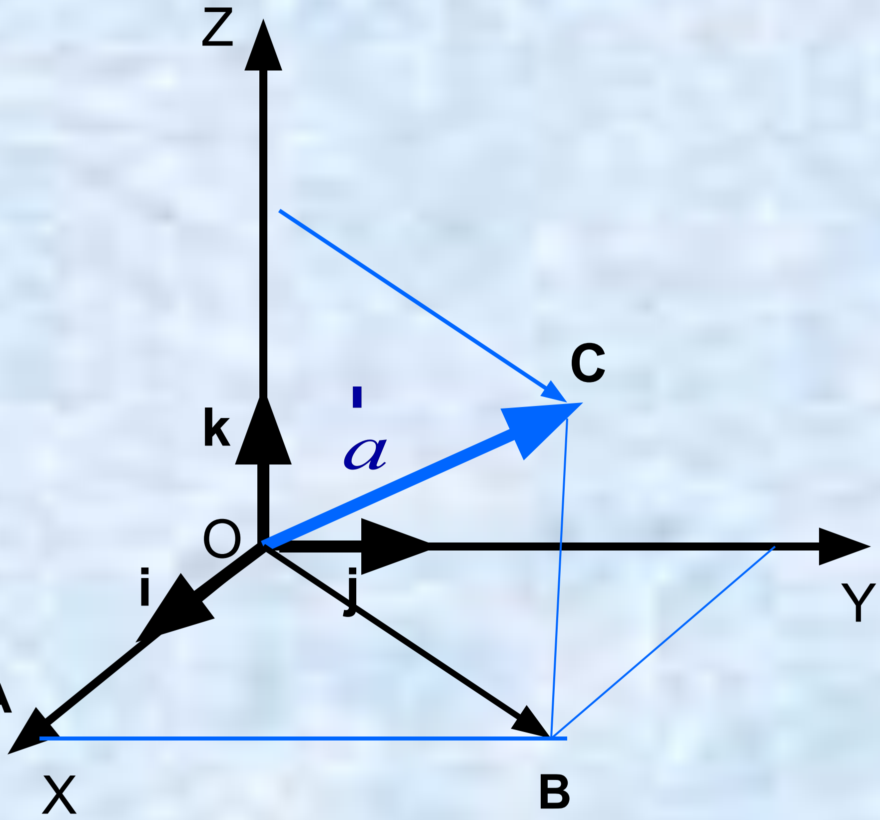


$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i}, \quad \overrightarrow{OB} = y\vec{j}$$

$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Пространство R^3.



$$\vec{a} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Скалярное произведение векторов

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi\,, \quad 0 \le \varphi \le \pi$$

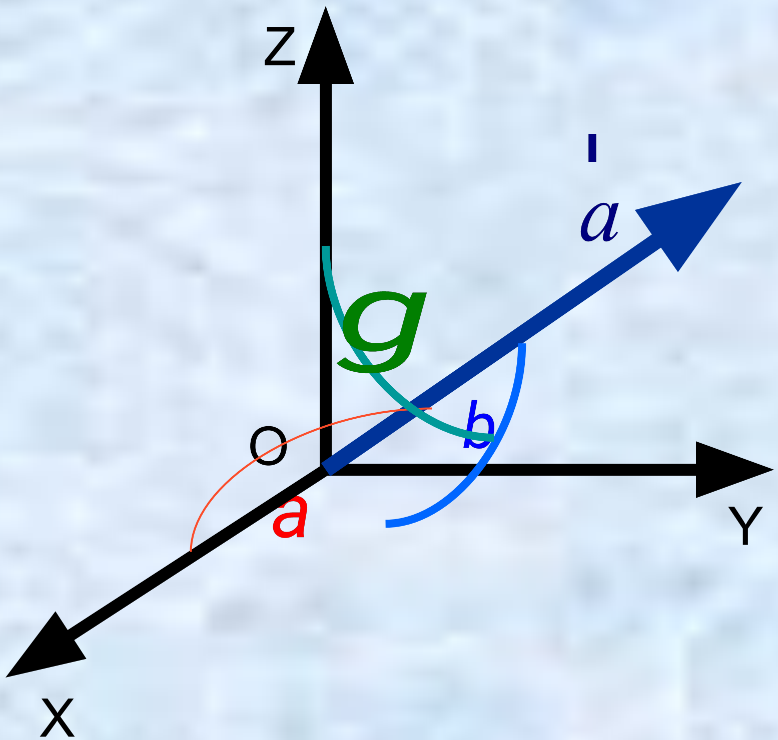
$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

$$\vec{a} = (a_1; a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\cos\varphi = \frac{a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2 + a_3\cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

Направляющие косинусы



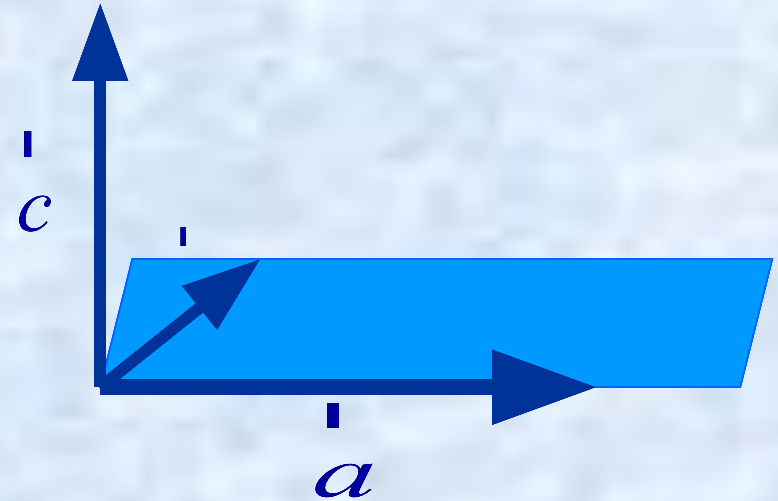
$$\cos a = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos b = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

$$\cos g = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Векторное произведение векторов

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \times \left|\vec{b}\right| \times \sin\left(\widehat{\vec{a};\vec{b}}\right)$$



$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Свойства векторного произведения

1^0 $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = 0$ - условие коллинеарности

2^0 $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = -\left[\vec{b}\,\vec{a}\right]$

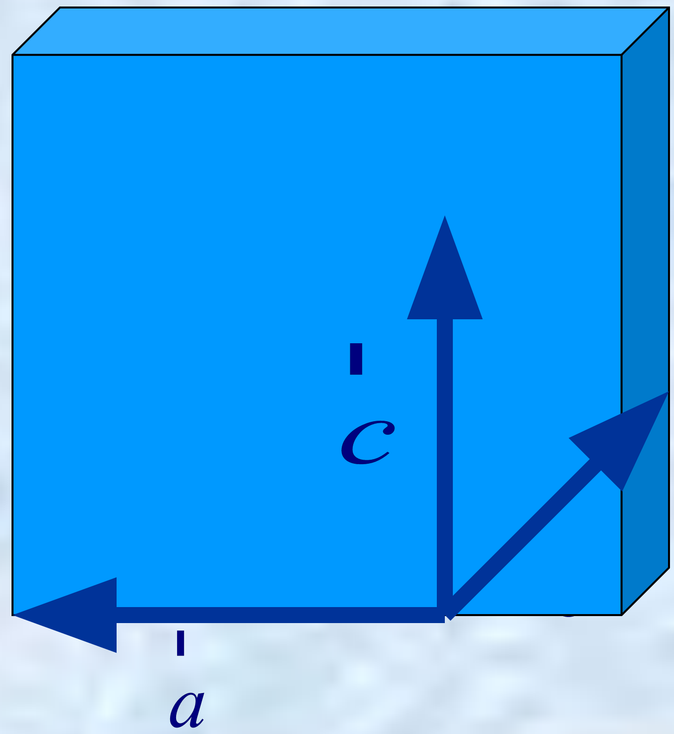
3^0 $m\cdot\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = \left[\left(m\vec{a}\right)\vec{b}\right] = \left[\vec{a}\left(m\vec{b}\right)\right]$

4^0 $\left[\vec{a}\,\vec{b}\right] = \left[\vec{a}^{\,\prime}\,\vec{b}\right]$

5^0 $\left[\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\vec{c}\right] = \left[\vec{a}\,\vec{c}\right] + \left[\vec{b}\,\vec{c}\right]$

Смешанное произведение векторов

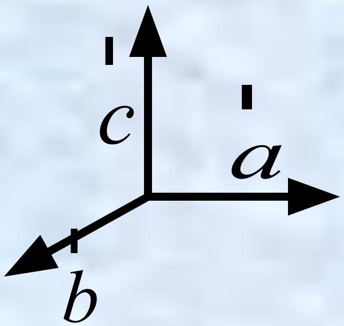
$$\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \cdot \vec{c} = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$$

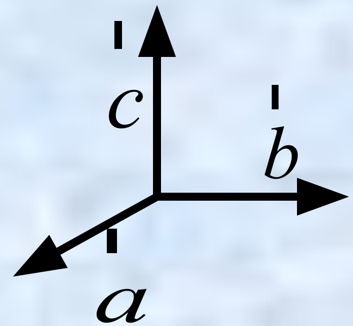


$$V = \left|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right|$$

Свойства смешанного произведения

1^0 $\quad \left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] > 0$ $\qquad\qquad$ $\left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] < 0$

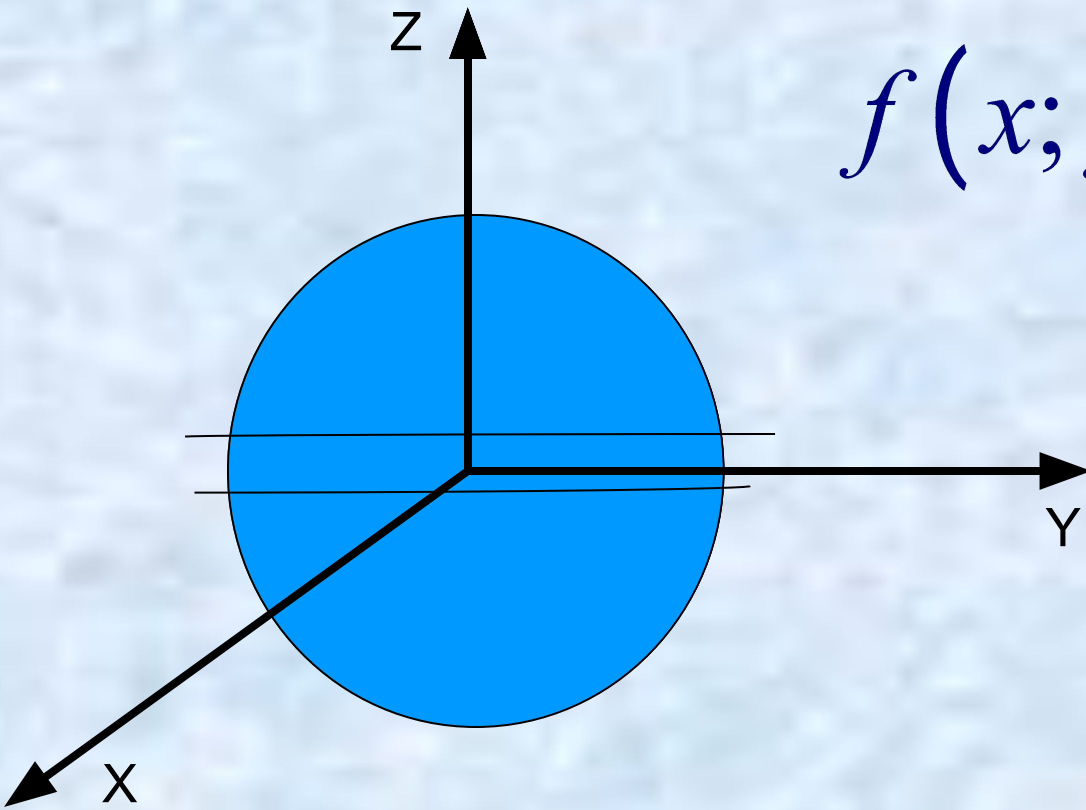




2^0 $\quad \left[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\right] = \left[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}\right] = \left[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}\right] = \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$

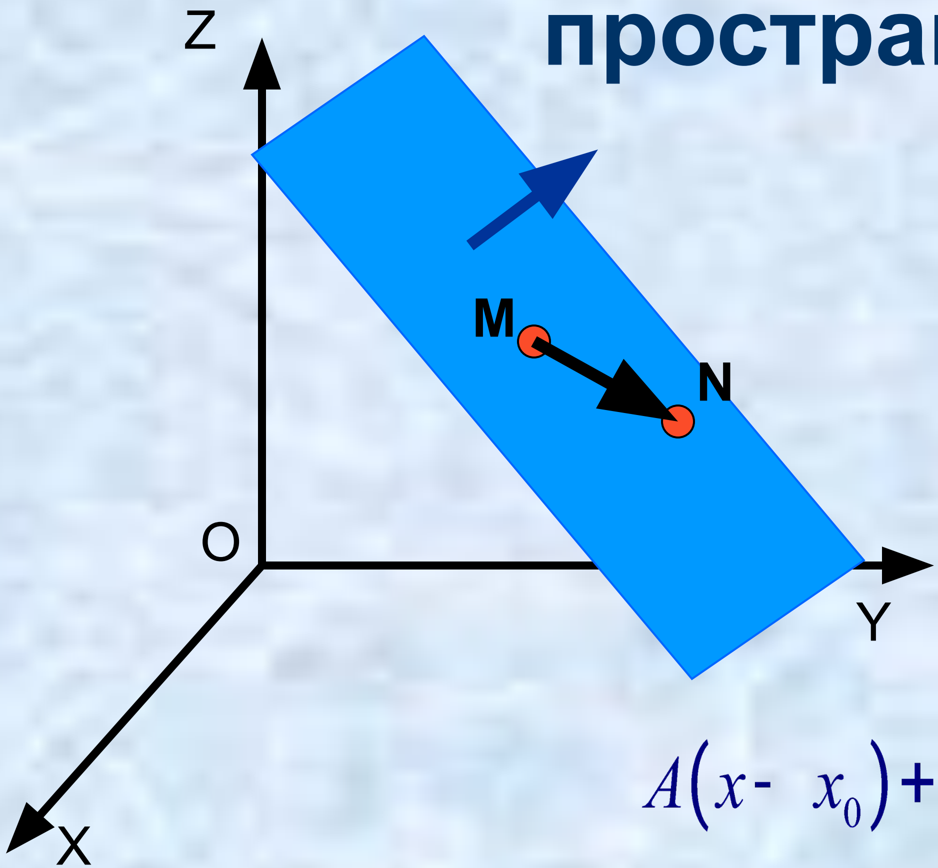
3^0 $\quad \vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c} = 0$ - условие компланарности

Поверхность в трехмерном пространстве



$$f(x;y;z) = 0$$

Плоскость в трехмерном пространстве



$$M(x_0; y_0; z_0), \quad N(x; y; z)$$

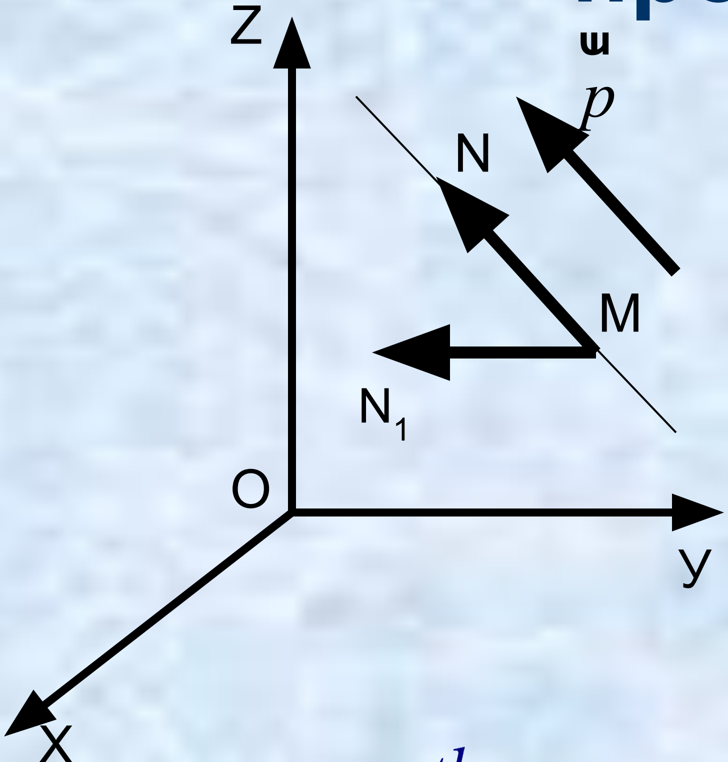
$$\overrightarrow{MN} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$$

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{MN} \Rightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{MN} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

Прямая линия в трехмерном пространстве



$$M\left(x_0;y_0;z_0\right),\quad N\left(x;y;z\right),\quad N_1\left(x_1;y_1;z_1\right)$$

$$\vec{p}\left(l;m;n\right)$$

$$\overrightarrow{MN}=\left(x-x_0;y-y_0;z-z_0\right)$$

$$\overrightarrow{MN}=t\vec{p}$$

$$\left(x-x_0;y-y_0;z-z_0\right)=\left(tl;tm;tn\right)$$

$$x-x_0=tl,\quad y-y_0=tm,\quad z-z_0=tn$$

$$x=x_0+tl,\quad y=y_0+tm,\quad z=z_0+tn$$

Прямая линия в трехмерном пространстве

2) $\vec{p}_0(\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma)$

$$x = x_0 + t\cos\alpha, \quad y = y_0 + t\cos\beta, \quad z = z_0 + t\cos\gamma$$

3) $$\frac{x - x_0}{l} = t, \quad \frac{y - y_0}{m} = t, \quad \frac{z - z_0}{n} = t,$$

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$