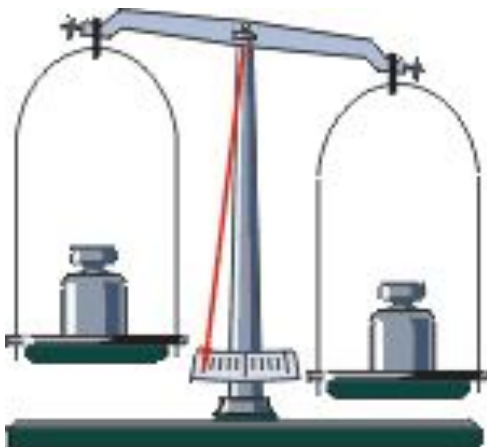


Погрешности измерений

Измерение - процесс нахождения значения физической величины опытным путем с помощью средств измерения.

Прямые измерения:

измеряемая величина определяется непосредственно по показанию прибора.



Косвенные измерения:

искомая величина получается вследствие математических операций над результатами прямых измерений.



ПОГРЕШНОСТИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Номер измер.	x_i , мм			
1	25,3			
2	25,0			
3	25,2			
4	25,5			
5	25,7			
Сред.				

1. Среднее значение измеряемой величины x :

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

2. Абсолютные погрешности измерений:

$$\Delta x_1 = |x_1 - \bar{x}| \quad \Delta x_2 = |x_2 - \bar{x}| \quad \Delta x_N = |x_N - \bar{x}|$$

Номер измер.	x_i , мм	Δx_i		
1	25,3	0		
2	25,0	-0,3		
3	25,2	-0,3		
4	25,5	0,2		
5	25,7	0,4		
Сред.	25,3			

3. Квадрат средней квадратичной погрешности:

$$S_x^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\Delta x_i)^2}{N(N-1)}$$

Номер измер.	x_i , мм	Δx_i	$(\Delta x_i)^2$	
1	25,3	0	0	
2	25,0	-0,3	0,09	
3	25,2	-0,3	0,01	
4	25,5	0,2	0,04	
5	25,7	0,4	0,16	
Сред.	25,3	$S_x^2 = 0,015$		

4. Вычисляем систематическую погрешность, вносимую прибором.

$\Delta x_{сист}$ - Соответствует цене деления прибора

5. Полная (абсолютная) погрешность:

$$\Delta x = \sqrt{S_x^2 + \Delta x_{сист}^2}$$

Номер измер.	x_i ,мм	Δx_i	$(\Delta x_i)^2$	Погрешности
1	25,3	0	0	$S_x = 0,12$ $\Delta X_{сист} = 0,1$ $\Delta X = 0,16$
2	25,0	-0,3	0,09	
3	25,2	-0,3	0,01	
4	25,5	0,2	0,04	
5	25,7	0,4	0,16	
Сред.	25,3	$S_x^2 = 0,015$		$X = 25,3 \pm 0,2$

поступательное

вращательное

ДВИЖЕНИЕ

прямолинейное

криволинейное

ДВИЖЕНИЕ

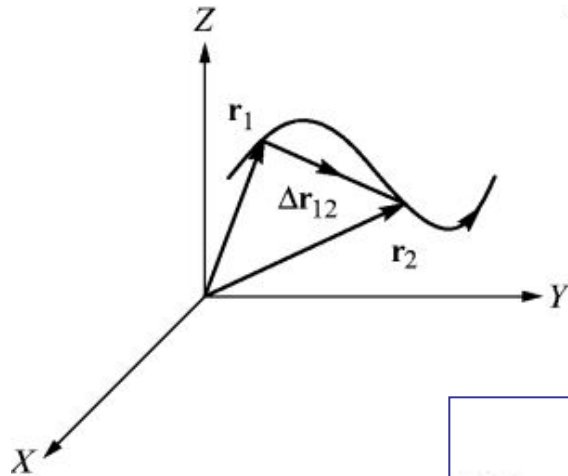
Равномерное
($v = \text{const}$)

Равнопеременное

Равноускоренное
($a > 0$)

Равнозамедленное
($a < 0$)

Кинематика материальной точки. Скорость. Ускорение.



Положение материальной точки в пространстве определяется радиус-вектором $\vec{r}$

$$\Delta \vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad - \text{перемещение}$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}' \quad - \text{скорость материальной точки}$$

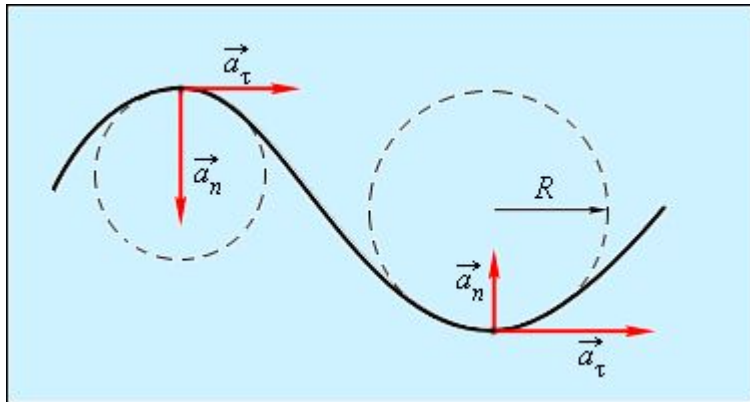
$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}' \quad - \text{ускорение материальной точки}$$

Движение тела вдоль оси ОХ:

$$x = x_0 + v_{0x}t \pm \frac{a_x t^2}{2} \quad v_x = v_{0x} + a_x t$$

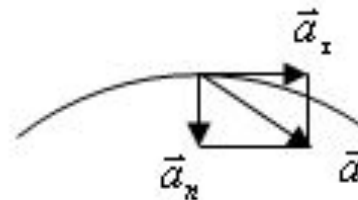
$$v^2 - v_0^2 = 2aS$$

Криволинейное движение



$\vec{a}_\tau$ - тангенциальное ускорение

$\vec{a}_n$ - нормальное (центростремительное) ускорение

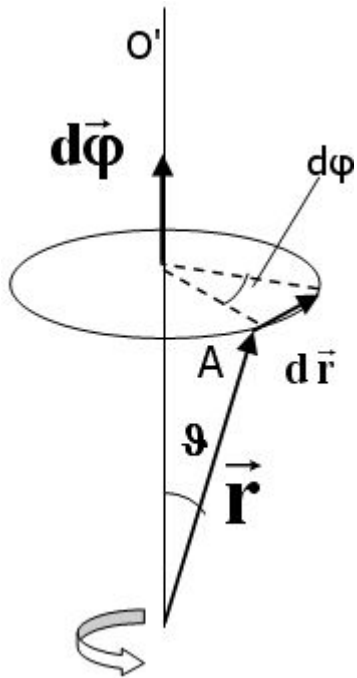


$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$$

$$\vec{a}_\tau = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad a_n = \frac{v^2}{R}$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

Вращательное движение



$d\varphi$ – угол поворота (рад)

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad - \text{угловая скорость (рад/с)}$$

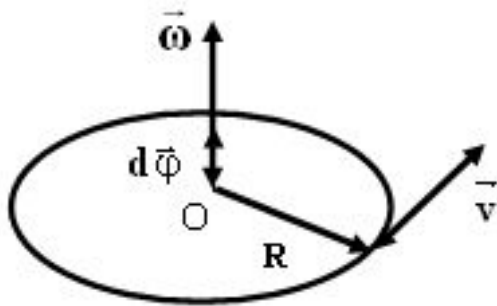
$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2} \quad - \text{угловое ускорение (рад/с}^2\text{)}$$

Период вращения – время, за которое материальная точка совершает один полный оборот:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Обратная периоду величина называется частотой вращения

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$



Циклическая частота: $\omega = 2\pi\nu$

Параметры вращательного движения можно связать с параметрами поступательного движения:

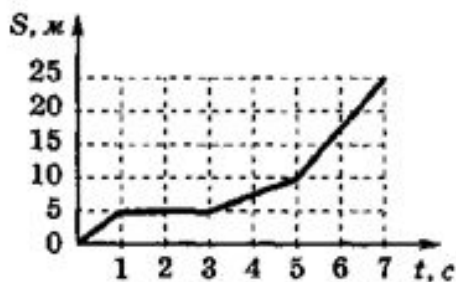
$$v = \omega R$$

$$a_{\tau} = \varepsilon R$$

$$a_n = \omega^2 R$$

Задача 1.

На рисунке представлен график зависимости пути S велосипедиста от времени t .
Определите интервал времени, когда велосипедист двигался со скоростью 5 м/с.



Решение:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

$$t = 0 \div 1 \text{ c: } \Delta S = 5 \text{ м} \Rightarrow v = \frac{5}{1} = 5 \text{ м/с}$$

$$t = 1 \div 3 \text{ c: } \Delta S = 0 \Rightarrow v = 0$$

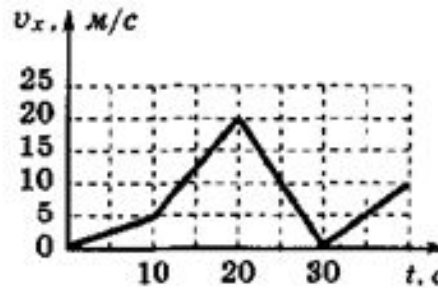
$$t = 3 \div 5 \text{ c: } \Delta S = 10 - 5 = 5 \text{ м} \Rightarrow v = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ м/с}$$

$$t = 5 \div 7 \text{ c: } \Delta S = 25 - 10 = 15 \text{ м} \Rightarrow v = \frac{15}{2} = 7,5 \text{ м/с}$$

Ответ: $t = 0 \div 1 \text{ c}$.

Задача 2.

Автомобиль движется по прямой улице. На графике представлена зависимость скорости автомобиля от времени. Модуль ускорения максимален в интервале времени



Решение:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad t = 0 \div 10 \text{ с: } \Delta v = 5 - 0 = 5 \text{ м/с} \Rightarrow a = \frac{5}{10} = 0,5 \text{ м/с}^2$$

$$t = 10 \div 20 \text{ с: } \Delta v = 20 - 5 = 15 \text{ м/с} \Rightarrow a = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ м/с}^2$$

$$t = 20 \div 30 \text{ с: } \Delta v = 0 - 20 = -20 \text{ м/с} \Rightarrow a = \frac{-20}{10} = -2 \text{ м/с}^2$$

$$t = 30 \div 40 \text{ с: } \Delta v = 10 - 0 = 10 \text{ м/с} \Rightarrow a = \frac{10}{10} = 1 \text{ м/с}^2$$

Ответ : $t = 20 \div 30 \text{ с}$.

Задача 3.

Уравнение движения материальной точки вдоль оси имеет вид: $x = 2 + t - 0,5t^3$.
Найти координату, скорость и ускорение точки в момент времени $t = 2\text{ с}$.

Решение:

$$x = 2 + 2 - 0,5 \cdot 2^3 = 0$$

$$v = \frac{dx}{dt} = x' \Rightarrow$$

$$v = (2 + t - 0,5t^3)' = 1 - 0,5 \cdot 3t^2 = 1 - 1,5t^2 = 1 - 1,5 \cdot 2^2 = 1 - 6 = -5 \text{ м/с}.$$

$$a = \frac{dv}{dt} = v' \Rightarrow$$

$$a = (1 - 1,5t^2)' = -3t = -3 \cdot 2 = -6 \text{ м/с}^2$$

Ответ: $x = 0$, $v = -5\text{ м/с}$, $a = -6\text{ м/с}^2$.

Задача 4.

Скорость тела задается уравнением вида $u = 4 + 2t + 3t^2$. Определить в конце третьей секунды пройденный телом путь.

Дано:

$$v = 4 + 2t + 3t^2 \text{ м/с}$$

$$t = 3\text{с}$$

$$S = ?$$

Решение:

$$S = \int_0^t v dt$$

$$S = \int_0^3 (4 + 2t + 3t^2) dt = \left(4t + \frac{2t^2}{2} + \frac{3t^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 4 \cdot 3 + 3^2 + 3^3 = 48 \text{ м}$$

Ответ: 48 м.

Задача 5.

Ускорение тела задается уравнением вида $a = 5 + 4t - 6t^2$. Определить скорость тела в конце второй секунды.

Дано:

Решение:

$$a = 5 + 4t - 6t^2 \text{ м/с}$$

$$t = 2\text{с}$$

$$v = ?$$

$$v = \int_0^t a dt$$

$$v = \int_0^2 (5 + 4t - 6t^2) dt = \left(5t + \frac{4t^2}{2} - \frac{6t^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2^3 = 2 \text{ м/с}$$

Ответ: 2 м/с.

Задача 6.

Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом 3 м задается уравнением $S = 0,4t^2 + 0,1t$. Определите нормальное, тангенциальное и полное ускорение тела через 1 секунду после начала движения.

Дано:

$$S = 0,4t^2 + 0,1t$$

$$t = 1c$$

$$R = 3m$$

$$a_n - ? \quad a_\tau - ?$$

$$a - ?$$

Решение:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$$a_n = \frac{dv}{dt}$$

$$a_\tau = \frac{v^2}{R}$$

$$v = \frac{dS}{dt} = 0,8t + 0,1 \text{ м/с}$$

$$a_n = \frac{dv}{dt} = 0,8 \text{ м/с}^2$$

$$v(t = 1c) = 0,9 \text{ м/с} \Rightarrow a_\tau = \frac{v^2}{R} = \frac{0,9^2}{3} = 0,27 \text{ м/с}^2$$

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = 0,84 \text{ м/с}^2$$

Задача 7.

Тело вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = 10 + 20t - 2t^2$ рад. Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии 0,1 м от оси вращения, для момента времени 4 с.

Дано:

$$\begin{array}{l} \varphi = 10 + 20t - 2t^2 \text{ рад} \\ r = 0,1 \text{ м} \\ t = 4 \text{ с} \\ \hline a = ? \end{array}$$

Решение:

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$$

$$a_\tau = \varepsilon r$$

$$a_n = \omega^2 r$$

$$a = \sqrt{\varepsilon^2 r^2 + \omega^4 r^2} = r \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (10 + 20t - 2t^2)' = 20 - 4t \quad \omega(t = 4\text{с}) = 20 - 16 = 4 \text{ рад/с}$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (20 - 4t)' = -4 \text{ рад/с}^2 \quad \underline{a = 0,1 \sqrt{4^2 + (-4)^2} = 1,65 \text{ м/с}^2}$$

Законы в механике

Первый закон Ньютона

Существуют системы отсчета, называемые инерциальными, в которых при отсутствии воздействия других тел частица сохраняет стационарное состояние движения: движется равномерно и прямолинейно (в частном случае - покоится).

Второй закон Ньютона

Сила, действующая на тело, равна произведению массы тела на сообщаемое этой силой ускорение

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Третий закон Ньютона

Силы, с которыми две материальные точки воздействуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$



Законы сил в механике

Сила гравитационного притяжения, действующая между двумя материальными точками, пропорциональна произведению масс точек и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена вдоль прямой, соединяющей эти точки, от одного тела к другому:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Сила тяжести

$$\vec{F} = m\vec{g}$$

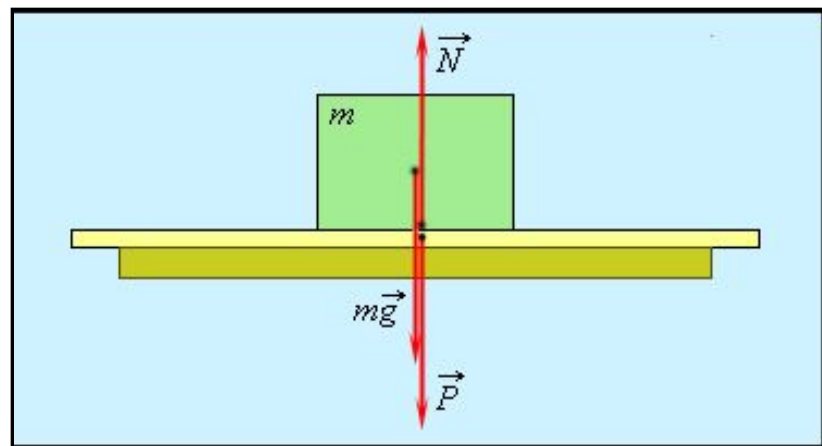
Сила реакции опоры

(сила нормального давления)

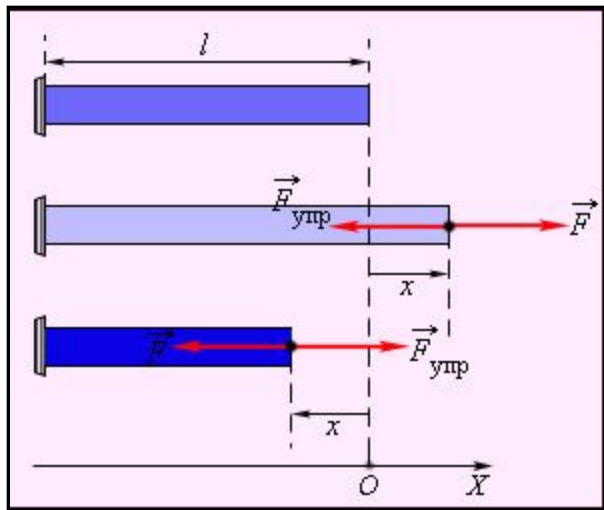
$$\vec{N}$$

Вес тела – это сила, с которой тело вследствие его притяжения к Земле действует на опору или подвес

$$\vec{P}$$

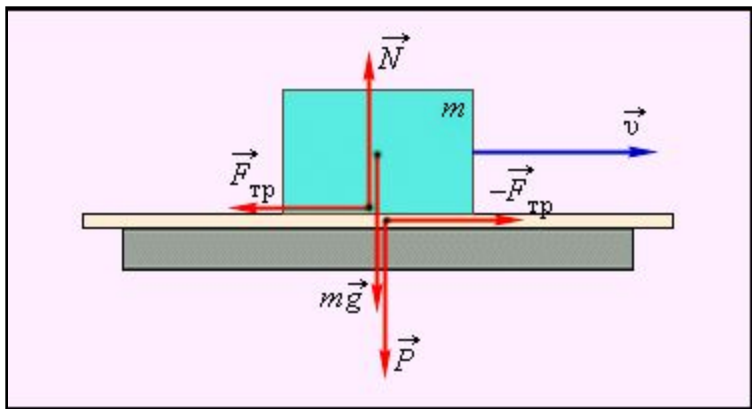


Упругая сила пропорциональна смещению материальной точки из положения равновесия и направлена к положению равновесия



$$F_{\text{упр}} = -kx$$

Сила трения скольжения, возникающая при скольжении данного тела по поверхности другого тела



$$F_{\text{тр}} = \mu N$$

Пример.

Поезд массой 1000 т на пути 500 м увеличивает скорость от 36 км/ч до 72 км/ч. Коэффициент сопротивления движению 0,005. Найти силу тяги локомотива, считая её постоянной.

Дано:

$$m = 10^6 \text{ кг}$$

$$s = 500 \text{ м}$$

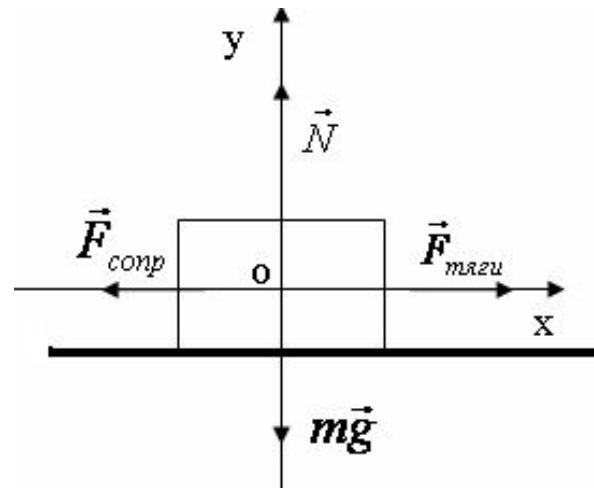
$$v_1 = 36 \text{ км/ч} = 10 \text{ м/с}$$

$$v_2 = 72 \text{ км/ч} = 20 \text{ м/с}$$

$$\mu = 0,005$$

$$F_{\text{тяги}} - ?$$

Решение:



$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{тяги}} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{N}$$

$$OX : ma = F_{\text{тяги}} - F_{\text{сопр}}$$

$$OY : 0 = N - mg$$

$$OX : F_{\text{тягу}} = ma + F_{\text{сопр}}$$

$$F_{\text{сопр}} = \mu N$$

$$OY : N = mg$$

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2s}$$

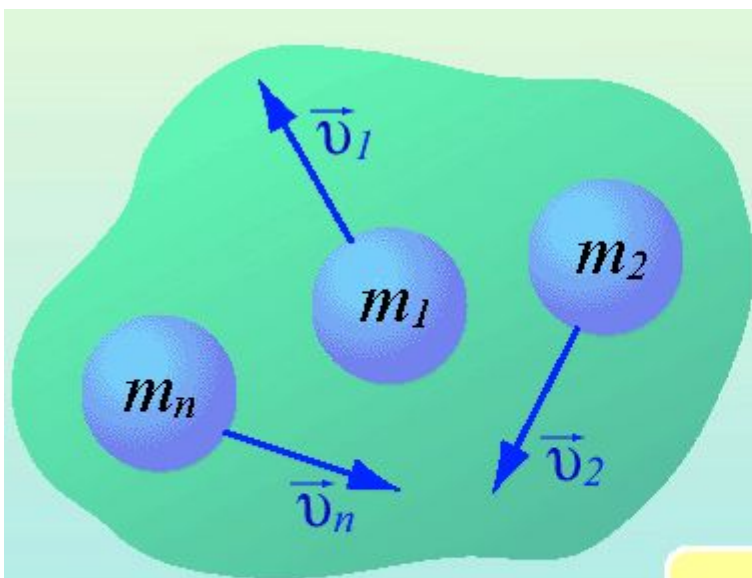
$$F_{\text{тягу}} = m \frac{v^2 - v_0^2}{2s} + \mu mg = 3,5 \cdot 10^5 \text{ H}$$

Законы сохранения в механике

Импульс тела – мера механического движения



$$\vec{p} = m\vec{v}$$



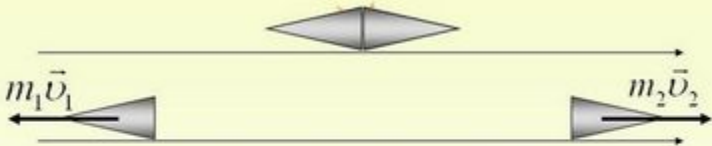
$$\vec{p}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i$$

$$\vec{p}_{\text{сист}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n$$

Закон сохранения импульса.

*В замкнутой системе **векторная сумма** импульсов всех тел, входящих в систему, остается постоянной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.*

Закон сохранения импульса

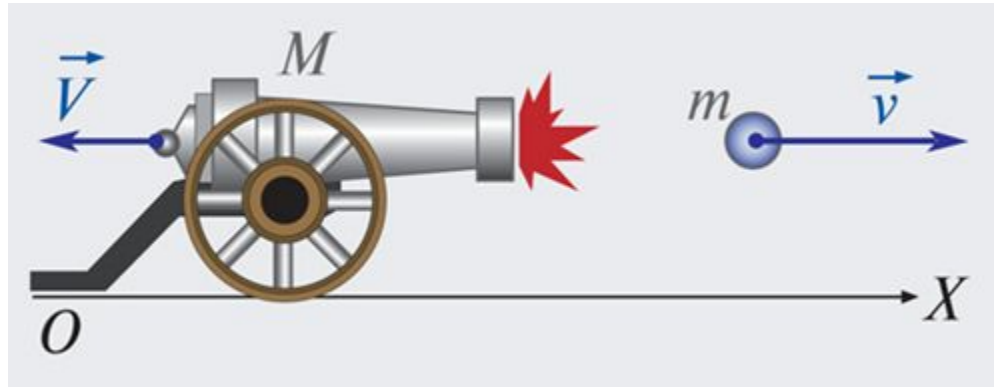


Реактивное движение

$$0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2$$
$$m_1 \vec{v}_{01} + m_2 \vec{v}_{02} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$
$$0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$
$$m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2$$
$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

Импульс силы – физическая векторная величина, равная произведению силы на время ее действия: $\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v} = \vec{F} \Delta t$

Второй закон Ньютона. Скорость изменения импульса тела равна действующей на тело силе F : $\frac{dp}{dt} = F$



При стрельбе из орудия возникает отдача – снаряд движется вперед, а орудие – откатывается назад. Снаряд и орудие – два взаимодействующих тела. Скорость, которую приобретает орудие при отдаче, зависит только от скорости снаряда и отношения масс.

$$MV + mv = 0; \quad V = - \frac{m}{M} v.$$

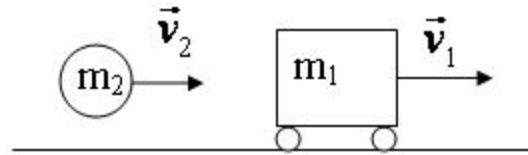
Пример 1.

По железнодорожному полотну движется платформа с песком массой 20 т со скоростью 1 м/с. Ее догоняет горизонтально летящий со скоростью 800 м/с снаряд массой 50 кг и врезается в песок без взрыва. С какой скоростью будет двигаться платформа с застрявшим в песке снарядом?

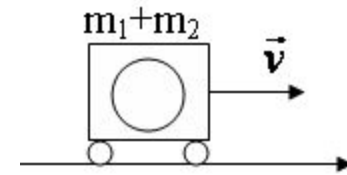
Дано:

Решение:

$$\begin{array}{l} m_1 = 20 \cdot 10^3 \text{ кг} \\ v_1 = 1 \text{ м/с} \\ m_2 = 50 \text{ кг} \\ v_2 = 800 \text{ м/с} \\ \hline v = ? \end{array}$$



$$P_{до} = m_1 v_1 + m_2 v_2$$



$$P_{после} = (m_1 + m_2) v$$

$$P_{до} = P_{после}$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 3 \text{ м/с}$$

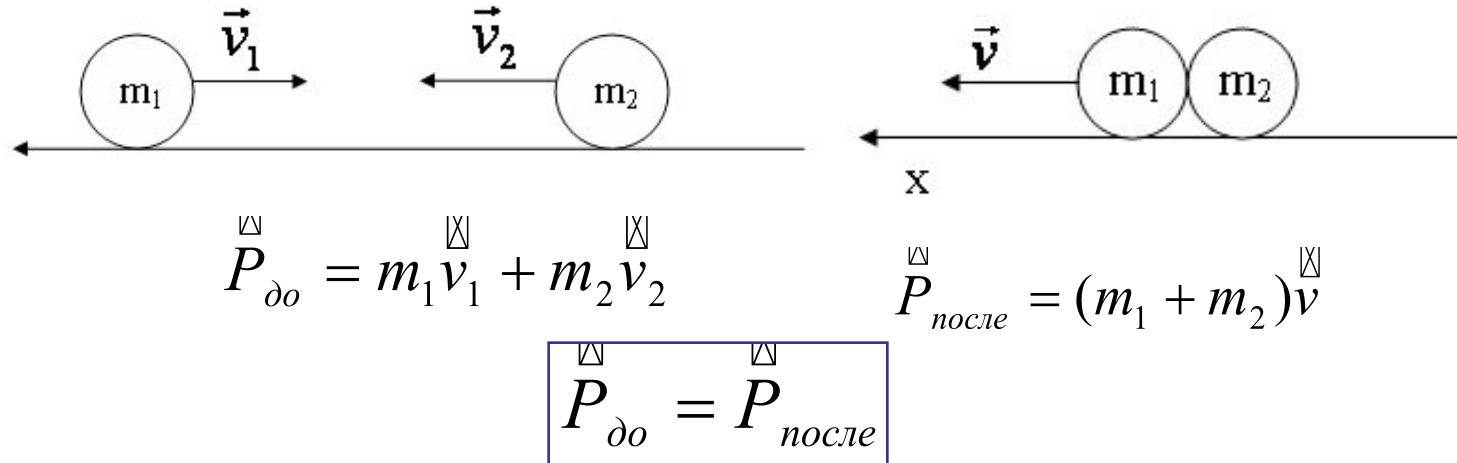
Пример 2.

По горизонтальной поверхности скользит без трения шар массой 5 кг; его скорость 2 м/с. Навстречу ему движется такой же по размерам шар массой 2 кг со скоростью 6 м/с. После неупругого удара шары движутся вместе. С какой скоростью и в какую сторону будут двигаться шары?

Дано:

Решение:

$$\begin{array}{l} m_1 = 5 \text{ кг} \\ v_1 = 2 \text{ м/с} \\ m_2 = 2 \text{ кг} \\ v_2 = 6 \text{ м/с} \\ v = ? \end{array}$$



$$OX : P_{до} = -m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad OX : P_{после} = (m_1 + m_2) v$$

$$v = \frac{-m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{7} \text{ м/с}$$

Закон сохранения механической энергии

Полная механическая энергия:

$$E = E_n + E_k$$

Кинетическая энергия: $E_k = \frac{mv^2}{2}$

Потенциальная энергия в поле силы тяжести Земли: $E_n = mgh$

Потенциальная энергия в поле упругих сил: $E_n = \frac{kx^2}{2}$

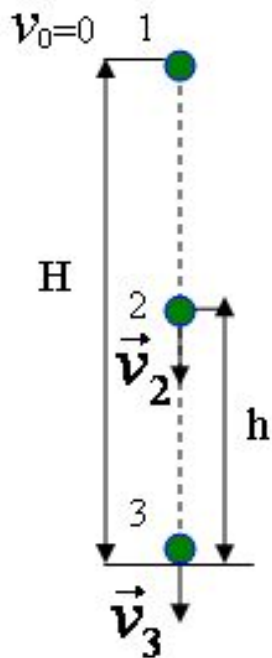
Если в замкнутой системе не действуют силы, трения и силы сопротивления, то сумма кинетической и потенциальной энергии всех тел системы остается величиной постоянной.

$$E = E_n + E_k = \text{const}$$

Пример 1.

Тело массы m падает свободно на землю с высоты H без начальной скорости.

$$E = E_n + E_k = \text{const}$$



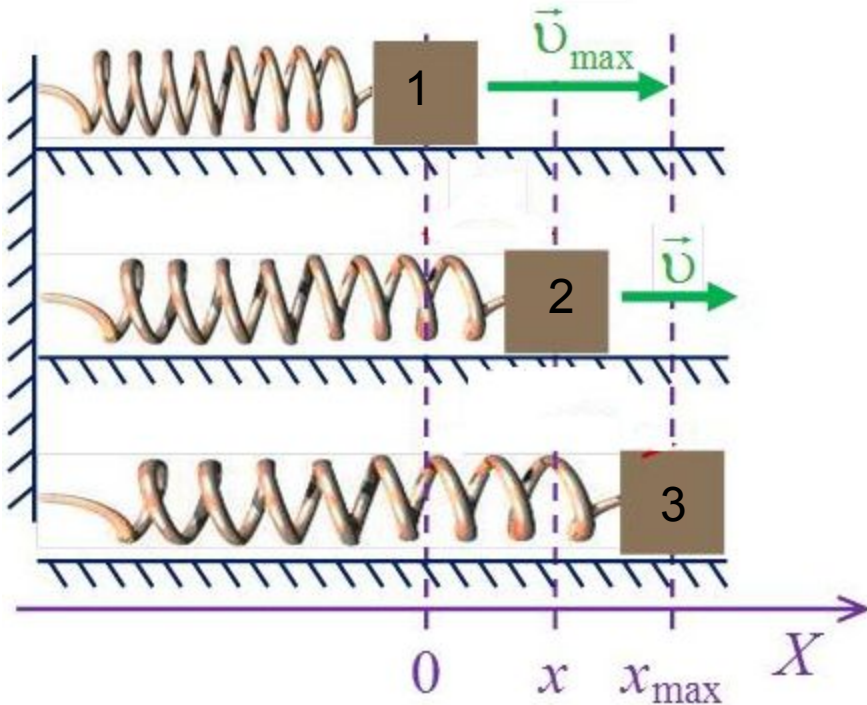
$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E_{n1} + E_{k1} \\ E_{n1} &= mgH, \quad E_{k1} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_1 = mgH$$

$$\left. \begin{aligned} E_2 &= E_{n2} + E_{k2} \\ E_{n2} &= mgh, \quad E_{k2} = \frac{mv_2^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_2 = mgh + \frac{mv_2^2}{2}$$

$$\left. \begin{aligned} E_3 &= E_{n3} + E_{k3} \\ E_{n3} &= 0, \quad E_{k3} = \frac{mv_3^2}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow E_3 = \frac{mv_3^2}{2}$$

$$E_1 = E_2 = E_3$$

Пример 2. Пружина жесткостью k растянута так, что её деформация равна $x_{\max}$.



$$E_1 = \frac{mv_{\max}^2}{2}$$

$$E_2 = \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$$E_3 = \frac{kx_{\max}^2}{2}$$

$$E_1 = E_2 = E_3$$

Пример 3.

Автомобиль, двигаясь с выключенным двигателем, на горизонтальном участке дороги имеет скорость 20 м/с. На какую высоту он поднимется до полной остановки вверх по склону горы под углом 30° к горизонту? Трением пренебречь.

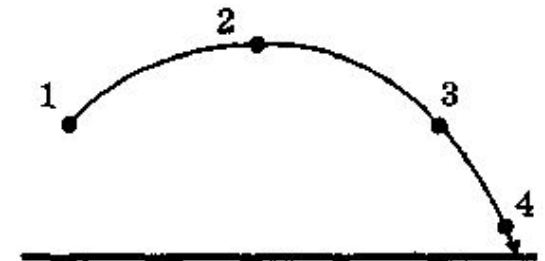
У основания наклонной плоскости: $E_{\text{полная}} = E_{\text{к}} = \frac{mv^2}{2}$

В момент остановки: $E_{\text{полная}} = E_{\text{п}} = mgH \Rightarrow mgH = \frac{mv^2}{2}$

$$H = 20 \text{ м}$$

Пример 4.

На рисунке представлена траектория движения тела, брошенного под углом к горизонту. В какой из четырех точек, отмеченных на траектории, потенциальная энергия тела имеет минимальное значение?



Ответ: 4

Пример 5.

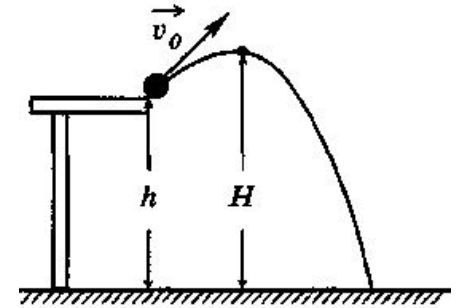
По какой из формул можно определить кинетическую энергию E_k , которую имеет тело в верхней точке траектории?

В начальный момент времени:

$$E_{\text{полная}} = \frac{mv_0^2}{2} + mgh$$

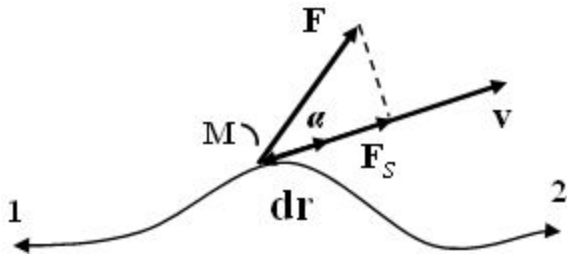
В верхней точке траектории:

$$E_{\text{полная}} = E_k + mgH$$



$$E_k = \frac{mv_0^2}{2} + mgh - mgH$$

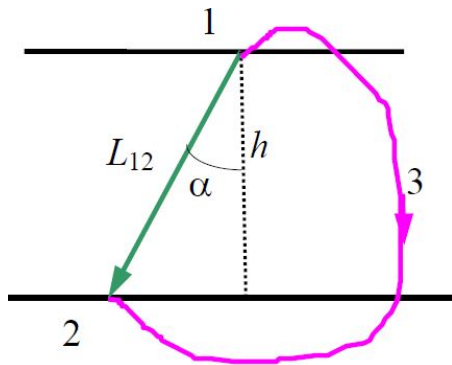
Работа силы



$$A = \overline{F} \overline{S} = FS \cos \alpha$$

Теорема о кинетической энергии: изменение кинетической энергии тела (материальной точки) за некоторый промежуток времени равно работе, совершенной силой, действующей на тело, за этот же промежуток времени

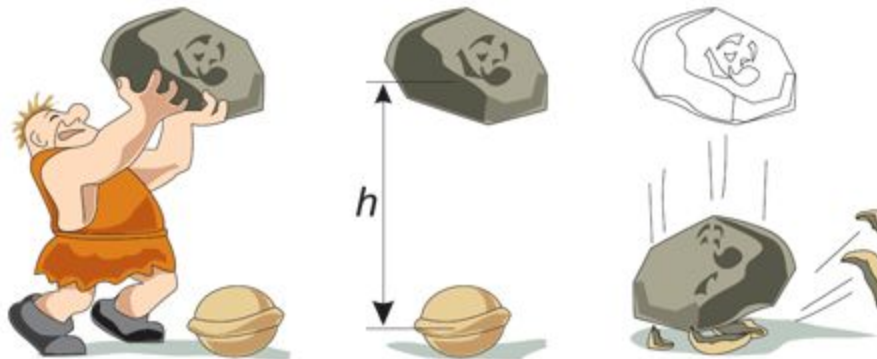
$$A = E_{k2} - E_{k1} = \Delta E_k$$



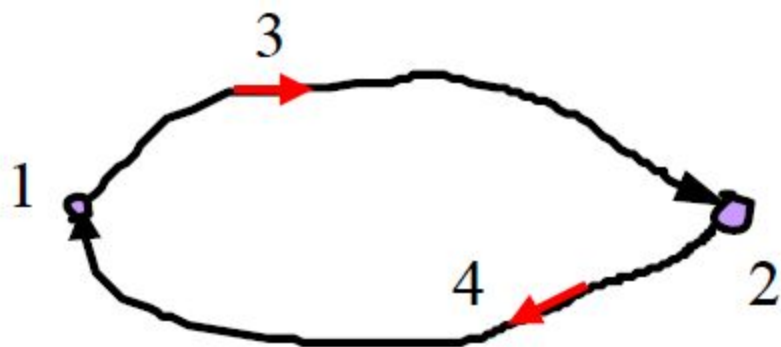
$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = \int_1^2 mg \cdot \cos \alpha \cdot dl = mg \cos \alpha L_{12} = mgh$$

Работа равна убыли потенциальной энергии:

$$A = E_{n1} - E_{n2} = -\Delta E_n$$



Консервативными называются силы, работа которых не зависит от пути перемещения, а определяется только начальной и конечной конфигурациями системы.

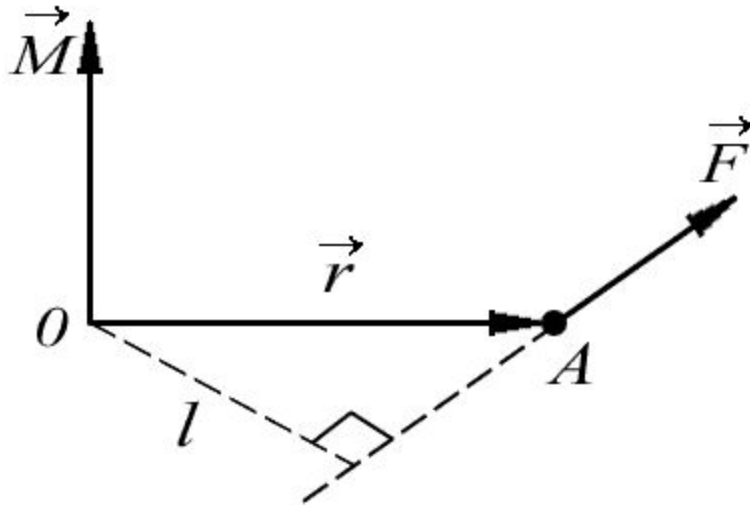


работа консервативных сил по замкнутому контуру равна 0.

$$\left. \begin{array}{l} A_{132} = A_{142} \\ A_{142} = -A_{241} \end{array} \right\} \Rightarrow A_{132} + A_{241} = 0$$

Динамика вращательного движения твердого тела

Момент силы



Вектором **момента силы** относительно точки называют векторное произведение радиус-вектора и вектора силы:

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]$$

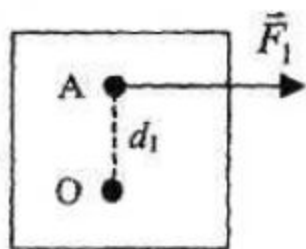
Направление вектора момента силы находится по правилу правого винта

Модуль вектора момента силы равен: $M = F \cdot r \cdot \sin \alpha$

$$[M] = H \cdot m$$

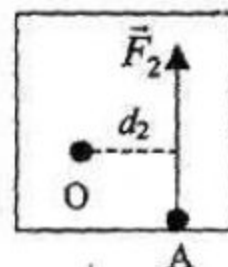
А - точка приложения силы, О - ось вращения.

$$M = Fd$$



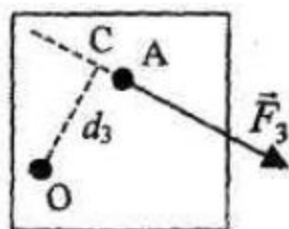
а)

а) ОА - плечо силы F_1 $M_1 = F_1 \cdot d_1 < 0$;



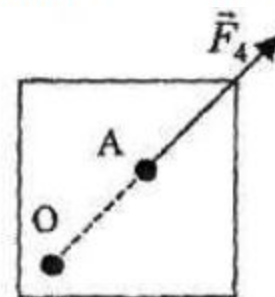
б)

б) ОВ - плечо силы F_2 $M_2 = F_2 \cdot d_2 > 0$;



в)

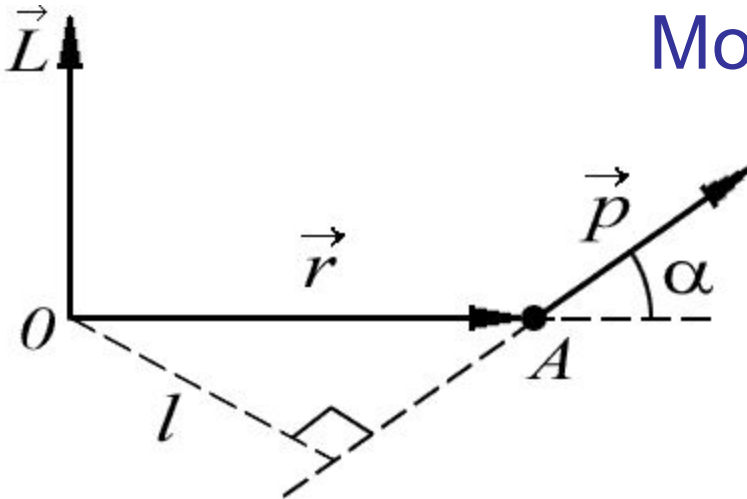
в) ОС - плечо силы F_3 $M_3 = F_3 \cdot d_3 < 0$;



г)

г) плечо силы $F_4 = 0$ $M_4 = 0$.

Момент импульса



Вектором **момента импульса** м.т. относительно точки O называют векторное произведение радиус-вектора и вектора импульса относительно этой же точки:

$$\vec{L} = [\vec{r}, \vec{P}]$$

Направление вектора момента импульса находится по правилу правого винта и совпадает с вектором угловой скорости.

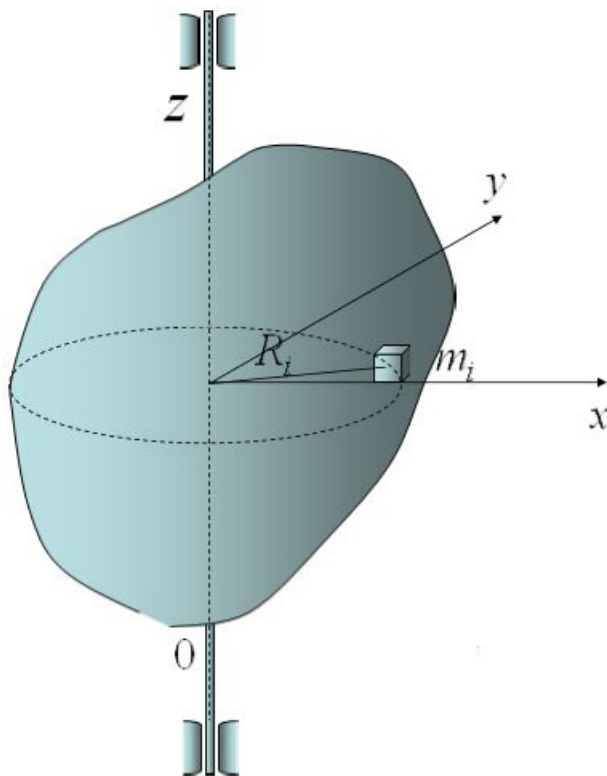
Модуль вектора момента импульса равен: $L = P \cdot r \cdot \sin \alpha$

$$[L] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}$$

Момент инерции

Момент инерции — скалярная — скалярная физическая величина — скалярная физическая величина, мера инертности во вращательном движении вокруг оси, подобно тому, как масса тела является мерой его инертности в поступательном движении.

Характеризуется распределением масс в теле: момент инерции равен сумме произведений элементарных масс на квадрат их расстояний до базового множества (точки, прямой или плоскости)

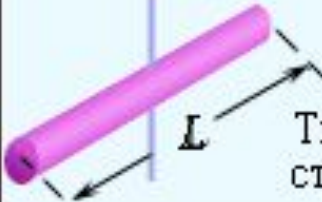


$$I = \sum m_i r_i^2$$

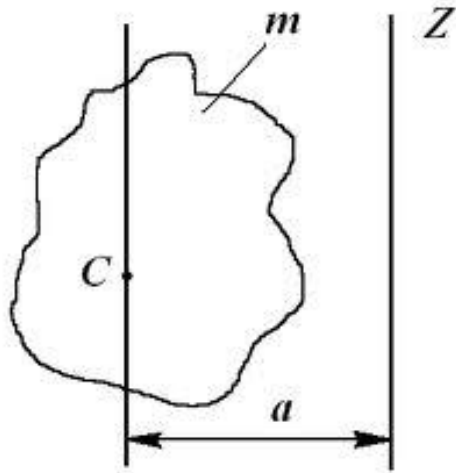
$$I = \int r^2 dm$$

$$[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Примеры:

$I_C = \frac{1}{12}ML^2$  Твердый стержень	$I_C = \frac{2}{5}MR^2$  Шар	$I_C = \frac{2}{3}MR^2$  Тонкостенная сферическая оболочка
$I_C = MR^2$  Тонкостенный цилиндр	$I_C = \frac{1}{2}MR^2$  Диск	$I_C = \frac{1}{4}MR^2$  Диск

Теорема Штейнера



Момент инерции абсолютно твердого тела I относительно произвольной оси вращения Z равен сумме момента инерции этого тела I_c относительно воображаемой оси, проходящей через центр масс тела параллельно рассматриваемой оси, и произведения массы тела m на квадрат расстояния a между этими осями:

$$I = I_c + ma^2$$

Уравнение моментов

$$\left. \begin{aligned} \overset{\square}{M} &= [\overset{\square}{r}, \overset{\square}{F}] \\ \frac{d\overset{\square}{p}}{dt} &= \overset{\square}{F}_{\text{внеш.}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \overset{\square}{M} = \left[\overset{\square}{r}, \frac{d\overset{\square}{p}}{dt} \right] = \frac{d}{dt} [\overset{\square}{r}, \overset{\square}{p}] = \frac{d\overset{\square}{L}}{dt}$$

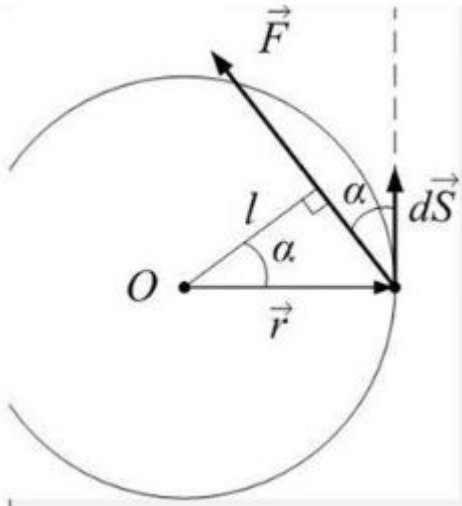
$$\boxed{\frac{d\overset{\square}{L}}{dt} = \overset{\square}{M}}$$

- Уравнение моментов

$$\overset{\square}{L} = I \cdot \overset{\square}{\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overset{\square}{M} = I\overset{\square}{\varepsilon}}$$

- Основное уравнение
динамики вращательного
движения

Работа при вращательном движении твердого тела.



Пусть тело повернулось на угол $d\varphi$ под действием силы $\vec{F}$

α – угол между силой и перемещением $d\vec{S}$

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки приложения силы

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S} = F \cos \alpha \cdot dS$$

$$dS = r \cdot d\varphi$$

$$dA = F \cos \alpha \cdot r \cdot d\varphi = F \cdot l \cdot d\varphi$$

$$M = F \cdot l$$

$$dA = M \cdot d\varphi$$

$$\Delta A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} dA = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M \cdot d\varphi$$

Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$E_{K, \text{ВРАЩ}} = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_K = E_{K, \text{ПОСТ}} + E_{K, \text{ВРАЩ}}$$

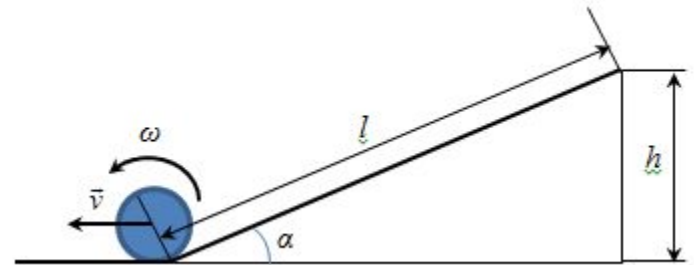
$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Пример. Определить линейную скорость v центра шара, скатившегося без скольжения с наклонной плоскости высотой $h = 1\text{ м}$.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \quad \omega = \frac{v}{R}$$

$$J = \frac{2}{5}mR^2, \quad mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mv^2}{5}$$

$$gh = \frac{v^2}{2} + \frac{2v^2}{5}, \quad gh = \frac{9v^2}{10}, \quad v = \sqrt{\frac{10gh}{9}}$$

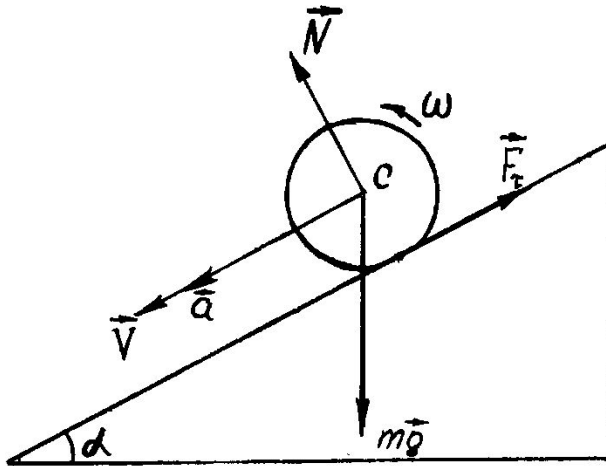


Кинетическая энергия вращающегося тела:

$$E_{K, \text{ВРАЩ}} = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$E_K = E_{K, \text{ПОСТ}} + E_{K, \text{ВРАЩ}}$$

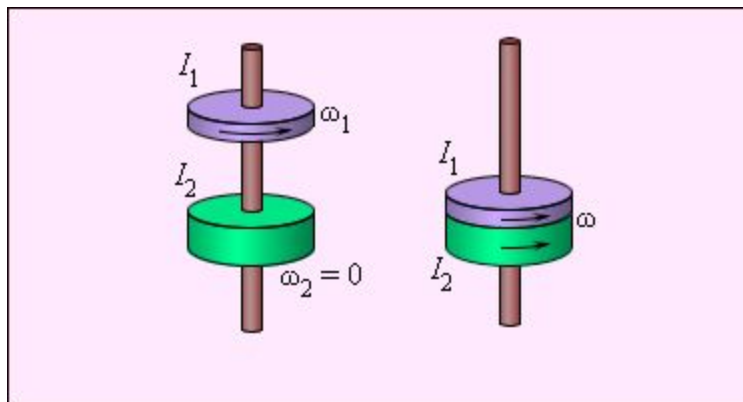
$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$



Закон сохранения момента импульса

Момент импульса замкнутой системы тел относительно любой неподвижной точки **не изменяется** с течением времени:

$$\vec{L} = \text{const}$$



$$\vec{L} = I \cdot \vec{\omega}$$

$$I_1 \omega_1 = (I_1 + I_2) \omega$$

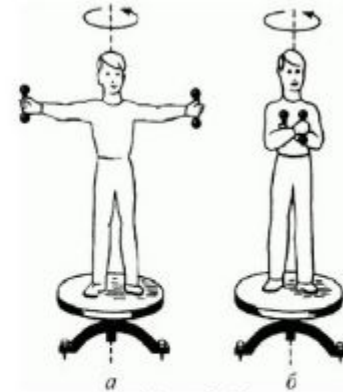
Для замкнутой системы тел:



$$\sum \vec{M}_{i \text{ веш.}} = 0$$

$$\Rightarrow \sum \frac{d\vec{L}_i}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \sum \vec{L}_i = \sum I_i \vec{\omega}_i = \text{const}$$



$$\omega_a < \omega_b$$

Векторная сумма моментов импульсов замкнутой системы тел есть величина постоянная.

