

# **Теорема Эйлера и правильные многогранники**

**Автор: Макарова Татьяна Павловна,  
учитель математики**

**ГБОУ средней общеобразовательной школы №618  
г. Москвы**

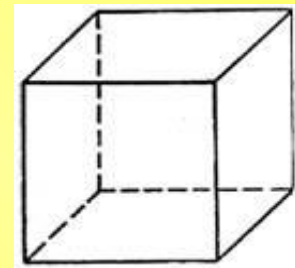
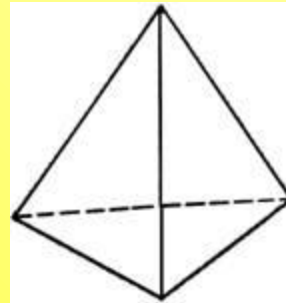
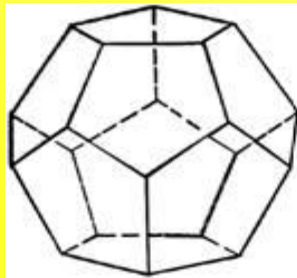
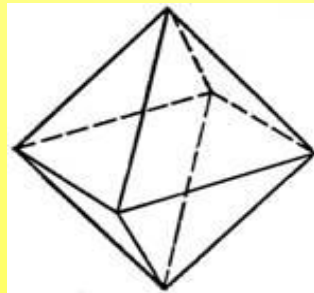
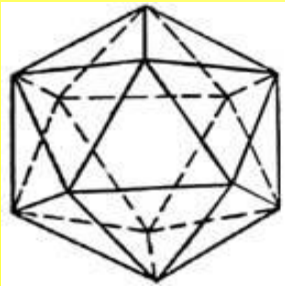
**Предмет: геометрия**

**Контингент: 10 класс**

**Учебник: Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., С.Б. Кардомцев и  
др. Геометрия: учебник для 10-11 кл. общеобр. учр.- М.:  
Просвещение, 2012.**

*Правильных многогранников вызывающе мало, но этот весьма скромный по численности отряд сумел пробраться в самые глубины различных наук*

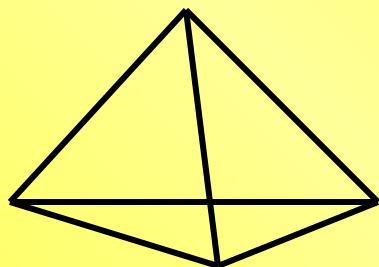
Л. Кэрролл



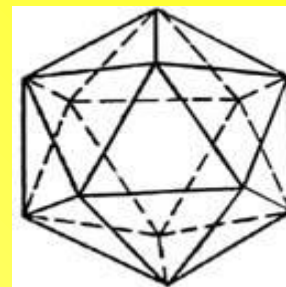
## Цель:

- Изучить классификацию правильных многогранников и их свойства
- Проанализировать связь геометрии, теории чисел и алгебры
- Применять теорему Эйлера к решению задач
- Развить представления о многогранниках и мире

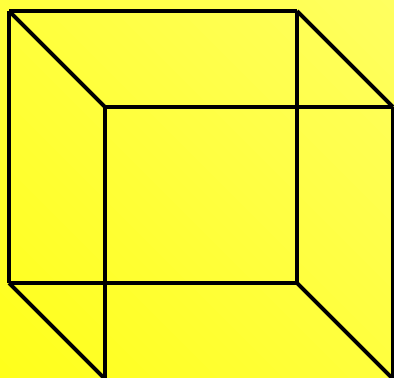
Тетраэдр



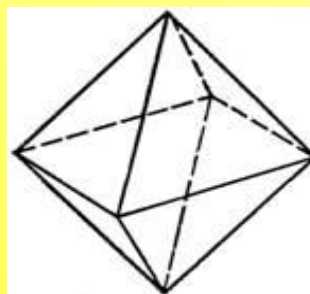
Икосаэдр



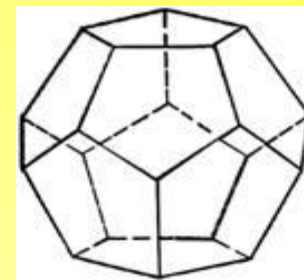
Правильные многогранники



Гексаэдр



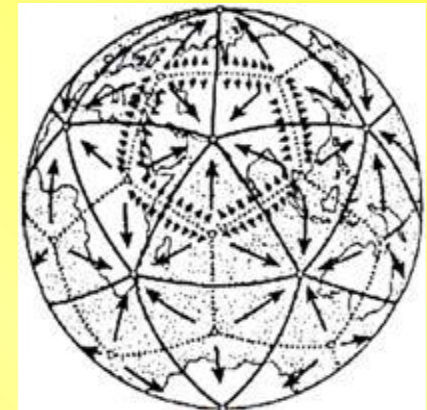
Октаэдр



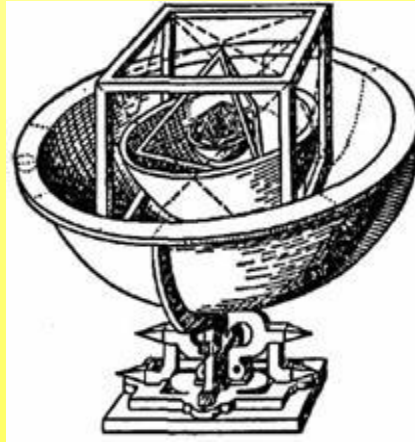
Додекаэдр

# Многогранники и научные фантазии ученых

- Правильные многогранники в философской картине мира Платона
- Кубок Кеплера
- Икосаэдро–додекаэдровая структура Земли



# Кубок Кеплера



Сфера орбиты Сатурна

Куб

Сфера орбиты Юпитера

Тетраэдр

Сфера орбиты Марса

Додекаэдр

Сфера орбиты Земли

Икосаэдр

Сфера орбиты Венеры

Октаэдр

Сфера орбиты Меркурия

# Исследовательская часть

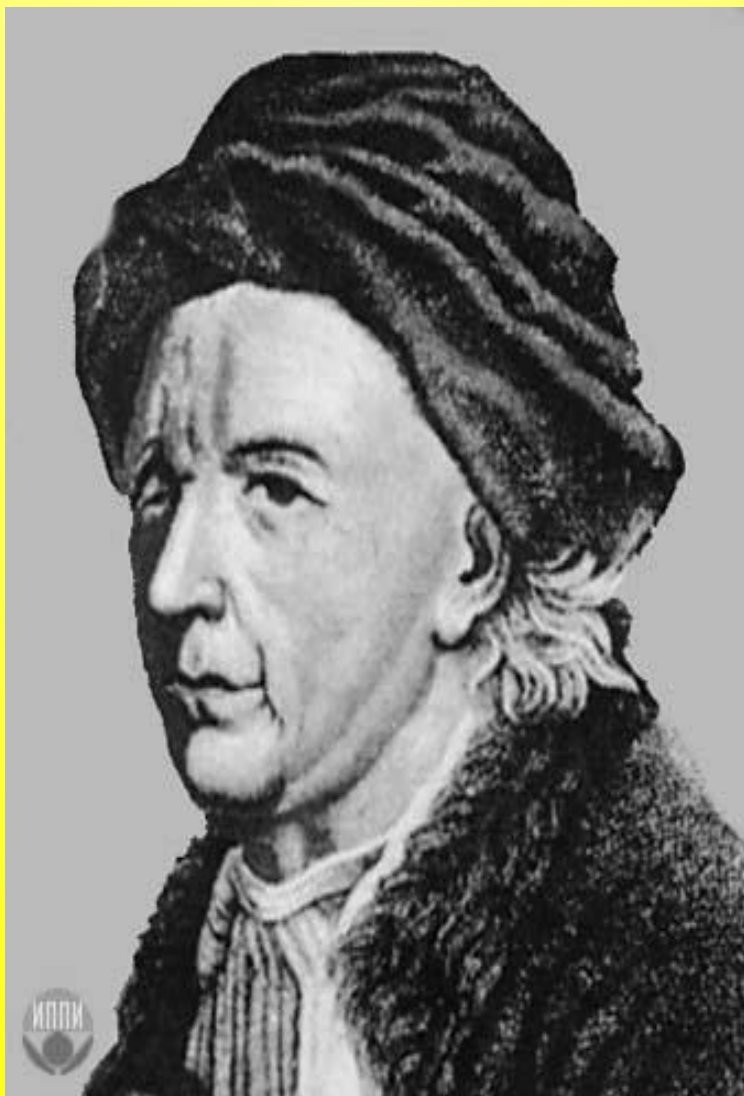
## Таблица 1

| <b>Правильный<br/>многогранни<br/>к</b> | <b>Число</b>  |               |              |
|---|---------------|---------------|--------------|
|   | <b>граней</b> | <b>вершин</b> | <b>рёбер</b> |
| Тетраэдр                                | 4             | 4             | 6            |
| Куб                                     | 6             | 8             | 12           |
| Октаэдр                                 | 8             | 6             | 12           |
| Додекаэдр                               | 12            | 20            | 30           |
| Икосаэдр                                | 20            | 12            | 30           |

# Таблица 2

| Правильный многогранник | Число                   |           |
|-------------------------|-------------------------|-----------|
|                         | граней и вершин (Г + В) | рёбер (Р) |
| Тетраэдр                | $4 + 4 = 8$             | 6         |
| Куб                     | $6 + 8 = 14$            | 12        |
| Октаэдр                 | $8 + 6 = 14$            | 12        |
| Додекаэдр               | $12 + 20 = 32$          | 30        |
| Икосаэдр                | $20 + 12 = 32$          | 30        |





Леонард Эйлер  
(1701-1783)  
Немецкий  
математик и  
физик

Формула Эйлера  
(для правильных многогранников)

$$Г + В - Р = 2$$

Выпуклый многогранник называется комбинаторно правильным, если все его грани имеют одинаковое число сторон ( $m$ ) и все его вершины имеют одинаковую степень ( $n$ ).

Будем считать, что Комбинаторно правильный многогранник имеет тип  $(m, n)$ , если каждая его грань является  $m$ -угольником, а степень каждой вершины равна  $n$ .

Зная, что  $m, n =$  или 3, или 4, или 5, отсюда следует то, что может существовать девять различных пар  $(m, n)$ :

$(3,3)$   $(3,4)$   $(3,5)$   $(4,3)$   $(4,4)$   $(4,5)$   $(5,3)$   $(5,4)$   $(5,5)$

Решая систему уравнений  $B - P + \Gamma = 2$ ,  $2P = m\Gamma$ ,  $2P = nB$  относительно чисел  $B$ ,  $P$  и  $\Gamma$ , получаем:

$$B = \frac{4m}{2m + 2n - mn}$$

$$P = \frac{2mn}{2m + 2n - mn}$$

$$\Gamma = \frac{4n}{2m + 2n - mn}$$

Так как  $B, \Gamma, P > 0$  отсюда следует, что  $2m + 2n - mn > 0$   
или :

$$(m-2)(n-2) < 4$$

Из всех девяти пар чисел  $(m, n)$  неравенству удовлетворяют только следующие пять:

$(3, 3), (4, 3), (3, 4), (5, 3), (3, 5)$ .

## Таблица 4

| Название многогранника | $m$ | $n$ | $B$ | $P$ | $\Gamma$ |
|------------------------|-----|-----|-----|-----|----------|
| Тетраэдр               | 3   | 3   | 4   | 6   | 4        |
| Гексаэдр               | 4   | 3   | 8   | 12  | 6        |
| Октаэдр                | 3   | 4   | 6   | 12  | 8        |
| Додекаэдр              | 5   | 3   | 20  | 30  | 12       |
| Икосаэдр               | 3   | 5   | 12  | 30  | 20       |

# Применение теоремы Эйлера при решении задач

**Задача 1.** Футбольный мяч шьется из кусков кожи двух типов: пятиугольных и шестиугольных (которые, кроме формы, отличаются еще и цветом). Можно ли сшить мяч из одних только шестиугольных кусков?

**Решение:**

Мяч можно рассматривать как сферу, разбитую на сферические грани — многоугольники. При этом выполнены соотношения

$$B - P + \Gamma = 2; \quad \Gamma = \Gamma_3 + \Gamma_4 + \Gamma_5 + \dots ;$$
$$B = B_3 + B_4 + \dots + B_m \quad ; \quad 2P = 3B_3 + 4B_4 + 5B_5 + \dots \quad ;$$
$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots$$

и все следствия из них, в частности, неравенство:

$$3\Gamma_3 + 2\Gamma_4 + \Gamma_5 \geq 12.$$

Из него заключаем, что мяч нельзя сшить только из шестиугольных кусков.

**Ответ:** нет, нельзя.

**Задача 2.** Если все грани многогранника – треугольники, то число граней четное. Кроме того, в этом случае  $P = 3V - 6$ ,  $\Gamma = 2V - 4$ .

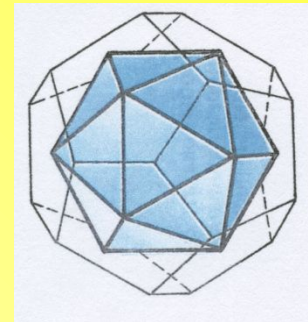
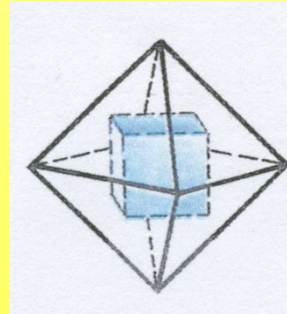
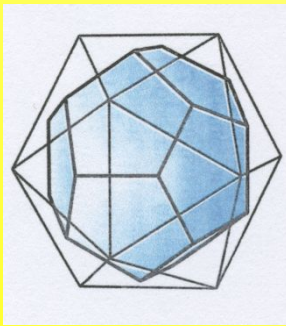
**Решение:**

Из условия задачи и из равенства  $2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + 5\Gamma_5 + \dots$  имеем  $2P = 3\Gamma$ , откуда следует первое утверждение. Исключая из равенств  $V - P + \Gamma = 2$  и  $2P = 3\Gamma$  сначала  $\Gamma$ , затем  $P$ , получим требуемые равенства:

$$P = 3V - 6, \Gamma = 2V - 4.$$

# Основные свойства

- Двойственность
- Наличие 3 сфер: вписанной, описанной и касающейся всех ребер правильного многогранника



# Практическая часть

## Расчет объема додекаэдра

Объем додекаэдра равен:

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{полн}} \cdot r = \frac{1}{3} \cdot 12S_5 \cdot r = 4 \cdot S_5 \cdot r$$

Где  $S_5$  – площадь правильного пятиугольника

$$S_5 = \frac{5a^2}{4 \operatorname{tg} 36^\circ}$$



Найдем значение  $\operatorname{tg} 36^\circ$  в радианах:

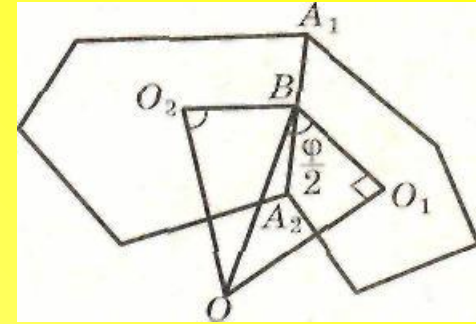
$$\operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}.$$

Подставив это значение, получим значение для  $S_5$ :

$$S_5 = \frac{5a^2}{4\sqrt{5 - 2\sqrt{5}}}$$

Найдем  $r$  :

Изобразим фрагмент додекаэдра:  
биссектор угла с ребром  $A_1A_2$   
перпендикулярен плоскости  $(O_1O_2O)$ ,  
 $\angle O_1BO_2$  — линейный угол  
двугранного угла с ребром  $A_1A_2$ ,  $BO$  —  
его биссектриса.



$OO_1 = OO_2 = r$ ,  $BO_1 = BO_2 = r_0$ , где  $r_0$  — радиус окружности,  
вписанной в грань. Тогда

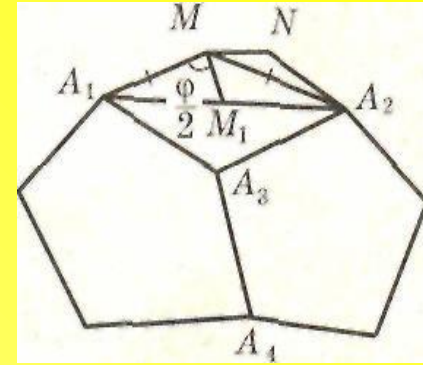
$$r = r_0 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

очевидно (из треугольника  $O_1OB$ ).

Найдем  $\frac{\varphi}{2}$ :

$A_1A_2$  — диагональ грани,  $A_1M \perp A_3A_4$ ,  
 $A_2M \perp A_3A_4$ .  $\angle A_1MA_2 = \varphi$  — искомый,  
 $A_1M$  — расстояние от вершины  $A_1$  до  
стороны  $A_3A_4$ .  $M_1$  — середина  $A_1A_2$  и так  
как треугольник  $A_1MA_2$  —  
равнобедренный, то

$$\angle A_1MM_1 = \frac{\varphi}{2}$$



Но  $d = 2a \cos 36^\circ$ , то есть

$$A_1M_1 = d/2 = a \cos 36^\circ = a(1 + \sqrt{5})/4.$$

Из прямоугольного треугольника  $A_1MA_3$  имеем  $A_1M = A_1A_3 \sin 72^\circ$ .

То есть:

$$A_1M = a \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{8} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$$

Из прямоугольного треугольника  $A_1MM_1$ :

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{A_1M_1}{A_1M} = \frac{2}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Найдем  $\cos \frac{\varphi}{2}$ :

$$\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}$$

Осталось найти  $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ :

$$\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

В итоге:

$$r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} 36^\circ} \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{4\sqrt{5}-2\sqrt{5}}$$

Окончательно:

$$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}.$$

**Ответ:**  $V = a^3(15+7\sqrt{5})/4$

# Таблица 5

| Многогранник | Объем                     | Площадь поверхности             |
|--------------|---------------------------|---------------------------------|
| Тетраэдр     | $V = (a^3\sqrt{2})/12$    | $S = a^2\sqrt{3}$               |
| Куб          | $V = a^3$                 | $S = 6a^2$                      |
| Октаэдр      | $V = (a^3\sqrt{2})/3$     | $S = 2a^2\sqrt{3}$              |
| Додекаэдр    | $V = a^3(15+7\sqrt{5})/4$ | $S = 3a^2\sqrt{5}(5+2\sqrt{5})$ |
| Икосаэдр     | $V = 5a^3(3+\sqrt{5})/12$ | $S = 5a^2\sqrt{3}$              |

# Многогранники и живая природа

## Феодария



Скелет этих одноклеточных организмов по форме напоминает икосаэдр. Такая форма помогает феодариям преодолеть давление водной толщи.

# Итоги работы

- Невозможность существования иных правильных выпуклых многогранников
- Систематизированы свойства правильных многогранников
- Топология – теорема Эйлера – геометрия
- Применение при решении задач
- Неживая природа – правильные многогранники – живая природа



# Используемая литература

- 1. Смирнова И.М. В мире многогранников. -М, 2010.
- 2. Атанасян Л.С., Бутузов В.Ф., С.Б. Кардомцев и др. Геометрия: учебник для 10-11 кл. общеобр. учр.- М.: Просвещение, 2012.
- 3. <http://virlib-old.eunnet/>
- 4. <http://school.techno.ru>
- 5. <http://tmn.fio.ru>

**Спасибо за внимание!**