

Конус

Подготовила:

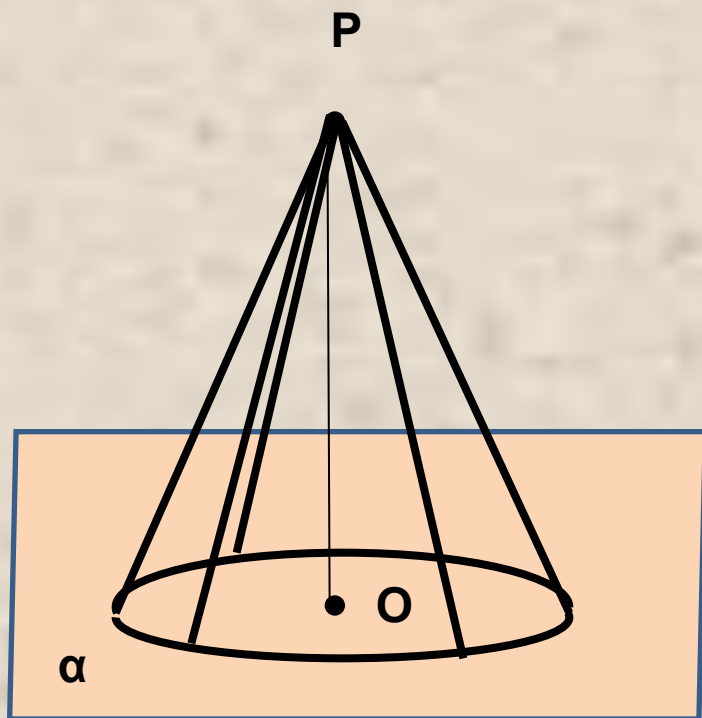
учитель математики

МОУ сош №30 имени А.И.Колдунова

Кутоманова Е.М.

2010-2011 учебный год

Понятие конуса

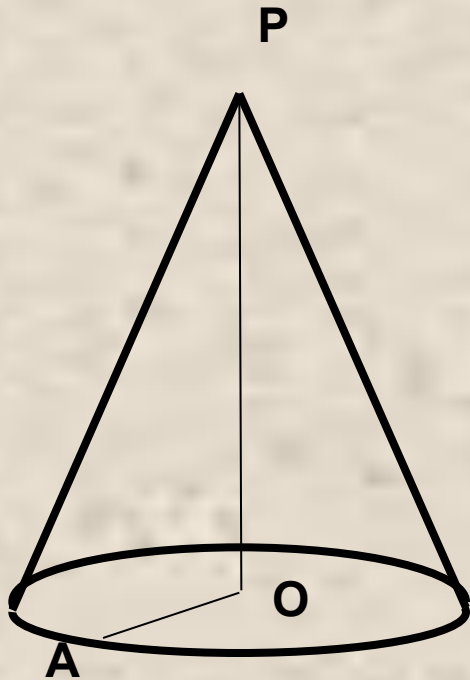


В плоскости α рассмотрим окружность L с центром O и отрезок OP , перпендикулярный плоскости.

Каждую точку окружности соединим с точкой P . Поверхность, образованная этими отрезками, называется конической поверхностью, а сами отрезки – образующими конической поверхности.

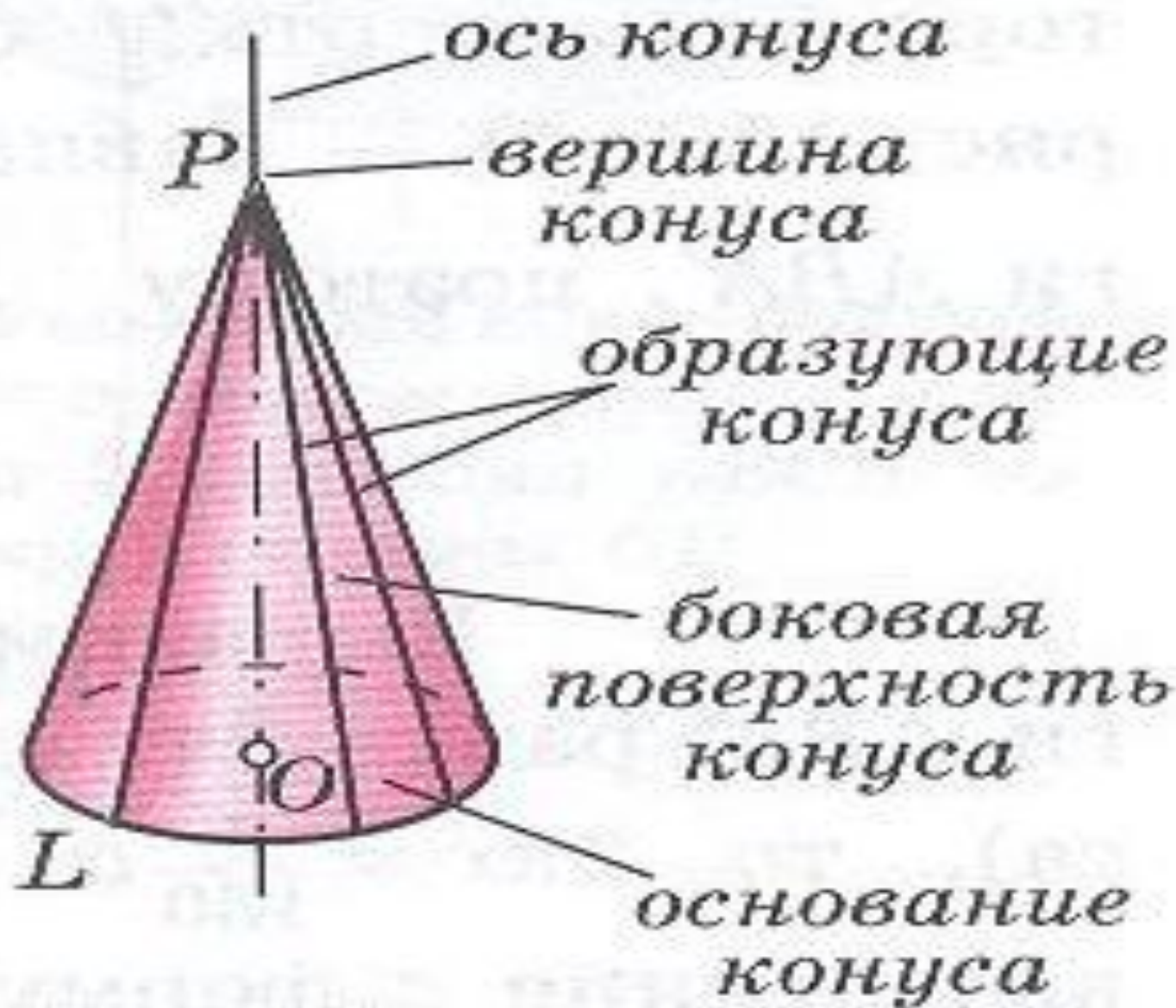
Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей L , называется конусом.

Элементы конуса

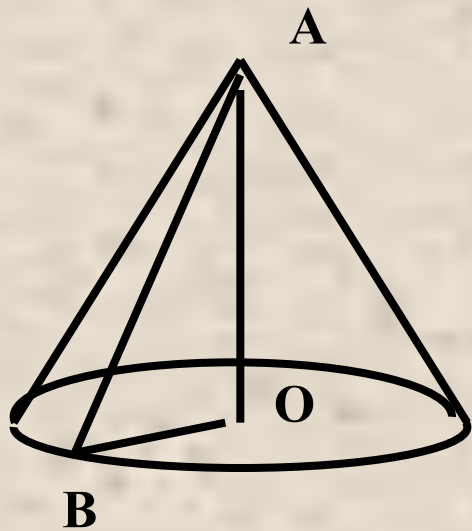


- Коническая поверхность – боковая поверхность конуса.
- Круг – основание конуса.
- Точка P – вершина конуса.
- Образующие конической поверхности – образующие конуса.
- Прямая OP – ось конуса.
- Отрезок OP – высота конуса.
- Отрезок OA – радиус основания.

Замечание: Все образующие конуса равны друг другу.



№1. Высота конуса равна 4, радиус основания -3.
Найдите образующую конуса.



Дано: $OA=4, OB=3.$

Найти: $AB.$

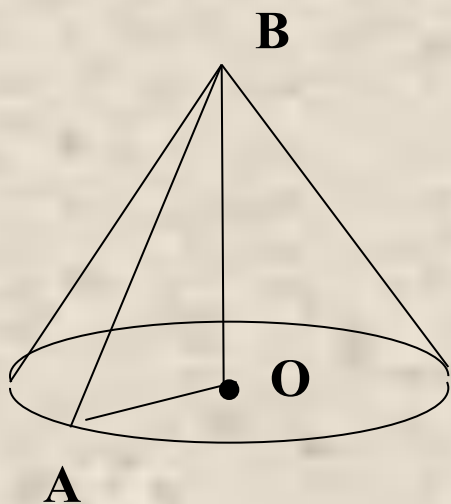
Решение.

Из $\triangle AOB$: $AO^2 + BO^2 = AB^2,$

$AB^2 = 9 + 16 = 25,$

$AB = 5.$

№2. Образующая конуса, равная a , наклонена к плоскости основания под углом α . Найдите площадь основания конуса.



Дано: $AB = a$, $\angle BAO = \alpha$

Найти: $S_{\text{осн.}}$

Решение.

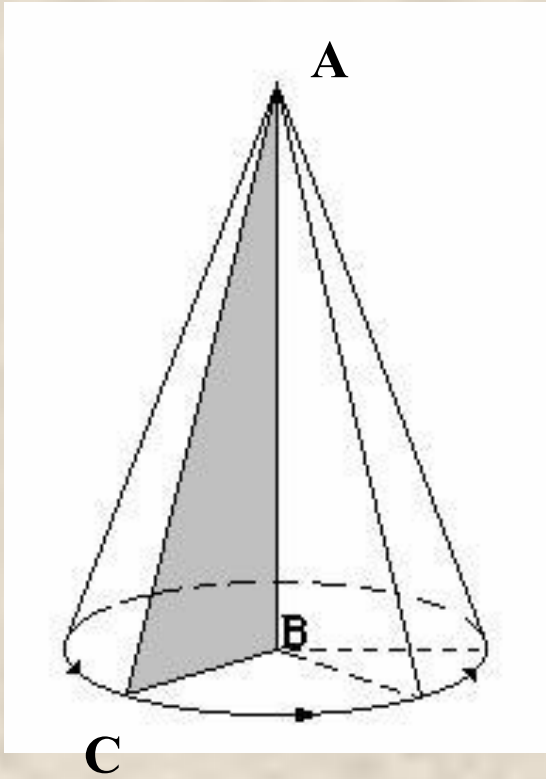
$$S_{\text{осн.}} = \pi r^2,$$

Из $\triangle ABO$:

$$\cos \alpha = \frac{AO}{AB}, \quad AO = AB \cos \alpha, \quad AO = a \cos \alpha.$$

$$S = \pi a^2 \cos^2 \alpha.$$

Конус – тело вращения...



Конус можно получить путем вращения прямоугольного треугольника вокруг одного из его катетов

Площадь боковой поверхности конуса

Площадь боковой поверхности конуса равна площади её развёртки – кругового сектора:

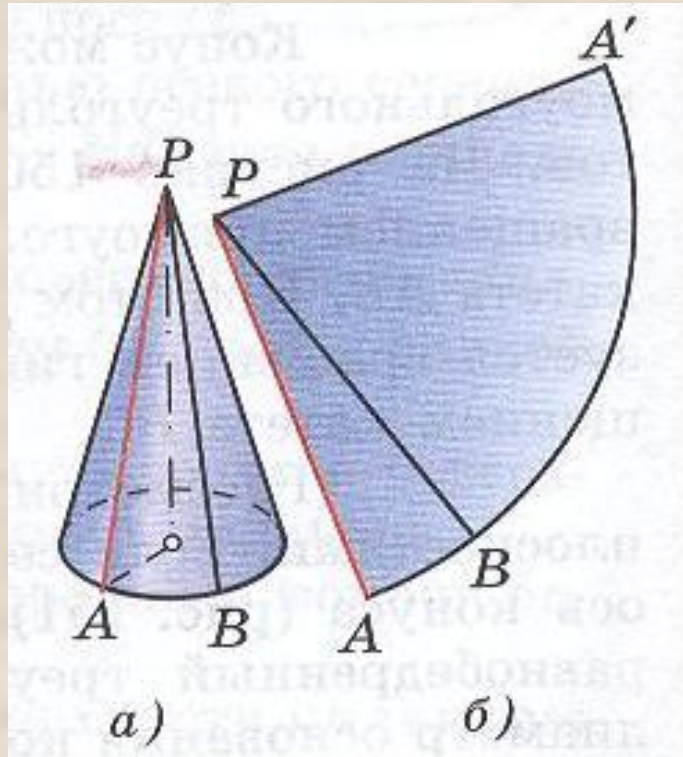
$$S = \frac{\pi l^2}{360} \alpha,$$

где l - образующая конуса, α - градусная мера дуги ABA' .

Длина дуги ABA' равна длине окружности основания конуса, т.е.

$$2\pi r = \frac{\pi l^2}{180} \alpha, \alpha = \frac{360r}{l}, S = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \frac{360r}{l} = \pi r l.$$

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению половины длины окружности основания на образующую.



$$S_{\text{бок.}} = \pi r l$$

№3. Развёрткой боковой поверхности конуса является сектор с дугой α . Найдите α , если высота конуса равна 12, радиус основания 5.

Дано:

$$h=12, r=5.$$

Найти: α .

$$\alpha = \frac{360r}{\boxtimes}$$

$$\boxtimes = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13,$$

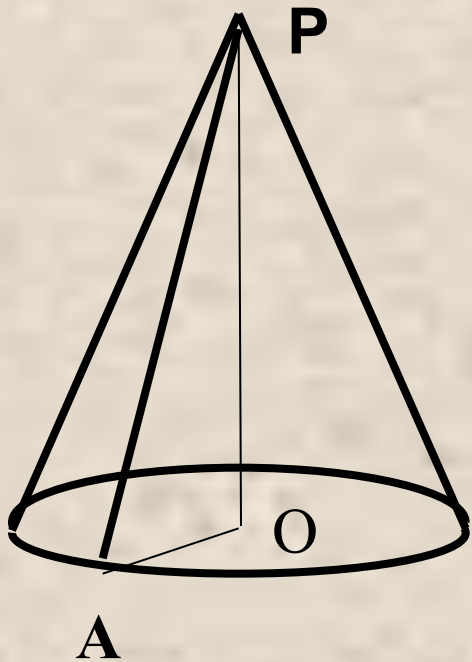
$$\alpha = \frac{360 \cdot 5}{13} = \frac{1800}{13}.$$

Площадь полной поверхности конуса называется суммой площадей боковой поверхности и основания.

$$S_{\text{пол.}} = \pi r l + \pi r^2 = \pi r (r + l)$$

$$S_{\text{пол.}} = \pi r (r + l)$$

№4 Прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4
вращается вокруг большего катета. Вычислите площадь
боковой и полной поверхностей тела вращения.



Дано: $\triangle AOP$, $OP=4$, $AO=3$.

Найти: $S_{\text{бок.}}$, $S_{\text{пол.}}$

Решение.

$$S_{\text{бок.}} = \pi r l$$

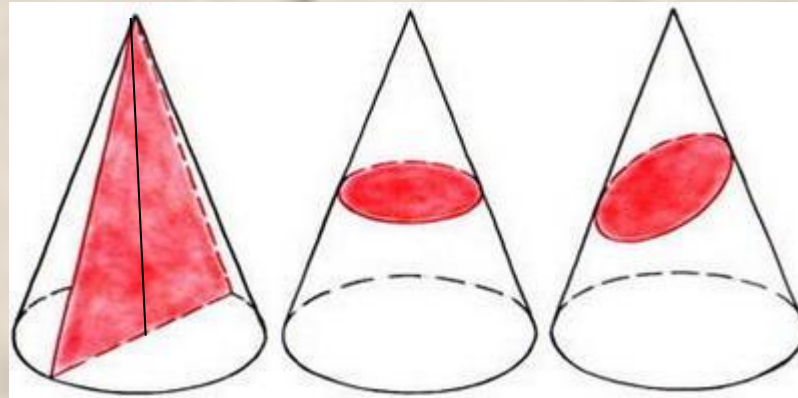
$$l = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{6 + 16} = \sqrt{25} = 5,$$

$$S_{\text{бок.}} = \pi \cdot 3 \cdot 5 = 15\pi,$$

$$S_{\text{пол.}} = \pi r (r + l)$$

$$S_{\text{пол.}} = \pi \cdot 3 (3 + 5) = 24\pi.$$

Сечение конуса различными ПЛОСКОСТЯМИ.



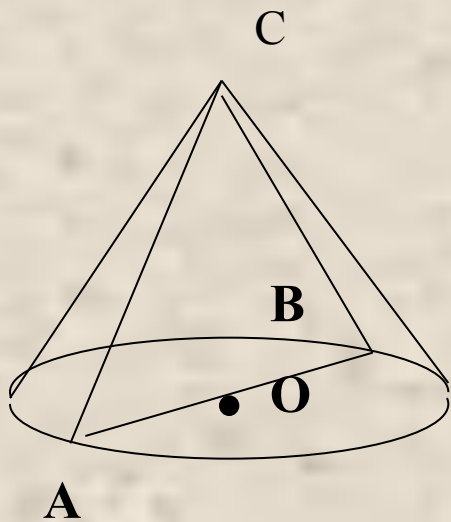
а)

б)

в)

- а) секущая плоскость проходит через ось конуса, осевое сечение равнобедренный треугольник.
- б) секущая плоскость проходит перпендикулярно к оси конуса, сечением является круг.
- в) сечение, пересекающее только одну часть кругового конуса и не параллельное ни одной его образующей – эллипс.

№5. Осевое сечение конуса- прямоугольный треугольник, радиус основания равен 4. Найдите площадь сечения.



Дано: $OA=4$,

ΔABC - прямоугольный

Найти: $S_{\text{сеч.}}$

Решение.

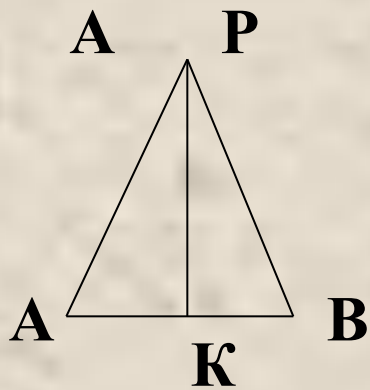
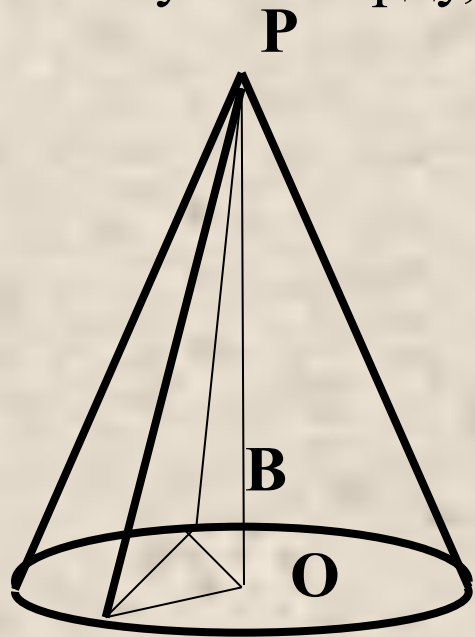
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC, \quad AC = BC,$$

$$AO = BO = 4, AB = 8$$

$$2AC^2 = AB^2, 2AC^2 = 64, AC^2 = 32, AC = 4\sqrt{2},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} (4\sqrt{2})^2 = \frac{1}{2} \cdot 32 = 16.$$

№6. Образующая конуса равна l , радиус основания равен r .
 Найдите площадь сечения, проходящего через вершину конуса и хорду, стягивающую дугу в 120°



Дано: $\sphericalangle AOB = 120^\circ$, $AP = l$, $OA = r$.

Найти: $S_{\text{сеч.}}$

Решение.

$\triangle ABP$ - искомое сечение.

$\triangle ABP$ - равнобедренный, т.к. $AP = BP = l$.

$S_{\triangle ABP} = 0,5 \cdot AB \cdot PK$, $PK \perp AB$.

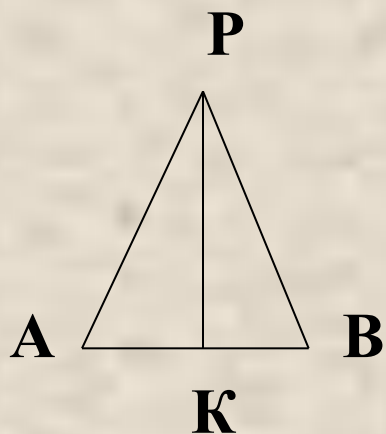
$\triangle AOB$ - равнобедренный, $AO = BO = r$.

По теореме косинусов:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO \cdot BO \cos 120^\circ,$$

$$AB^2 = r^2 + r^2 - 2r^2(-0,5) = 3r^2,$$

$$AB = r \cdot \sqrt{3}$$



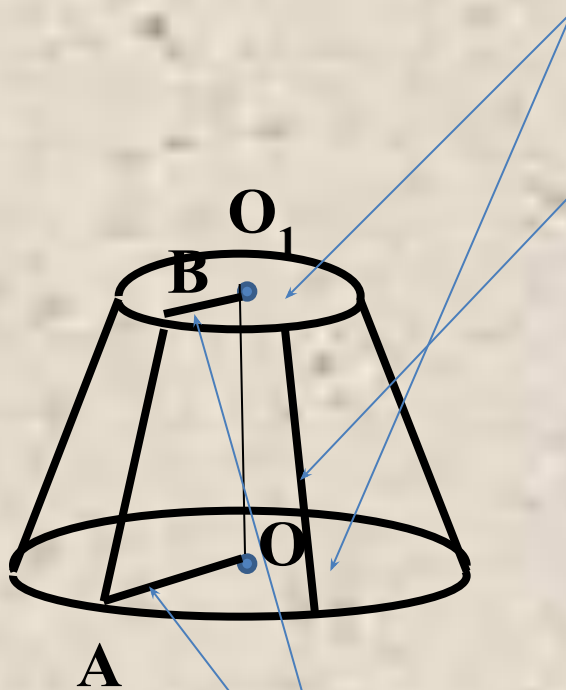
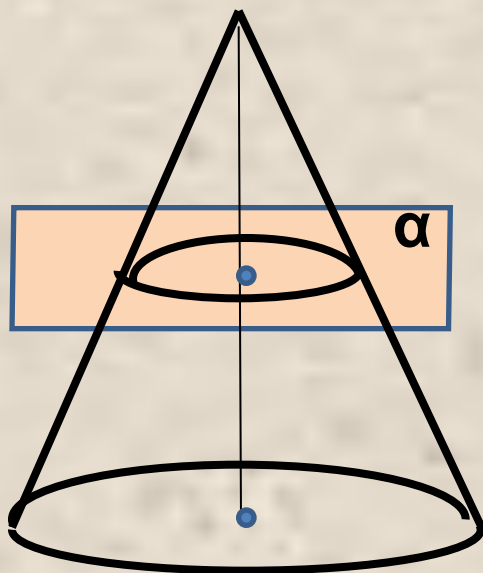
$$AK = \frac{r\sqrt{3}}{2},$$

$$\text{Из } \triangle APK: PK^2 = AP^2 - AK^2,$$

$$PK = \sqrt{\boxtimes^2 - \frac{3r^2}{4}} = \sqrt{\frac{4\boxtimes^2 - 3r^2}{4}} = \frac{\sqrt{4\boxtimes^2 - 3r^2}}{2}$$

$$S_{\text{сеч.}} = 0,5 \cdot r\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{4\boxtimes^2 - 3r^2}}{2} = \frac{r\sqrt{12\boxtimes^2 - 9r^2}}{4}.$$

Понятие усечённого конуса.



Основани
я

Образующая конуса

AOO_1B – прямоугольная трапеция, основания – радиусы усечённого конуса, OO_1 - высота.

Радиусы оснований

*Площадь боковой поверхности
усечённого конуса равна
произведению полусуммы длин
окружностей на образующую.*

$$S_{\text{бок.}} = \pi (r + r_1) l$$