МАТЕМАТИКА

Уравнения:

равносильные уравнения, уравнения следствия уравнения, содержащие знак модуля

Подготовил учитель математики 2МсКК Тищенко Г.Н.

ЛЕКЦИЯ № 1

Литература

Уравнения:
равносильные уравнения,
уравнения следствия,
уравнения, содержащие знак модуля.

План лекции

- Равносильные уравнения
- Уравнения следствия
- Определение модуля действительного числа
- Алгоритмы решения уравнений, содержащих знак модуля:

$$|f(x)| = a, a \in R$$

Определение

Выражение, состоящее из чисел, переменных , знаков арифметических и алгебраических операций, скобок, знака равенства, называется уравнением.

$2x + 3 = -5$

$\sqrt{x+4} = 3$

$\log_2(3x-4) = 2$

$-x^2 + 4x + 3 = 0$

$2^{2x} + 2^x - 6 = 0$

$\frac{2}{1-x} + \frac{3}{1-x^2} = \frac{5}{1+x}$

$\sin 2x + \cos x = 0$

Определе

Корнем уравнения называется такое значение переменной, при подстановке которого в уравнение оно обращается в истинное равенство.

Решить уравнение это значит найти все его корни или доказать что таковых нет.

Приме р 1

$2x + 3 = -5$

Решение

$2x + 3 = -5,$

$2x = -8,$

$x = -4.$

Ответ: *- 4.*

Приме р 2

$-x^2 + 3x - 4 = 0$

Решение

$-x^2 + 3x - 4 = 0,$

$x^2 - 3x + 4 = 0,$

$D = b^2 - 4ac;$

$D = (-3)^2 - 4 \cdot 4 = 9 - 16 = -7;$

$D < 0$

Ответ: уравнение корней не имеет.

Определение

Уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают или они не имеют решений.

Пример

1 **уравнение** $x^2 + 2x + 5 = 0.$

Корни *1* **уравнения:** нет

2 **уравнение** $2x^2 + 1 = 0.$

Корни *2* **уравнения:** нет

Уравнения равносильны, так они решений не имеют.

Определе

Пусть даны *2* уравнения $f(x) = g(x)$ и $p(x) = q(x)$

.

Если любой корень *1* уравнения является корнем *2* уравнения, то *2* уравнение называют уравнением

Пример

1 уравнение $x^2 = 1.$

Корни *1* уравнения $x = \pm 1.$

2 уравнение $\sqrt{x} = 1.$

Корни *2* уравнения $x = 1.$

2 уравнение является уравнением следствием *1* уравнения.

Задание №1.

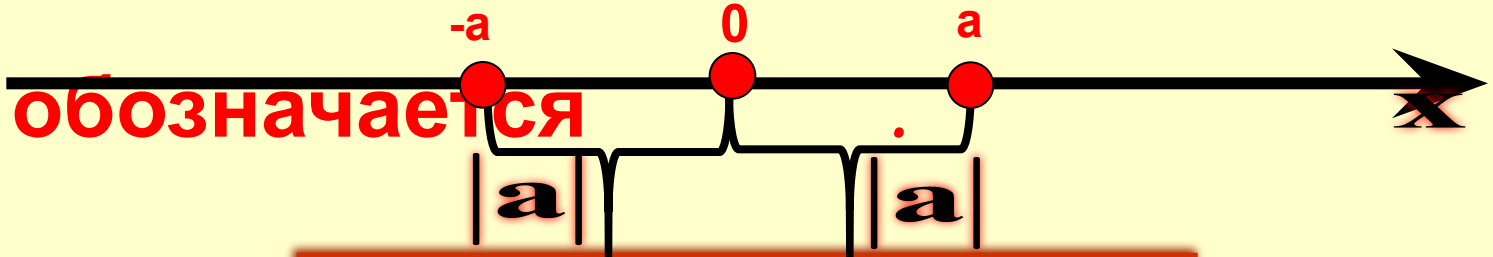
Среди предложенных уравнений выберите:
а) пару равносильных уравнений;
б) уравнение и уравнение следствие.

$2x^2+3=0$	$4x-5=11$	$3x^2+5x+7=0$	$x^2-x-12=0$

Равносильные уравнения	$2x^2+3=0$	$3x^2+5x+7=0$
Уравнение и уравнение следствие	$4x-5=11$	$x^2-x-12=0$

Определ

Абсолютной величиной числа a (модулем действительного числа a) называется расстояние от точки, изображающей данное число на координатной прямой, до начала отсчёта и обозначается $|a|$



$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Основные свойства модуля

1	$\|a\| \geq 0$	6	$\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$
2	$\|a\| = \|-a\|$	7	$\|a+b\| = \|a\| + \|b\|,\ ab \geq 0$
3	$\|a\| \geq a$	8	$\|a\| + \|b\| = a+b,\ a \geq 0 \text{ и } b \geq 0$
4	$\|ab\| = \|a\|\|b\|$	9	$\|a-b\| = \|a\| + \|b\|,\ ab \leq 0$
5	$\left\|\frac{a}{b}\right\| = \frac{\|a\|}{\|b\|}, b \neq 0$	10	$\|a\| - \|b\| \geq 0,\ a^2 - b^2 \geq 0$

Определение

Уравнения, содержащие знак модуля, называются уравнениями, содержащими знак модуля.

$|x^2 - 5| = 4$

$|x^2 - 5x + 4| = 10$

$|x - 2| = 6|x| + 1$

$x^2 - 2|x| - 3 = 0$

$x|5 - 2x| + 1 = 2x - 7$

$\frac{|x - 2|}{3} + 4 = \frac{25}{x}$

Алгоритм решения уравнения $|f(x)| = a, a \in R$

Если $a < 0$	$\lvert f(x)\rvert = a$	Уравнение корней не имеет	
Если $a = 0$	$\lvert f(x)\rvert = 0$	$f(x) = 0$	
Если $a > 0$	$\lvert f(x)\rvert = a$	I способ $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} f(x) \geq 0; \\ f(x) = a; \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0; \\ f(x) = -a. \end{cases}\end{array}\right.$	II способ $\left[\begin{array}{l} f(x) = a, \\ f(x) = -a. \end{array}\right.$

Пример 1

$2|x| - 3 = 0$

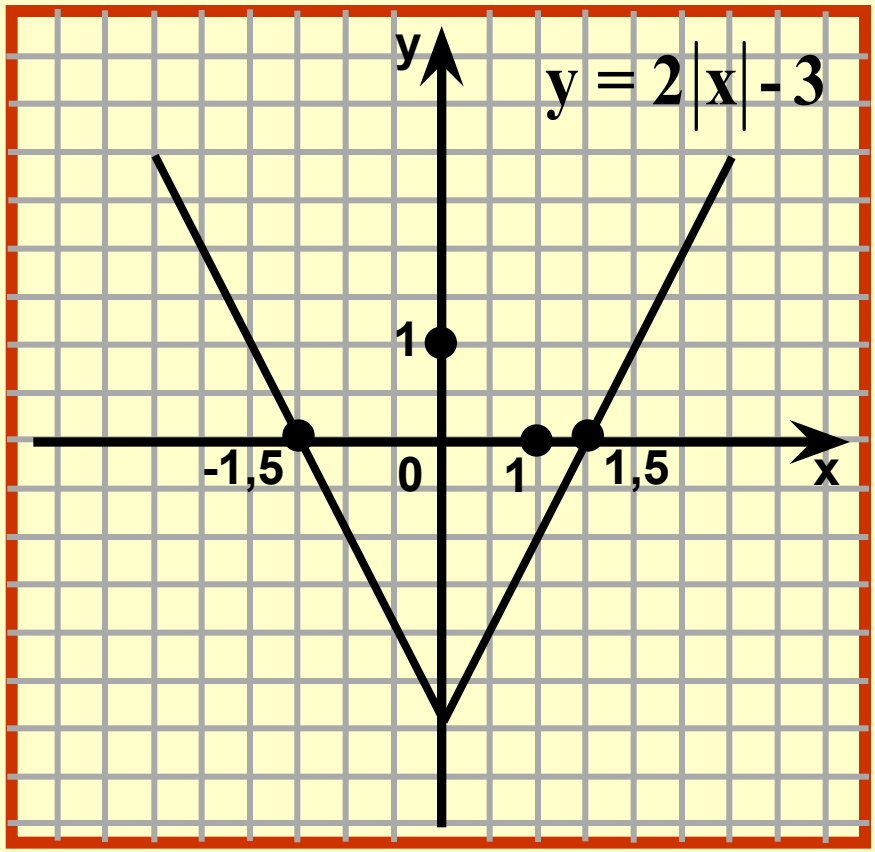
Решение

$2|x| - 3 = 0,$

$2|x| = 3,$

$|x| = 1{,}5,$

$x = \pm 1{,}5.$



Ответ: $\pm 1{,}5.$

Пример 2

$$3|x-1|-5=1$$

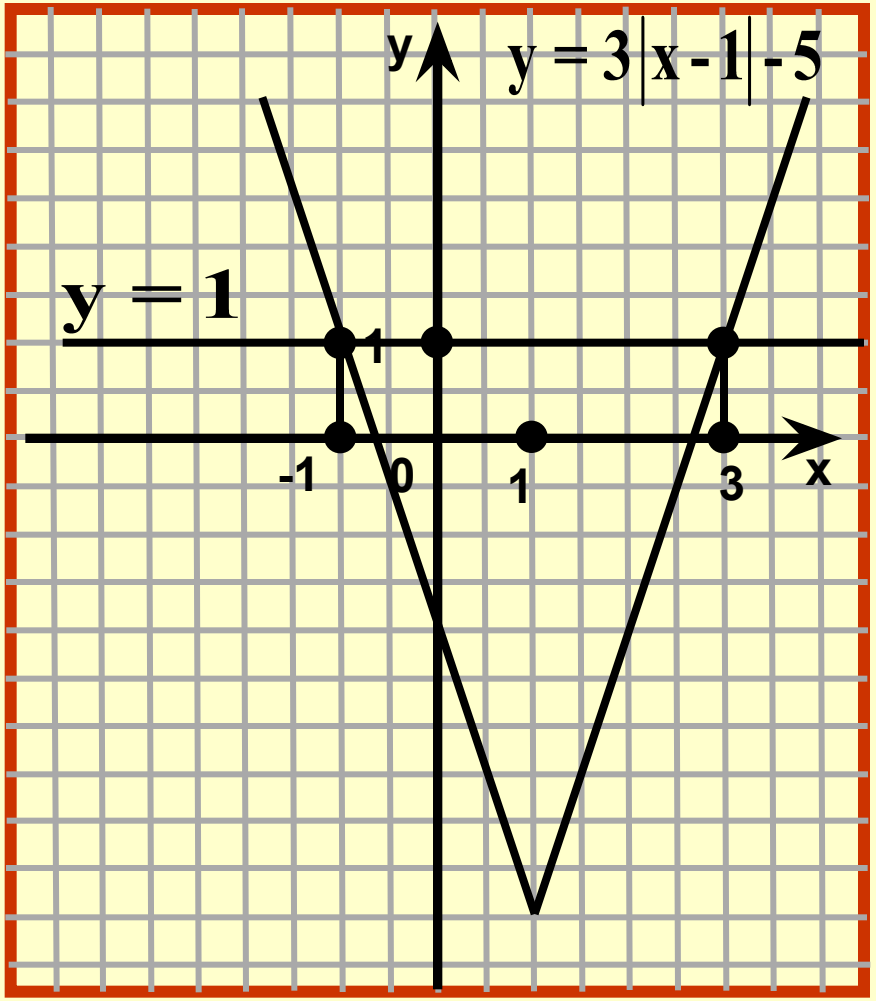
Решен

$$3|x-1|-5=1,$$

$$|x-1|=2,$$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=2, \\ x-1=-2; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=-1. \end{array}\right.$$



Ответ: $-1;3.$

Пример 3

$$|x| + 2 = 0.$$

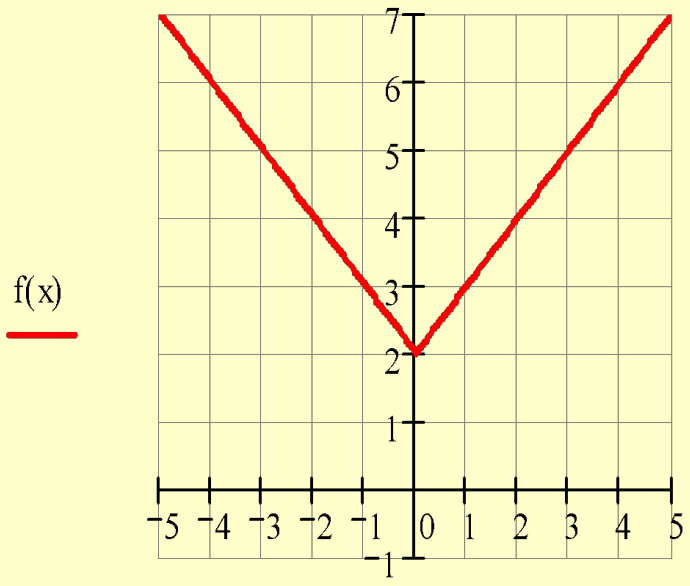
Решение

$$|x| + 2 = 0.$$

Так как

$$|x| + 2 > 0$$

при $x \in R$, **то уравнение корней не имеет.**



Ответ: уравнение корней не имеет.

Пример 1

$$|x^2 + x + 1| = 0.$$

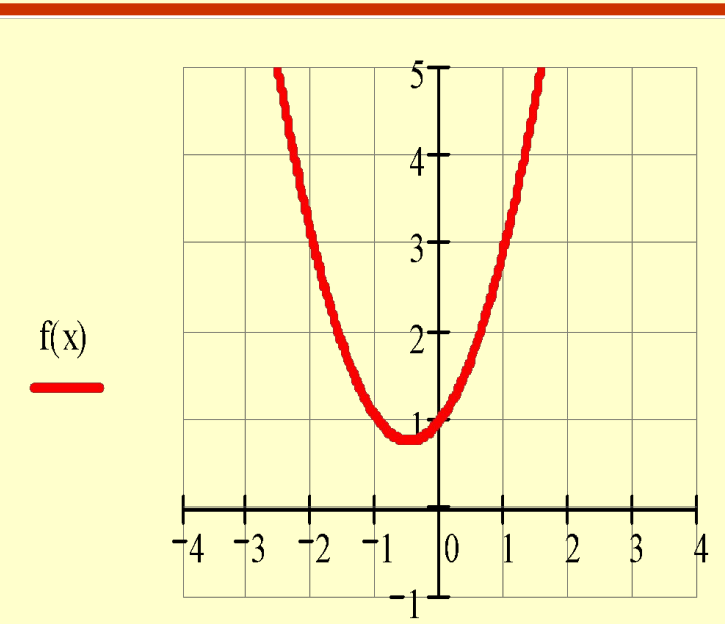
Решен

$$|x^2 + x + 1| = 0.$$

Так как

$$x^2 + x + 1 > 0$$

при $x \in R$, то и уравнение корней не имеет.



Ответ: уравнение корней не имеет.

Пример 5

$$\big||x|-2\big|=2$$

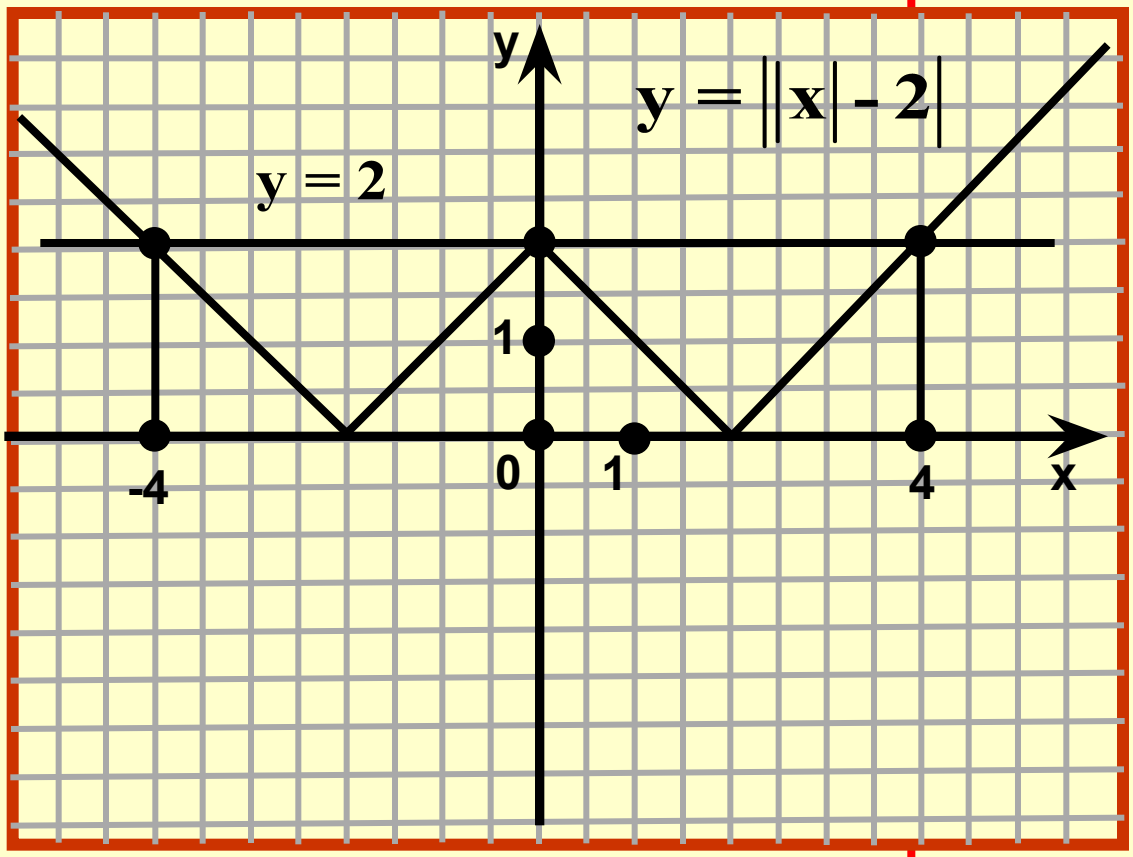
Решен

$$\big||x|-2\big|=2,$$

$$\left[\begin{array}{l}|x|-2=2,\\ |x|-2=-2;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}|x|=4,\\ |x|=0;\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=4,\\ x=0.\end{array}\right.$$



Ответ: $\pm 4;0.$

Пример 6

$$|x^2 - x - 1| = 1.$$

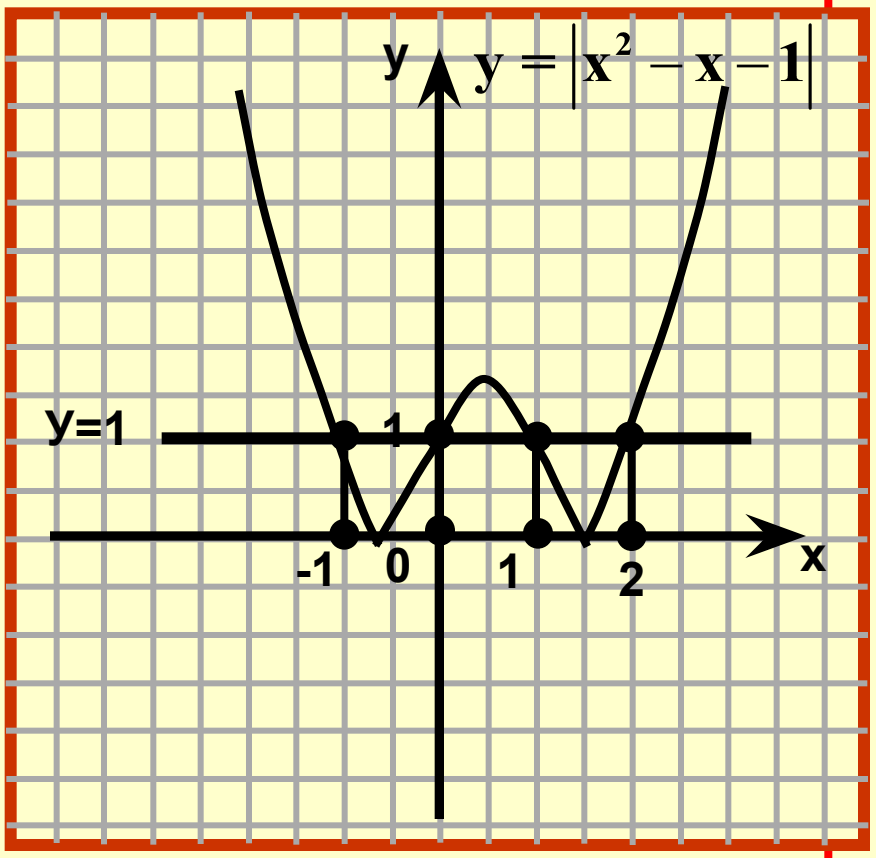
Решен

$$|x^2 - x - 1| = 1,$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 1 = 1, \\ x^2 - x - 1 = -1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 2 = 0, \\ x^2 - x = 0; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 2, \\ x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$$



Ответ: $\pm 1; 0; 2.$

Пример 7

$$x^2 - 2|x| - 3 = 0.$$

Решение

$x^2 - 2|x| - 3 = 0.$ **Так как** $x^2 = |x|^2$.

Тогда $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$. **Пусть** $|x| = t, t \geq 0$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\begin{cases} t \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = 3; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t \geq 0, \\ t = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} t \geq 0, \\ t = 3; \end{cases} \end{array}\right. \quad t = 3.$$

Вернёмся к переменной x

$$|x| = 3,$$

$$x = \pm 3.$$

Ответ: ± 3.

Пример

$$x|x| - 7x + 12 = 0.$$

Решение

$$x|x| - 7x + 12 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ -x^2 - 7x + 12 = 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 - 7x + 12 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 7x - 12 = 0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 0, \\ x = 3; x = 4; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{97}}{2}; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 4, \\ x = \dfrac{-7 - \sqrt{97}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{-7 - \sqrt{97}}{2}; 3; 4.$

Пример

$$x^2 - 5x\frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0$$

Решение

$$x^2 - 5x\frac{|x-2|}{x-2} - 14 = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2>0, \\ x^2-5x-14=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x-2<0, \\ x^2+5x-14=0; \end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x>2, \\ x=-2; x=7; \end{cases} \\ \begin{cases} x<2, \\ x=-7; x=2; \end{cases}\end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-7. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm 7.$

Домашнее задание

1) Материал лекции.
2)