

Часть I

«Золотое сечение»

«Предмет математики настолько серьёзен, что полезно не упускать случаев сделать его немного занимательным». Паскаль

**Можно ли «поверить алгеброй
гармонию?»»**

А.С. Пушкин

**Мы можем открыть некоторые
слагаемые прекрасного**

Золотое сечение – гармоническая пропорция

**«Геометрия владеет двумя сокровищами:
теоремой Пифагора и Золотым
сечением»**

Иоганн Кеплер

«Математика есть
прообраз красоты
мира»

Иоганн Кеплер

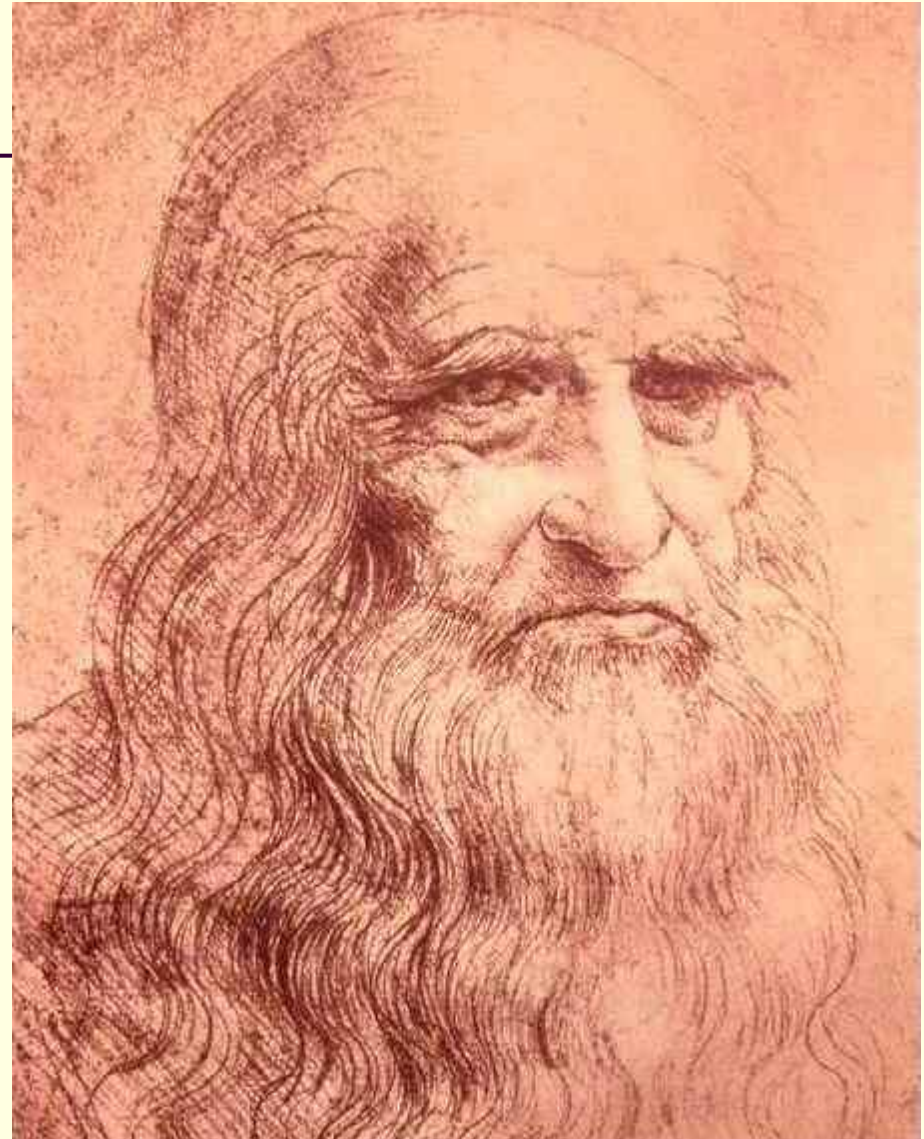


Золотое сечение и математика

«Там, где присутствует золотое сечение, ощущается красота и гармония»



Термин «золотое сечение» ввел художник эпохи Возрождения *Леонардо да Винчи.*



Золотое сечение / золотая пропорция /
деление отрезка в среднем и крайнем
отношениях.

«Божественное», «чудесное»,
«превосходнейшее».

Вспомним о пропорции

Пропорция (лат. proportio) - равенство двух отношений:

$$a:b = c:d$$

Отрезок AB можно разделить на две части следующими способами:

- на две равные части $AB : AC = AB : BC$
- на две неравные части в любом отношении

Если $AB : AC = AC : BC$, то мы имеем дело с золотым сечением или делением отрезка в крайнем и среднем отношении.

Деление отрезка по золотому сечению

Дано:

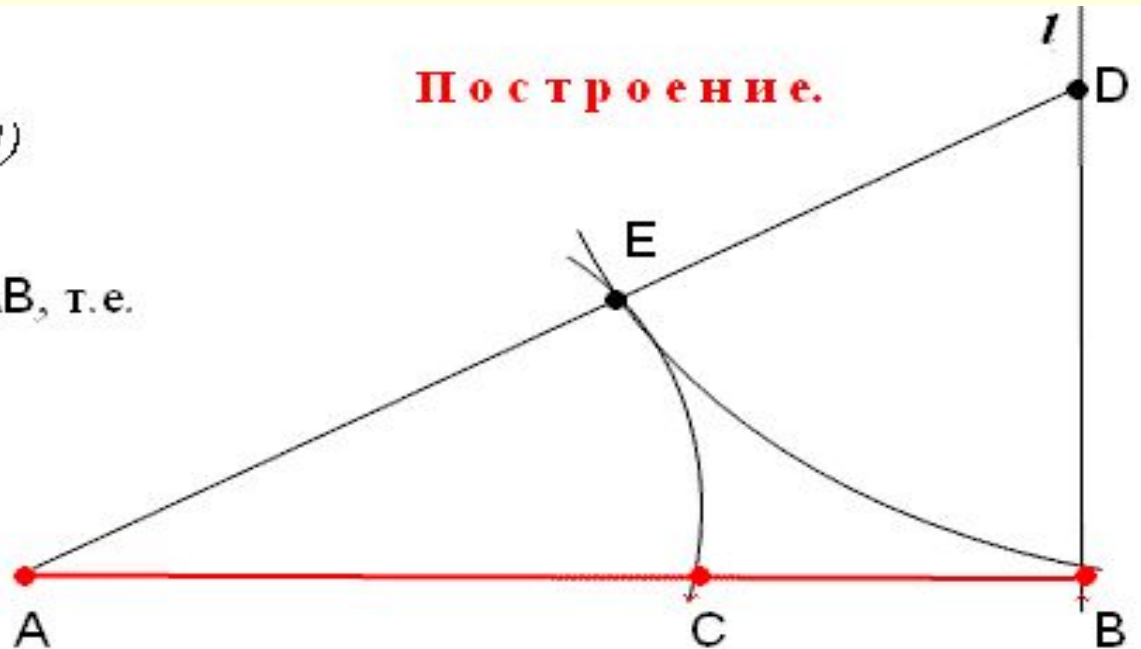
отрезок AB . (не мельчите!)

Построить:

золотое сечение отрезка AB , т.е. точку C так, чтобы

$$\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}.$$

Построение.



Построим прямоугольный треугольник, у которого один катет в два раза больше другого. Для этого восстановим в точке B перпендикуляр к прямой AB и на нём отложим отрезок $BD = \frac{1}{2}AB$.

Далее, соединив точки A и D , отложим отрезок $DE = BD$, и наконец, $AC = AE$.

Точка C является искомой, она производит золотое сечение отрезка AB .

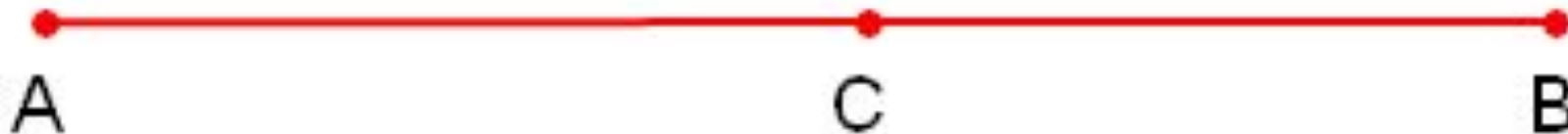
- 1) $l \perp AB$, $B \in l$;
- 2) $BD = \frac{1}{2}AB$, $D \in l$;
- 3) AD ;
- 4) $DE = BD$, $E \in AD$;
- 5) $AC = AE$, $C \in AB$;
- 6) Точка C – искомая

- Деление отрезка в золотом отношении – очень древняя задача
- «Начала» Евклида
- Золотое сечение записывается с помощью пропорции
- $|AB| = a$, $|AC| = x \Rightarrow |CB| = a - x$
- $(a - x) : x = x : a$

- Золотое сечение - деление отрезка AC на две части таким образом, что

$$AB : BC = AC : AB$$

- Приблизленно это отношение равно $5/3$, точнее $8/5$, $13/8$ и т. д. Принципы золотого сечения используются в архитектуре и в изобразительных искусствах.

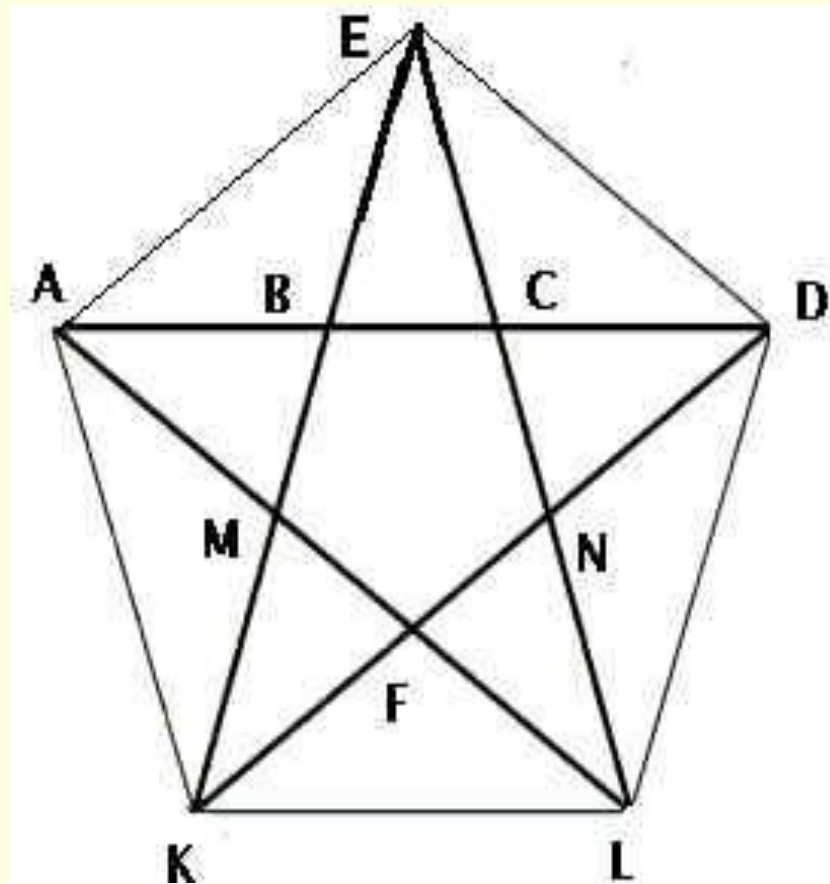


Свойства золотого сечения описываются уравнением

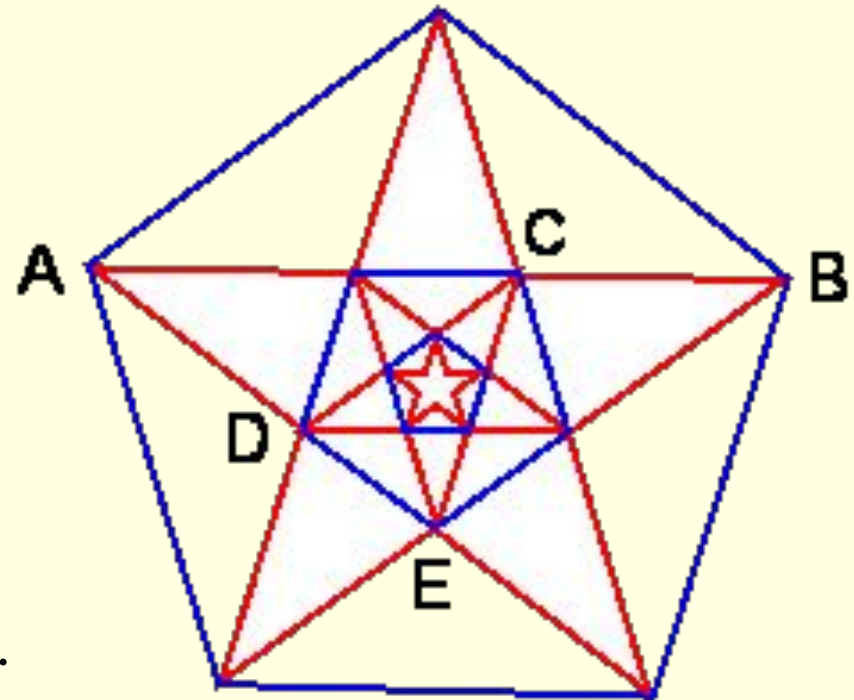
$$x^2 - x - 1 = 0$$

Пентаграмма

- Диагонали образуют правильный звездчатый пятиугольник (пентаграмму).
- Диагонали делят друг друга на отрезки, связанные между собой золотой пропорцией.



- Пентаграмма -местилище золотых пропорций. Из подобия ACD и ABE можно вывести известную пропорцию.
- Внутри пятиугольника можно продолжить строить пятиугольники, и золотые отношения будут сохраняться.



Золотое сечение в архитектуре

Древнегреческий скульптор Фидий использовал золотое сечение при оформлении Парфенона.



- В Афинах сооружали необыкновенные по красоте храмы, алтари, скульптуры. Руководитель всех работ Фидий.
- Вторая половина 5-го века до н.э. на Акрополе строительство храмов, алтаря и статуи Афины Воительницы.
- 447 г. - началась работа над храмом Афины – Парфеноном. Протяженность холма перед Парфеноном, длина храма Афины и участка Акрополя за Парфеноном соотносятся как отрезки золотой пропорции.

Почему многие художники проводят линию горизонта именно так?


Линия горизонта разделила высоту картины в отношении близком к золотому сечению. Для нашего восприятия такое соотношение привычно, нам кажется данное изображение естественным и гармоничным.



Золотое сечение в биологии


Между каждыми двумя парами листьев третья расположена в месте золотого сечения. Точка С делит отрезок АВ в золотом отношении, точка Е делит отрезок DA в золотом отношении и т.д.





Часть II

Золотая спираль



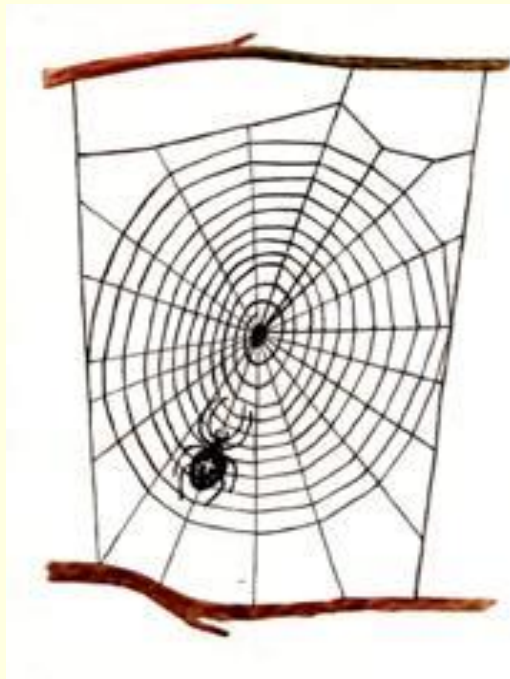
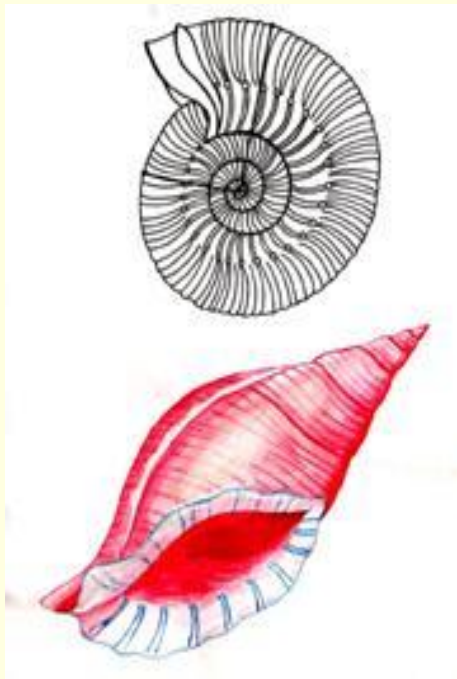
Семечки выстраиваются
вдоль спиралей, которые
закручиваются как слева
направо, так и справа
налево. В одну сторону у
среднего подсолнуха
закручено 13 спиралей, в
другую 21 . Отношение
 $13/21$ равно j .




Похожее спиральное
расположение
наблюдается у
чешуек сосновых
шишек или ячеек
ананаса.

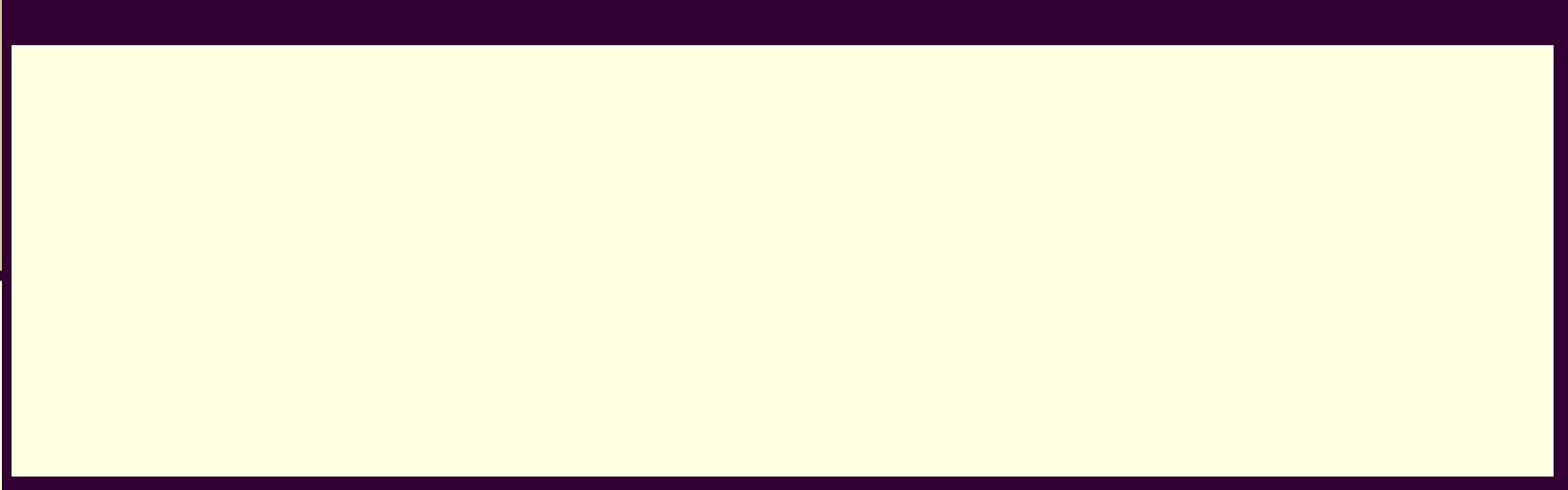


По золотой спирали свёрнуты раковины многих улиток и моллюсков, некоторые пауки, сплетая паутину, закручивают нити вокруг центра по золотым спиралям. Рога архаров закручиваются по золотым спиралям.

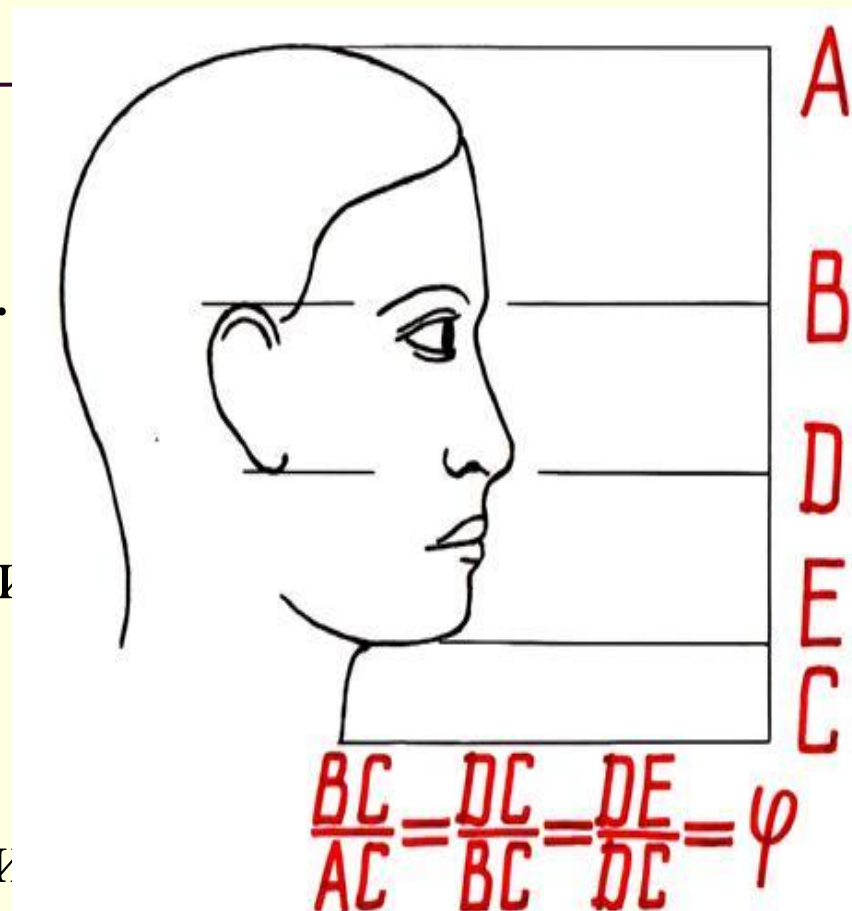




Часть III
Золотое сечение в
анатомии



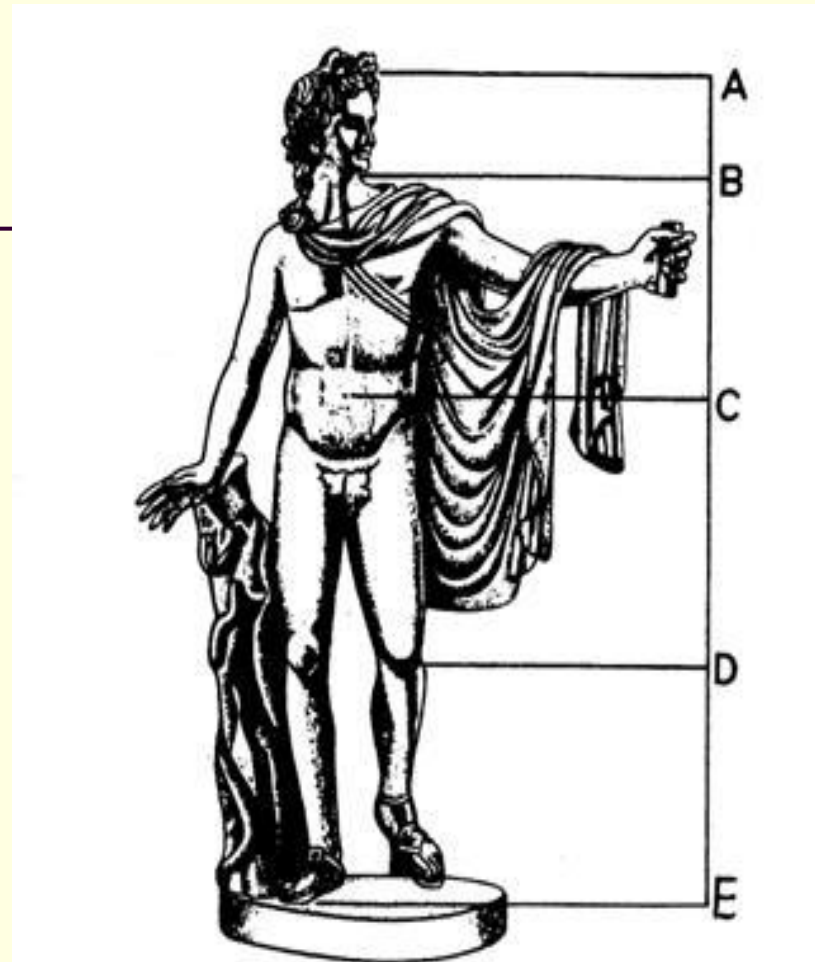
У большинства людей, верхняя точка уха делит высоту головы вместе с шеей в золотом отношении. Нижняя точка уха делит в золотом отношении расстояние от верхней части уха до основания шеи. Подбородок делит расстояние от нижней точки уха до основания шеи в золотом отношении.




Пупок делит высоту человека в золотом отношении.

Основание шеи делит расстояние от макушки до пупка в золотом отношении.

Аполлон считается образцом мужской красоты.




Аполлон
Бельведерский



Часть IV

Числа Фибоначчи



Историческая справка

- Леонардо Пизанский – один из первых математиков эпохи Возрождения получил прозвище «Фибоначчи», что означает - «зайка».
- Написал в 1202 году «Книгу об абаке»
(о числах).

Последовательность Фибоначчи

Последовательность натуральных чисел

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ...

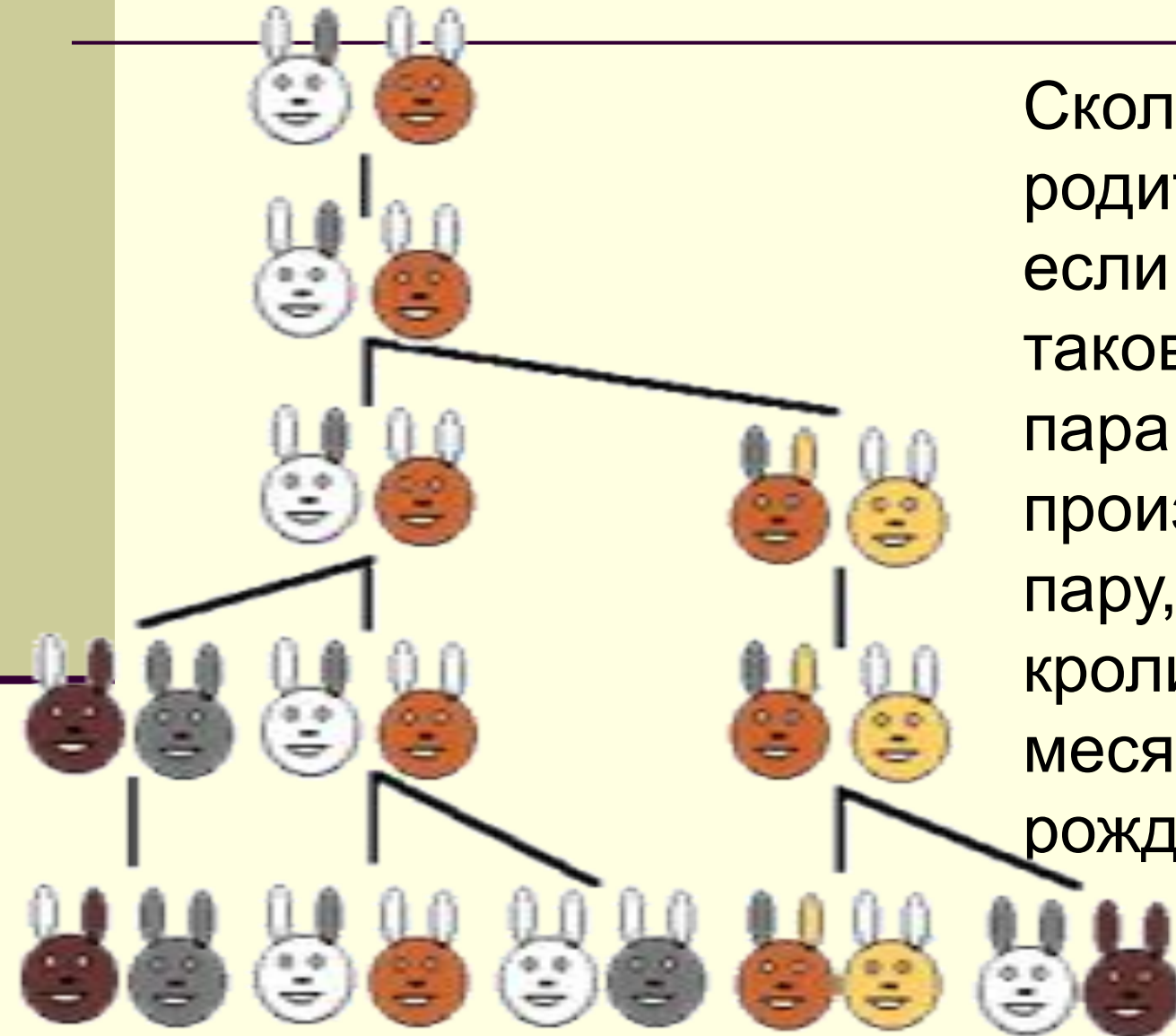
каждый член которой начиная с третьего равен сумме двух предыдущих членов, называется **последовательностью Фибоначчи**, а ее члены - **числами Фибоначчи**.

Отношение последующего члена ряда к предыдущему стремится к коэффициенту золотого сечения:

$$\Phi = \frac{U_{k+1}}{U_k} \approx 1,618\dots$$

-
- $1:1 = 1.0000$, что меньше Φ на 0.6180
 - $2:1 = 2.0000$, что больше Φ на 0.3820
 - $3:2 = 1.5000$, что меньше Φ на 0.1180
 - $5:3 = 1.6667$, что больше Φ на 0.0486
 - $8:5 = 1.6000$, что меньше Φ на 0.0180

Задача о кроликах



Сколько пар кроликов
родится в течении года
если природа кроликов
такова, что через месяц
пара кроликов
производит на свет др
пару, а рожают
кролики со второго
месяца после своего
рождения?

- Если кролики из первой пары новорожденные, то на второй месяц мы будем по-прежнему иметь одну пару; на 3-й месяц: $1 + 1 = 2$
- На 4-й месяц: $2 + 1 = 3$ пары (т.к. из двух пар потомство дает лишь одна пара);
- На 5-й месяц: $3 + 2 = 5$ пар (лишь 2 родившиеся на 3-й месяц пары дадут потомство на 5-й месяц);
- На 6-й месяц: $5 + 3 = 8$ пар (ибо потомство дадут только те пары, которые родились на 4-м месяце) и т. д.

Ряд чисел Фибоначчи достаточно хорошо изучен и его свойства используются в различных отраслях науки для инженерных расчётов.

Числа Фибоначчи дают возможность математикам «алгеброй гармонию измерить».