* Линейное уравнение с одной переменной.

Работу выполнила:
Хамдамова Гуландом 6111ок.

Одной из самых простых и важных математических моделей реальных ситуаций есть линейные уравнения с одной переменной.

$$3x = 12 \qquad 5y - 10 = 0 \qquad 2a + 7 = 0$$

Решить линейное уравнение с одной переменной – это значит найти те значения переменной, при каждом из которых уравнение обращается в верное числовое равенство.

Уравнение.

$$x + 2 = 5$$

$$x = 3$$

Корень уравнения.

Корень уравнения - значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Найдём корень уравнения:

$$x + 37 = 85$$

$$= \quad -$$

$$x = 48$$

***Решили уравнение** – нашли те значения переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.*

Не решая уравнений, проверь, какое из чисел является корнем уравнения.

$$87 + (32 - x) = 105$$

42; 14; 0; 15 ;

Решить уравнение – это значит найти все его корни или доказать, что их нет

$$(35 + y) - 15 = 31$$

$$35 + y = 31 + 15$$

$$35 + y = 46$$

$$y = 46 - 35$$

$$y = 11$$

Уравнения, которые имеют одни и те же корни, называют равносильными.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \quad и \quad (x - 2)(x - 3) = 0$$

Равносильные уравнения

Каждое уравнение имеет одни и те же корни

$x_1 = 2 \qquad x_2 = 3$

ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ИСПОЛЬЗУЮТ СВОЙСТВА:

1. ***Если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится равносильное уравнение.***

2. Если обе части уравнения умножить или разделить на число (не равное нулю), то получится равносильное уравнение.

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ И ВЫПОЛНИТЕ ПРОВЕРКУ:

$$(y - 35) + 12 = 32;$$

Решение уравнений состоит в постепенной замене более простыми равносильными уравнениями

Решение.

$y - 35 + 12 = 32;$

$y – 23 = 32;$

$y = 32 + 23;$

$\underline{y = 55;}$

$(55 - 35) + 12 = 32;$

$30 + 12 = 32;$

$32 = 32.$

Ответ: 55.

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ И ВЫПОЛНИТЕ ПРОВЕРКУ:

б) $(24 + x) - 21 = 10;$

Решение.

$24 - 21 + x = 10;$

$x + 3 = 10;$

$x = 10 - 3;$

$x = 7$

$(24 + 7) - 21 = 31 - 21 = 10;$

Ответ: 7.

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ И ВЫПОЛНИТЕ ПРОВЕРКУ:

в) $(45 - y) + 18 = 58$;

Решение.

$45 + 18 - y = 58$;

$63 - y = 58$;

$y = 63 - 58$;

$y = 5$

$(45 - 5) + 18 = 40 + 18 = 58$.

Ответ: 5.

Уравнение вида: $ax + b = 0$

*называется **линейным уравнением с одной переменной** (где x – переменная, a и b некоторые числа).*

ВНИМАНИЕ!

x – переменная** входит в уравнение обязательно в **первой степени.

$(45 - y) + 18 = 58$ ***ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕМ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ***

$3x^2 + 6x + 7 = 0$ ***НЕ ЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕМ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ***

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ :

$$2(3x - 1) = 4(x + 3)$$

Решение.

$$2(3x - 1) = 4(x + 3)$$

$$\underline{6x} - \underline{2} = \underline{4x} + \underline{12}$$

$$6x - 4x = 2 + 12$$

$$2x = 14$$

$$x = 14 : 2$$

$x = 7$ - УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ 1 КОРЕНЬ

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ :

$$2(3x - 1) = 4(x + 3) – 14 + 2x$$

Приведем к стандартному виду: $ax + b = 0$

$$2(3x - 1) = 4(x + 3) – 14 + 2x$$

$$6x – 2 = 4x + 12 – 14 + 2x$$

$$6x – 4x - 2x = 2 + 12 – 14$$

$0 \cdot x = 0$ $(a = 0, b = 0)$

При подстановке любого значения x получаем верное числовое равенство:

$$0 = 0$$

x – любое число

УРАВНЕНИЕ ИМЕЕТ БЕСКОНЕЧНО МНОГО КОРНЕЙ

РЕШИТЕ УРАВНЕНИЕ :

$$2(3x - 1) = 4(x + 3) + 2x$$

Приведем к стандартному виду: $ax + b = 0$

$$2(3x - 1) = 4(x + 3) + 2x$$

$$6x – 2 = 4x + 12 + 2x$$

$$6x – 4x - 2x -2 - 12 = 0$$

$0 \cdot x - 14 = 0$ $(a = 0, b = -14)$

При подстановке любого значения х получаем неверное числовое равенство:

$$-14 = 0$$

Уравнение корней не имеет

ВСПОМНИМ!

Математическая модель позволяет анализировать и решать задачи.

При решении задачи четко выполнены три этапа:

1) **Получение математической модели.**

- Обозначают неизвестную в задаче величину буквой,
- используя эту букву, записывают другие величины,
- составляют уравнение по условию задачи.

2) **Работа с математической моделью.**

- Решают полученное уравнение,
- находят требуемые по условию задачи величины.

3) **Ответ на вопрос задачи.**

Найденное решение используют для ответа на вопрос задачи применительно к реальной ситуации.

Задача:

Три бригады рабочих изготавливают игрушки к Новому году. Первая бригада сделала шары. Вторая бригада изготавливает сосульки и сделала их на 12 штук больше, чем шаров. Третья бригада изготавливает снежинки и сделала их на 5 штук меньше, чем изготовлено шаров и сосулек вместе. Всего было сделано 379 игрушек. Сколько в отдельности изготовлено шаров, сосулек и снежинок?

Шары – ?

Сосульки – ? на 12 шт. больше, чем

Снежинки - ?

?

- на 5 шт. меньше, чем

1) Получение математической модели.

Обозначим шары – x (шт.)

сосульки – $x + 12$ (шт.)

$x + x + 12 = 2x + 12$ (шт.)

снежинки - $2x + 12 - 5 = 2x + 7$ (шт.)

Так как по условию всего было сделано 379 игрушек, то составим уравнение:

$$x + (x + 12) + (2x + 7) = 379$$

математическая модель ситуации

линейное уравнением с одной переменной

2) Работа с математической моделью.

$$X + (X + 12) + (2X + 7) = 379$$

Решение :

$$x + x + 12 + 2x + 7 = 379$$

$$4x + 19 = 379$$

$$4x = 379 - 19$$

$$4x = 360$$

$$x = 360 : 4$$

$x = 90$ 90 шт. - шаров

$x + 12 = 90 + 12 = 102$ (шт.) - сосульки

$2x + 7 = 2 \cdot 90 + 7 = 187$ (шт.) - снежинок

3) Ответ на вопрос задачи:

90 шт. – шаров, 102 (шт.) – сосульки, 187 (шт.) - снежинок

ОТВЕТИТЬ НА ВОПРОСЫ:

1. Что называется уравнением?
2. Что называется корнем уравнения? Сколько корней может иметь уравнение?
3. Какие уравнения называются равносильными?
4. Сформулируйте основные свойства уравнений.
5. Стандартный вид линейного уравнения.
6. Какое уравнение называется линейным?

Квадратные уравнения.

*Квадратное уравнение

Квадратным уравнением называется уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

где a, b, c – числа, $a \neq 0$, x – неизвестное.

$3x^2 - 2x + 7 = 0$; $-3{,}8x^2 + 67 = 0$;

$18x^2 = 0$.

Квадратное уравнение называют еще ***уравнением второй степени с одним неизвестным***.

*Коэффициенты квадратного уравнения

Числа ***a***, ***b*** и ***c*** называют ***коэффициентами*** квадратного уравнения.

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

старший коэффициент ***второй коэффициент*** ***свободный член***

$$3x^2 + 4x - 8 = 0,$$

старший коэффициент *второй коэффициент* *свободный член*

*Неполное квадратное уравнение

Квадратное уравнение, в котором хотя бы один из коэффициентов ***b*** или ***c*** равен нулю, называется ***неполным***.

$$-11x^2 = 0;$$

$$5x^2 + 13x = 0;$$

$$-24x^2 + 1 = 0.$$

*Виды неполных квадратных уравнений и их корни

1. $ax^2 + c = 0$, где $c \neq 0$.

Тогда $x^2 = -\frac{c}{a}$

Если $\boxed{\frac{c}{a} < 0}$,то корни

$$\boxed{x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}}, \quad x_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}}$$

Если $\boxed{\frac{c}{a} > 0}$,

то корней нет .

а) $3x^2 - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ *или* $x = \frac{1}{3}$.

б) $-x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -4$ ***нет корней.***

*Виды неполных квадратных уравнений и их корни

2. $ax^2 + bx = 0$, где $b \neq 0$.

Тогда $x \cdot (ax + b) = 0$. Корни: $\boxed{x_1 = 0 \text{ и } x_2 = -\frac{b}{a}.}$

а) $2x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2x + 7) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0$ или $2x + 7 = 0$, т.е. $x = -\frac{7}{2}$.

Ответ: 0 и $-3,5$.

б) $-x^2 + 5x = 0 \Leftrightarrow -x \cdot (x - 5) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 5$.

Ответ: 0 и 5.

*Виды неполных квадратных уравнений и их корни

3. $ax^2 = 0$

Имеем единственный корень $\boxed{x = 0}$.

$$128x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$

$$-3{,}8x^2 = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$

*Метод выделения полного квадрата

Решить уравнение $x^2 + 14x + 24 = 0$.

Решение.

$$x^2 + 14x + 24 = (x^2 + 14x + 49) - 49 + 24 =$$

$$= (x + 7)^2 - 25.$$

$$(x + 7)^2 - 25 = 0,$$

$$(x + 7)^2 = 25.$$

$x + 7 = -5$ или $x + 7 = 5$.

$$x_1 = -12;\ x_2 = -2.$$

Ответ: $-12;\ -2$.

*Формула корней квадратного уравнения

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

можно найти по формуле

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

, где $D = b^2 - 4ac$ -

дискриминант квадратного уравнения.

*Формула корней квадратного уравнения

Возможны 3 случая:

1. $D > 0$.

Тогда уравнение имеет **2 различных** корня:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$$

$2x^2 + 7x - 4 = 0$.

$a = 2$, $b = 7$, $c = -4$.

$D = 7^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 81 > 0$,

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = -4, \qquad x_2 = \frac{-7 + \sqrt{81}}{2 \cdot 2} = \frac{1}{2}.$$

*Формула корней квадратного уравнения

2. $D = 0$.

Тогда уравнение имеет ***единственный*** корень:

$$x = \frac{b}{2a}$$

$$x^2 - 4x + 4 = 0.$$

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0,$$

$$x = -\frac{-4}{2 \cdot 1} = 2$$

*Формула корней квадратного уравнения

3. $D < 0$.

Тогда уравнение ***не имеет*** корней,

т. к. не существует $\sqrt{D}$

$3x^2 - x + 7 = 0$.

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 7 = -83 < 0$,

значит корней нет.

*Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Если $b = 2k$, то корни уравнения

$ax^2 + 2kx + c = 0$ находятся по формуле

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{D_1}}{a} = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{D_1}}{2a}$$

где

$$D_1 = \frac{d}{4} = k^2 - ac = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

*Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Решить уравнение

1. $x^2 + 18x + 32 = 0$.

$a = 1$; $b = 18 \Leftrightarrow k = b : 2 = 9$; $c = 32$.

$D_1 = D : 4 = (18 : 2) - 1 \cdot 32 = 49 > 0$,

значит уравнение имеет 2 корня:

$$x_1 = \frac{-9 - \sqrt{49}}{1} = -16, \quad x_2 = -9 + 7 = -2.$$

*Корни квадратного уравнения с четным вторым коэффициентом

Решить уравнения

2. $3x^2 + 2x + 1 = 0$.

$a = 3$; $b = 2 \Longleftrightarrow k = b : 2 = 1$; $c = 1$.

$D_1 = D : 4 = 1^2 - 1 \cdot 3 = -2 < 0$,

значит корней нет.

3. $196x^2 - 28x + 1 = 0$.

$a = 196$; $b = -28 \Longleftrightarrow k = b : 2 = -14$; $c = 1$.

$D_1 = D : 4 = (-14)^2 - 196 = 0$,

значит уравнение имеет 1 корень $x = \frac{14}{196} = \frac{1}{14}$.

*Приведенное квадратное уравнение

Приведенное квадратное уравнение – это уравнение вида $x^2 + px + q = 0$.

$x^2 + 14x + 24 = 0.$

Для каждого квадратного уравнения можно записать равносильное ему приведенное уравнение, разделив обе части квадратного на старший коэффициент.

$5x^2 + 3x - 2 = 0 \Longleftrightarrow x^2 + 0{,}6x - 0{,}4 = 0.$

*Формула корней приведенного квадратного уравнения

$x^2 + px + q = 0.$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$x^2 - x - 6 = 0.$

$p = -1,\ q = -6,$

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - (-6)} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2},$$

$$x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3.$$

*Теорема Виета

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

← *формулы Виета*

$x_1 = -1$; $x_2 = 3$ – корни уравнения $x^2 - 2x - 3 = 0$.

$p = -2$, $q = -3$.

$x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2 = -p$,

$x_1 \cdot x_2 = -1 \cdot 3 = q$.

*Теорема Виета для квадратного уравнения общего вида

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $a x^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}$$

$x_1 = 1,5$; $x_2 = 2$ – корни уравнения $2 x^2 - 7x + 6 = 0$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3,5, \\ x_1 \cdot x_2 = 3. \end{cases}$$

*Теорема, обратная теореме Виета

Теорема. Если числа x_1, x_2, p и q связаны условиями

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$$

то x_1 и x_2 – корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$.

Составим квадратное уравнение по его корням

$$x_1 = 2 - \sqrt{3} \quad и \quad x_2 = 2 + \sqrt{3}.$$

$$-p = x_1 + x_2 = -4 \Leftrightarrow p = -4;$$

$$q = x_1 \cdot x_2 = (2 - \sqrt{3}) \cdot (2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1.$$

Искомое уравнение имеет вид $x^2 - 4x + 1 = 0$.

*Квадратный трехчлен

Квадратным трехчленом называется многочлен вида $ax^2 + bx + c$, где a, b, c – числа, $a \neq 0$, x – переменная.

$3x^2 - 2x + 7$;

Корни квадратного трехчлена $a\,x^2 + bx + c$ – это корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

*Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Теорема. Если x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $a x^2 + bx + c$, то

$$a x^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Разложить на множители $12 x^2 - 5x - 2$.

- корни уравнения $12 x^2 - 5x - 2 = 0$.

$$x_1 = -\frac{1}{4}; x_2 = \frac{2}{3}$$

Значит $12 x^2 - 5x - 2 =$

$$= 4 \cdot \left(x + \frac{1}{4} \right) \cdot 3 \left(x - \frac{2}{3} \right) = (4x + 1)(3x - 2).$$

*Неприводимый многочлен

Если квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ не имеет корней, то соответствующий многочлен

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}$ (со старшим коэффициентом 1)

называется ***неприводимым многочленом второй степени*** (так как его невозможно разложить на множители меньшей степени).

Квадратный трехчлен $5x^2 + 3x + 2$ не имеет корней. Его невозможно разложить на множители первой степени. Можно вынести числовой коэффициент за скобки $5x^2 + 3x + 2 = 5(x^2 + 0,6x + 0,4)$.

*Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

Схема решения:

1. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение.
2. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель.
3. Решить получившееся уравнение.
4. Исключить из его корней те числа, которые обращают в нуль общий знаменатель.

*Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

$$\frac{t}{t+1} - \frac{t+2}{t-2} = 1$$

Общий знаменатель: $(t + 1)(t - 2)$.

Умножим на него обе части уравнения:

$$t(t - 2) - (t + 2)(t + 1) = 1 \cdot (t + 1)(t - 2) \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 2t - t^2 - 3t - 2 = t^2 - t - 2 \Leftrightarrow$$

$$t^2 + 4t = 0 \Leftrightarrow \quad t(t + 4) = 0 \Leftrightarrow \quad t_1 = 0,\ t_2 = -4.$$

Ни одно из чисел не обращает в нуль общий знаменатель.

Ответ: 0; -4.

*Уравнения, содержащие неизвестное в знаменателе

$$\frac{2}{x^2-9}-\frac{1}{x^2-3x}=\frac{6-x}{x(x+3)}$$

Общий знаменатель: $x(x - 3)(x + 3)$. Тогда:

$2x - (x - 3) = (6 - x)(x - 3) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0$

$\Leftrightarrow$ $x_1 = 3$ – посторонний корень, так как при $x = 3$ общий знаменатель $x(x - 3)(x + 3) = 0$.

$x_2 = 5$ – корень.

Ответ: 5.

*Биквадратные уравнения

Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$,
где $a \neq 0$, b и c - заданные числа, называется ***биквадратным***.

$9x^4 + 17x^2 - 2 = 0$

Заменой $x^2 = t$ сводится к квадратному уравнению.

$9t^2 + 17t - 2 = 0$

$t = \frac{1}{9}$ или $t = -2$ $\Longleftrightarrow$ $x^2 = \frac{1}{9}$ или $x^2 = -2$

$x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{1}{3}$

Нет корней

Ответ: $-\frac{1}{3}, \quad \frac{1}{3}$

*Решение уравнений методом замены неизвестного

$$x - 5\sqrt{x-7} - 13 = 0.$$

$$x - 7 - 5\sqrt{x-7} - 6 = 0.$$

$$t = \sqrt{x-7}, \quad x - 7 = t^2$$

$$t^2 - 5t - 6 = 0.$$

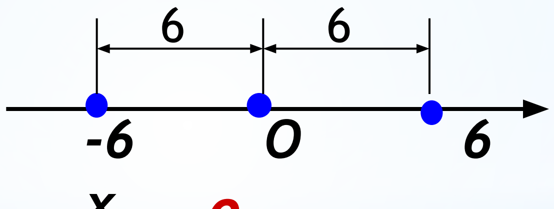
$t = -1$	$t = 6.$
$\sqrt{x-7} = -1$	$\sqrt{x-7} = 6.$
Нет корней	$x = 43.$

Ответ: *43*.

*Модуль

Модуль числа х – это расстояние от начала отсчета до точки ***х*** на координатной прямой.

|*х*| = *6* означает, что расстояние от начала отсчета до точки ***х равно 6***.



$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

*Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

$$|x^2 - 2x - 39| = 24.$$

$x^2 - 2x - 39 = 24$	$x^2 - 2x - 39 = -24$
$x_1 = 9; \quad x_2 = -7$	$x_3 = -3; \quad x_4 = 5.$

Ответ: *1,6*; *1*; *-1*; *6/11*.

*Уравнения, содержащие неизвестное под знаком модуля

Модули двух чисел равны тогда и только тогда, когда эти числа равны или противоположны.

$$|8x^2 - 4x + 1| = |3x^2 + 9x - 7|.$$

$8x^2 - 4x + 1 = 3x^2 + 9x - 7$

$x_1 = 1,6; \quad x_2 = 1$

$8x^2 - 4x + 1 = -(3x^2 + 9x - 7)$

$x_3 = -1; \quad x_4 = 6/11.$

Ответ: *1,6*; *1*; *-1*; *6/11*.