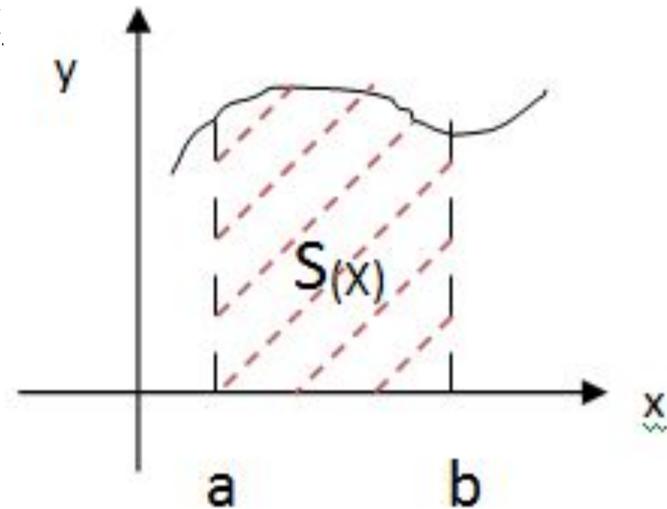


ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПЛОСКИХ
ФИГУР С ПОМОЩЬЮ
ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Площадь фигур расположенных над осью OX

Пусть на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает значения $f(x) \geq 0$ для любого $x \in [a; b]$. Тогда график функции расположен над осью OX.



$$S = \int_a^b f(x) dx$$

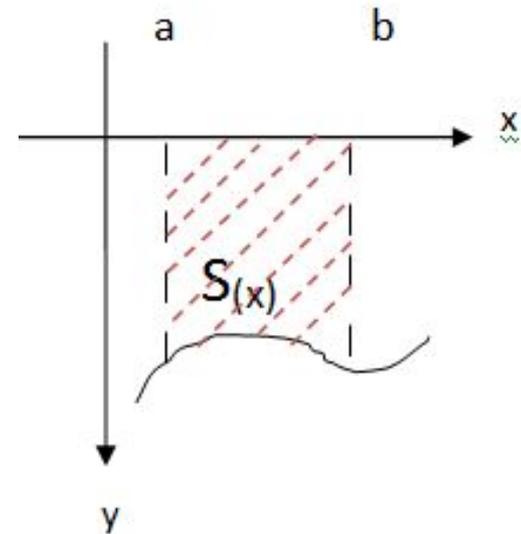
или

$$S = \int_a^b y dx$$

где y находится из уравнения кривой

Площадь фигур расположенных под осью OX

Пусть на отрезке $[a; b]$ задана
непрерывная функция $y=f(x)$, $f(x) \leq 0$. Тогда график функции
расположен под осью OX.



$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

или

$$S = \left| \int_a^b y dx \right|,$$

где y находится из уравнения кривой.

Алгоритм вычисления площадей плоских фигур:

- По условию задачи делают схематический чертёж;
- Представляют искомую площадь, как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.
- Записывают каждую функцию в виде $y=f(x)$.
- Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.

ПРИМЕР
ы:

Вычислите площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1. $y^2 = 9x; x = 16; x = 25; y = 0$

2. $y = -x^2 + 4; y = 0$

ОТВЕТ Ы:

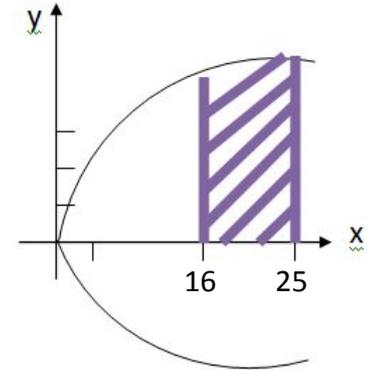
1.

Для любого $x \in [16, 25]$, функция $y = \sqrt{9x}$

принимает

положительные значения.

x	0	1
y	0	3



$$S = \int_{16}^{25} \sqrt{9x} dx = 3 \int_{16}^{25} x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_{16}^{25} = 122 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: 122 кв.ед.

ОТВЕТ

..

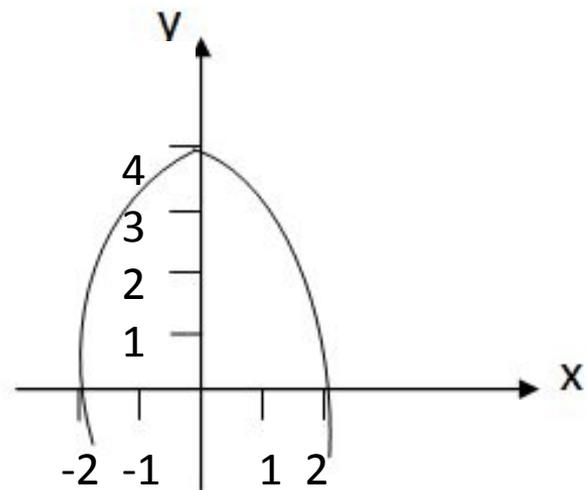
2.

$$-x^2 = -4$$

$$x = \pm\sqrt{4}$$

$$x_{1,2} = \pm 2$$

x	0	1	2	-2
y	4	3	0	0



$$S = \int_{-2}^2 (-x^2 + 4) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 4x \right) \Big|_{-2}^2 = \mathbf{10\frac{2}{3}} \text{ (кв. ед.)}$$

ОТВЕТ: $\mathbf{10\frac{2}{3}}$ (кв. ед.)

ПРИМЕР

Ы:

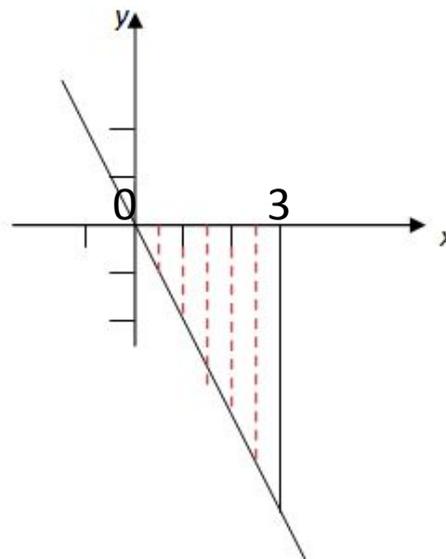
3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$y = -2x; y = 0; x = 3$$

ОТВЕТ Ы:

3.

x	0	1	-1
y	0	-2	2



$$S = \left| \int_0^3 -2x \, dx \right| = \left| \frac{-2x^2}{2} \Big|_0^3 \right| = \left| -x^2 \Big|_0^3 \right| =$$
$$\left| -(3)^2 - 0^2 \right| = \left| -9 \right| = 9 \text{ (кв. ед)}$$

ОТВЕТ: 9 кв. ед

РЕШИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО:

Вычислите площади фигур, ограниченных заданными линиями:

1. $y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 1$ и $x = 3$.

2. $y = 2\sin x, y = 0, x = 0$ и $x = \frac{\pi}{2}$.

3. $x - y - 1 = 0, x = -4, x = -2$ и $y = 0$.

ПРОВЕРЬТЕ ОТВЕТЫ:

1. $\ln 3$ (кв. ед.)

2. 2 (кв. ед.)

3. 8(кв. ед.)