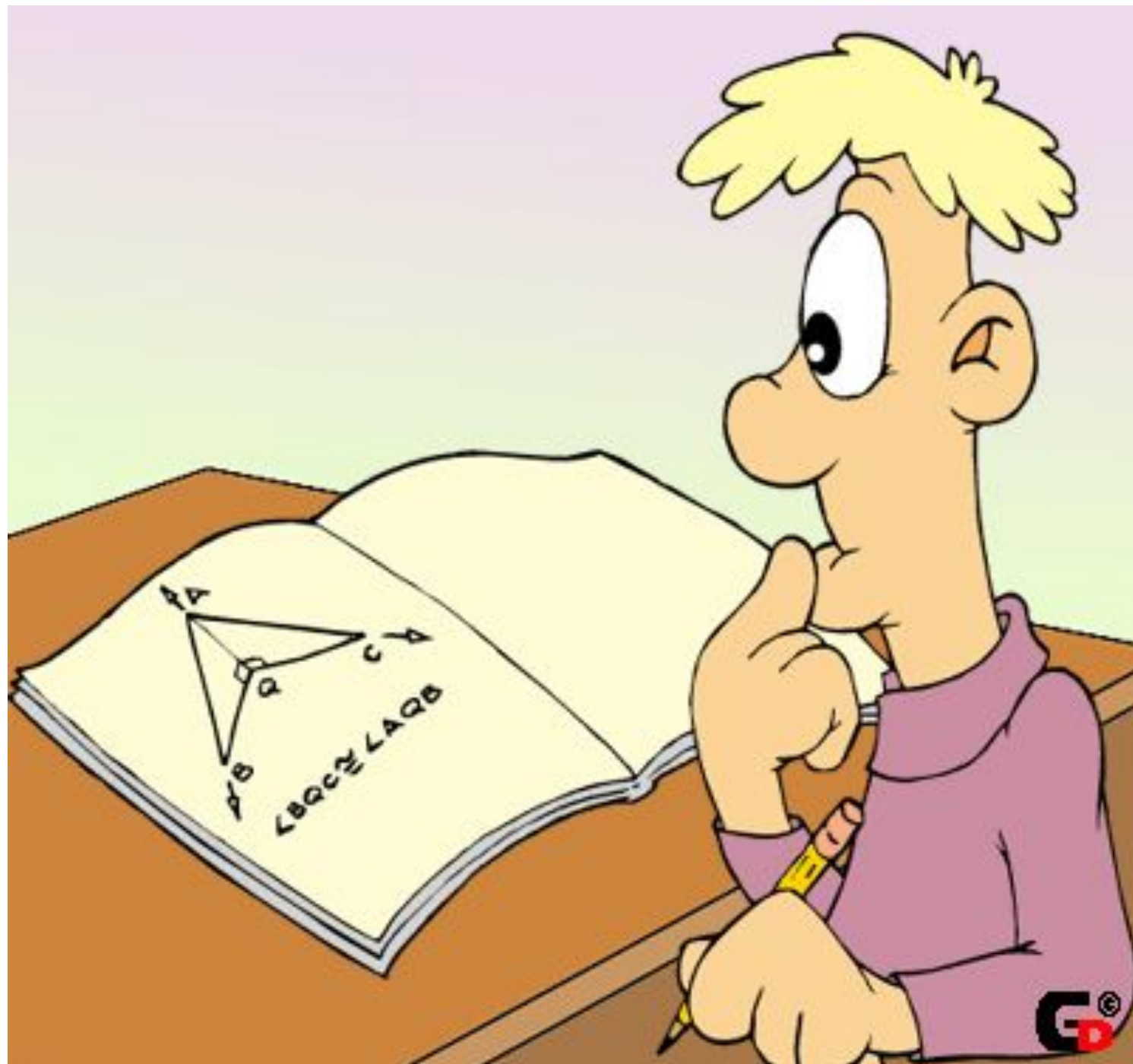


Решение задач по математике С2

Нахождение
угла между
прямой и
плоскостью



Прямая и плоскость пересекаются, если они имеют одну единственную общую точку, которую называют **точкой пересечения прямой и плоскости**.



Прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в этой плоскости.

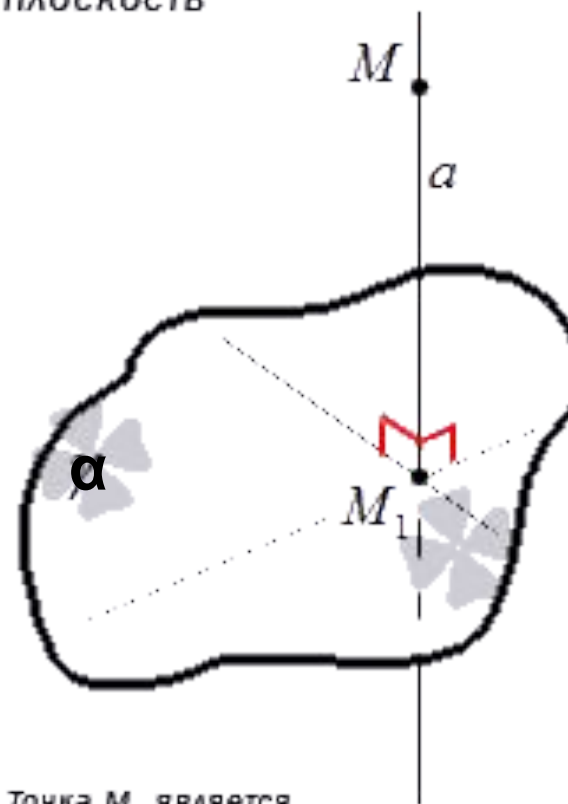
Проекцией точки M на плоскость α называется либо сама точка M , если M лежит в плоскости α , либо точка пересечения плоскости α и прямой, перпендикулярной к плоскости α и проходящей через точку M , если точка M не лежит в плоскости α .

проекция точки на плоскость

www.cleverstudents.ru

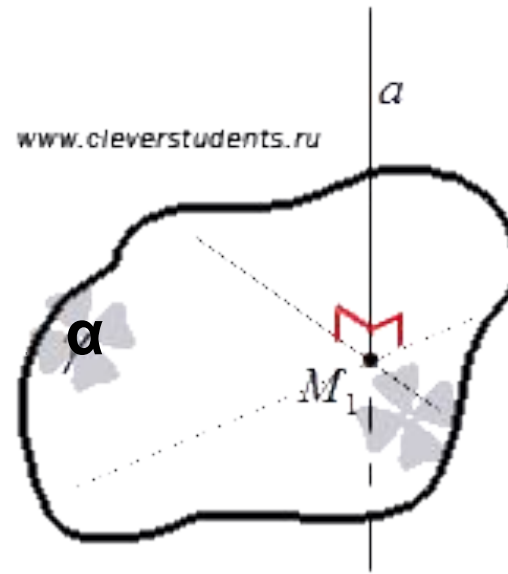


Точка M лежит в плоскости γ ,
поэтому ее проекцией на плоскость γ
является сама точка M .



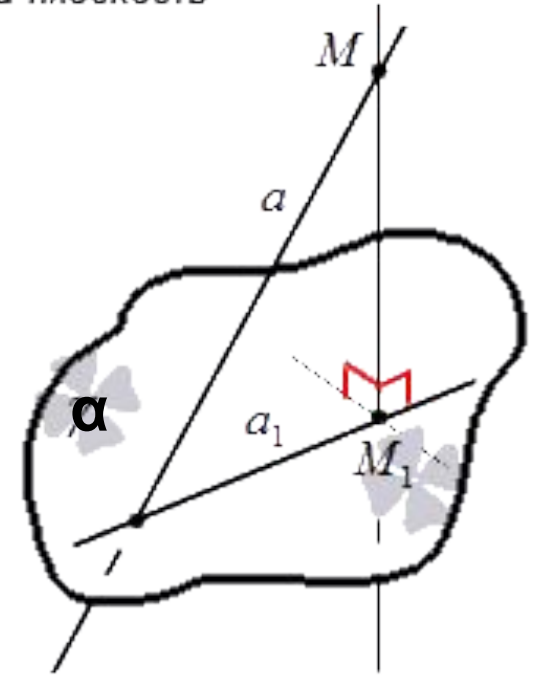
Точка M_1 является
проекцией точки M на плоскость γ .

проекция прямой на плоскость



www.cleverstudents.ru

Так как прямая a перпендикулярна к плоскости γ , то ее проекцией на плоскость γ является точка M_1 .

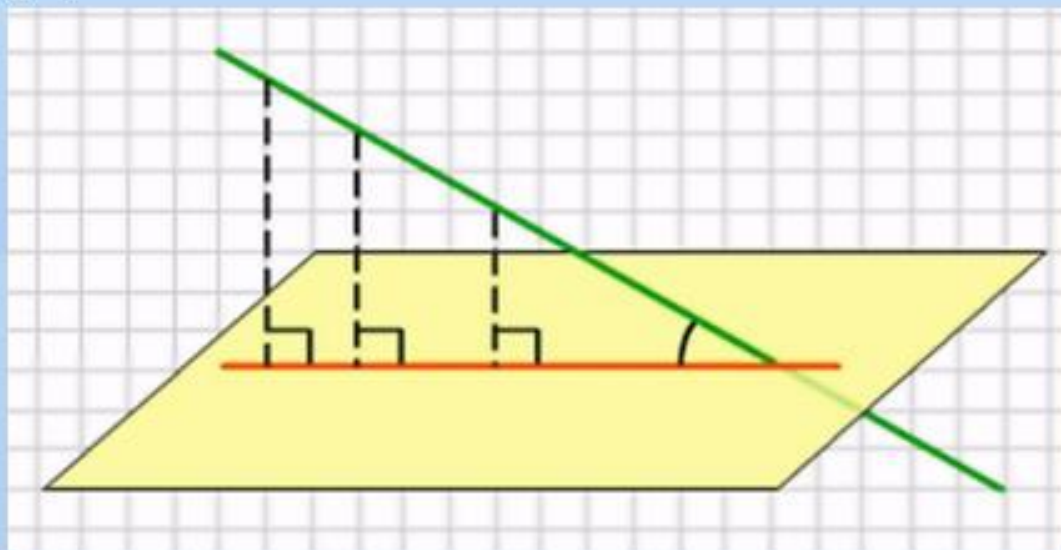


Прямая a_1 является проекцией прямой a на плоскость γ .

Проекцией прямой a на плоскость α называют множество проекций всех точек прямой a на плоскость

Угол между наклонной и плоскостью

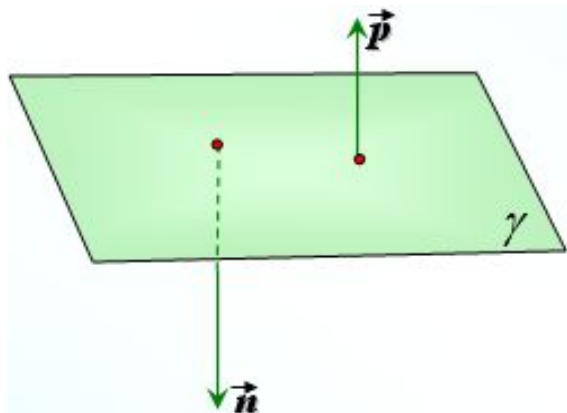
Пусть даны плоскость и наклонная прямая. *Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на эту плоскость.* Если прямая параллельна плоскости, то угол между ней и плоскостью считается равным нулю. Если прямая перпендикулярна плоскости, то угол между ней и плоскостью прямой, т. е. равен 90° .



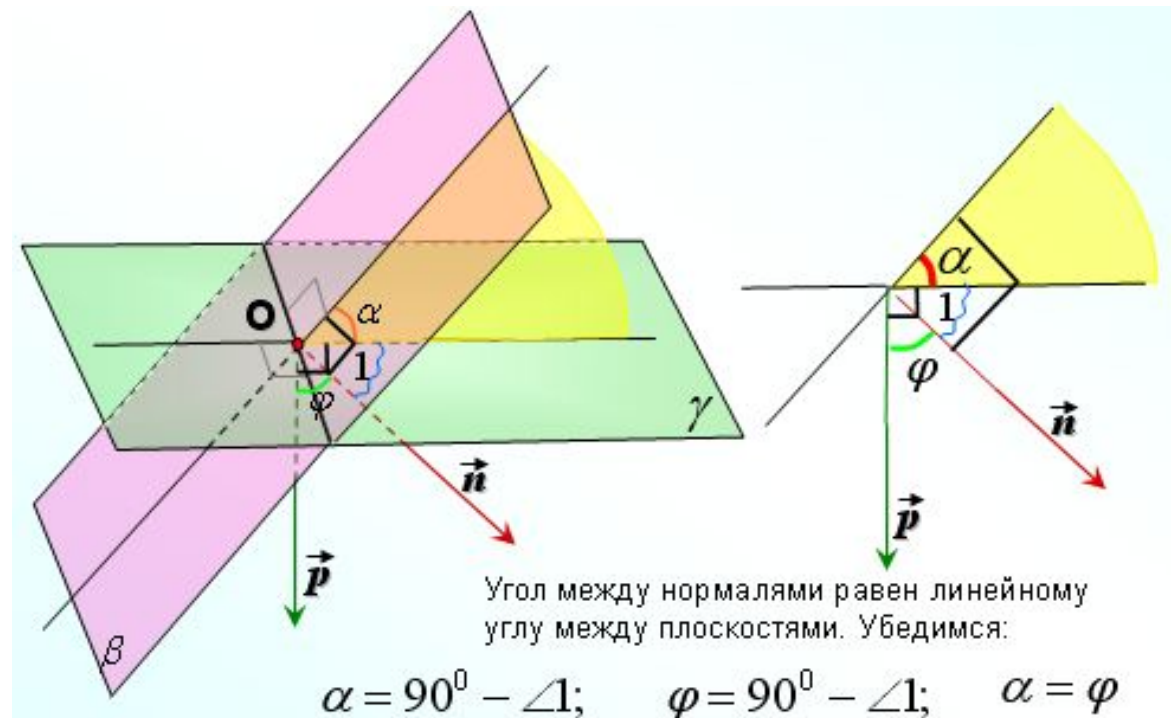
Угол между наклонной и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Определение.

Нормальным вектором плоскости (или **нормалью плоскости**) называют вектор, перпендикулярный данной плоскости.



Плоскости, пересекаясь, образуют четыре двугранных угла: два тупых и два острых или четыре прямых, причем оба тупых угла равны между собой, и оба острых тоже равны между собой. Мы всегда будем искать острый угол. Для определения его величины возьмем точку на линии пересечения плоскостей и в этой точке в каждой из плоскостей проведем перпендикуляры к линии пересечения. Нарисуем также нормальные векторы к каждой плоскости. Отложим их от точки O .



Вычислять угол между векторами мы умеем по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Но! Мы при решении задач можем выбрать нормали так, что угол между векторами будет тупой. А угол между плоскостями не может быть тупой.

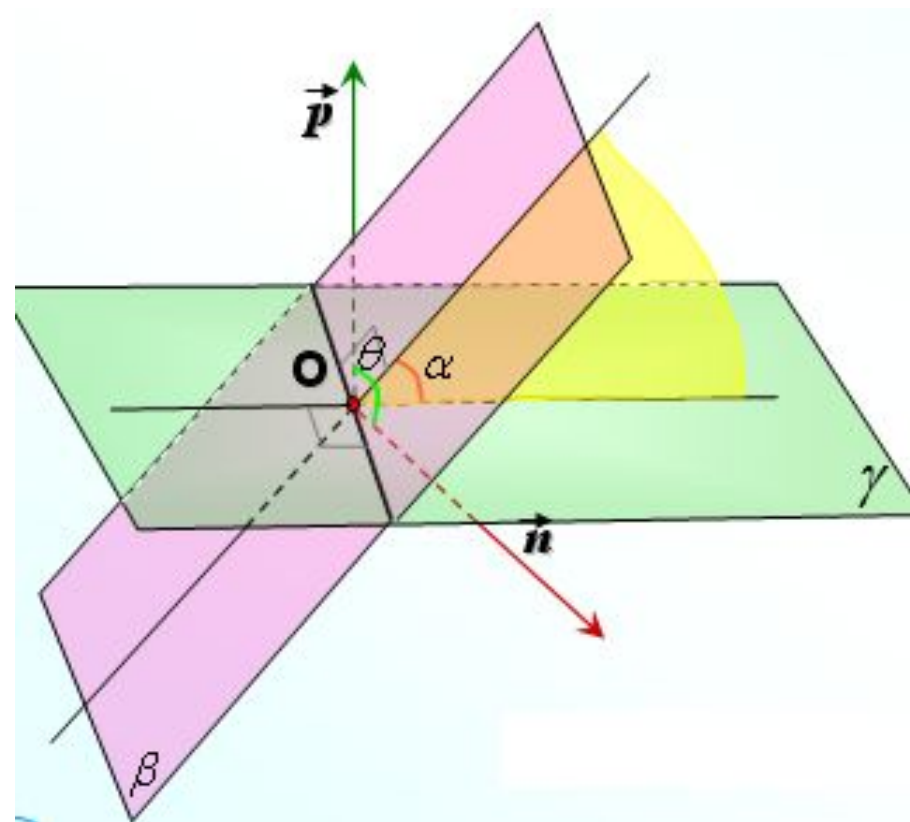
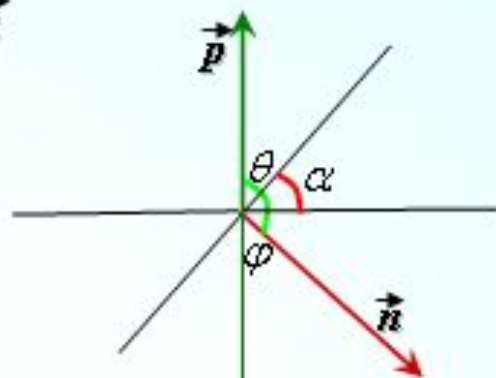
α - искомый угол между прямой и плоскостью

θ - угол между векторами \vec{p} и \vec{n}

$\alpha = \varphi$ (уже обосновали)

$$\cos \theta = \cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$$

Тогда $\cos \varphi = -\cos \theta$



Итак, если угол между нормальями острый, то мы сразу получаем угол между плоскостями (формула со знаком «+»).

Если угол между нормальями тупой, то чтобы получить косинус острого угла, надо взять полученное числовое значение для косинуса со знаком «-».

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

А лучше и проще применить знак модуля.

$$\cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Алгоритм.

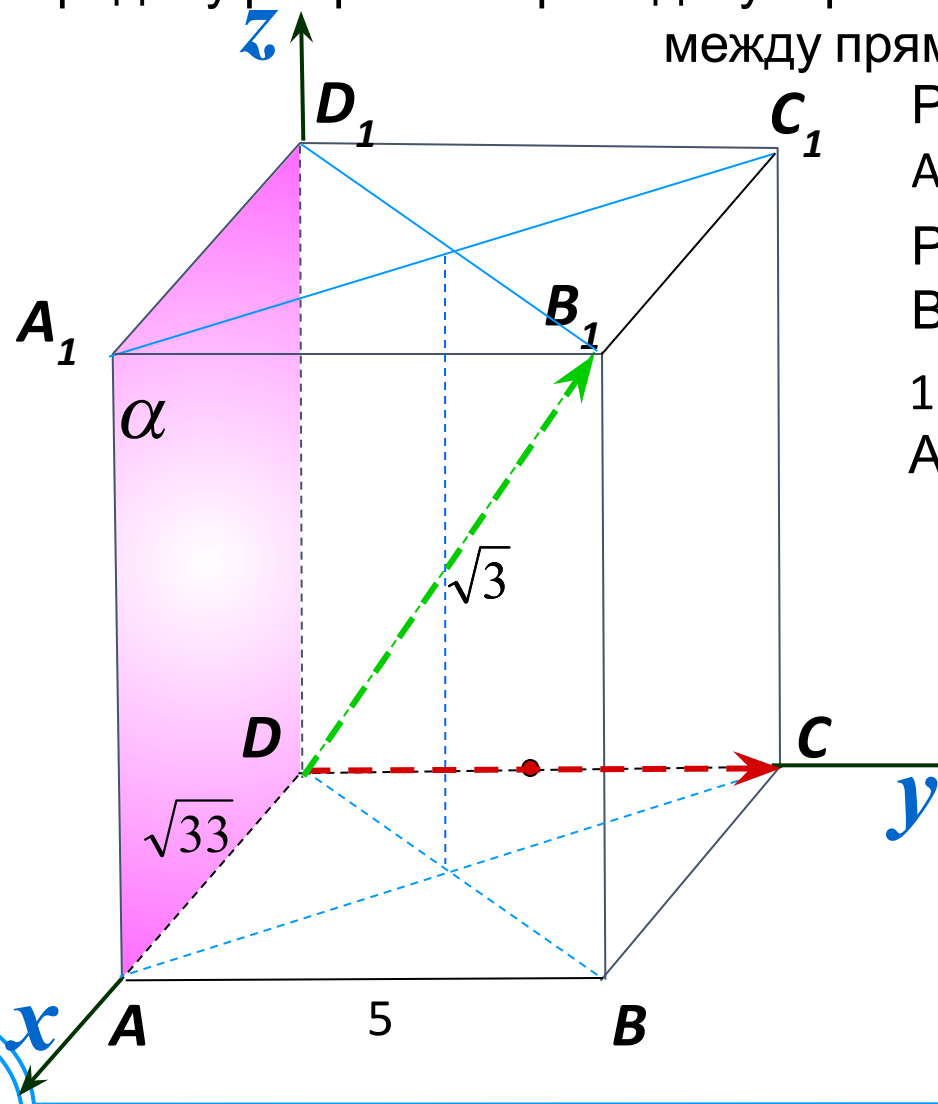
Применение скалярного произведения для вычисления угла между плоскостями.

1. Нормальный вектор (нормаль) для первой плоскости.
2. Нормальный вектор (нормаль) для второй плоскости.
3. Вычислить $\cos \alpha$ по формуле

$$\cos \alpha = \frac{|x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

4. Найти угол α . Если значение косинуса не табличное, то записать ответ, используя арккосинус.

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани $AA_1 D_1 D$ и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой $B_1 D$, если расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно $\sqrt{3}$.



Расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD ?

Решим задачу методом координат. Введем нормали к плоскостям.

1. Нормаль к плоскости

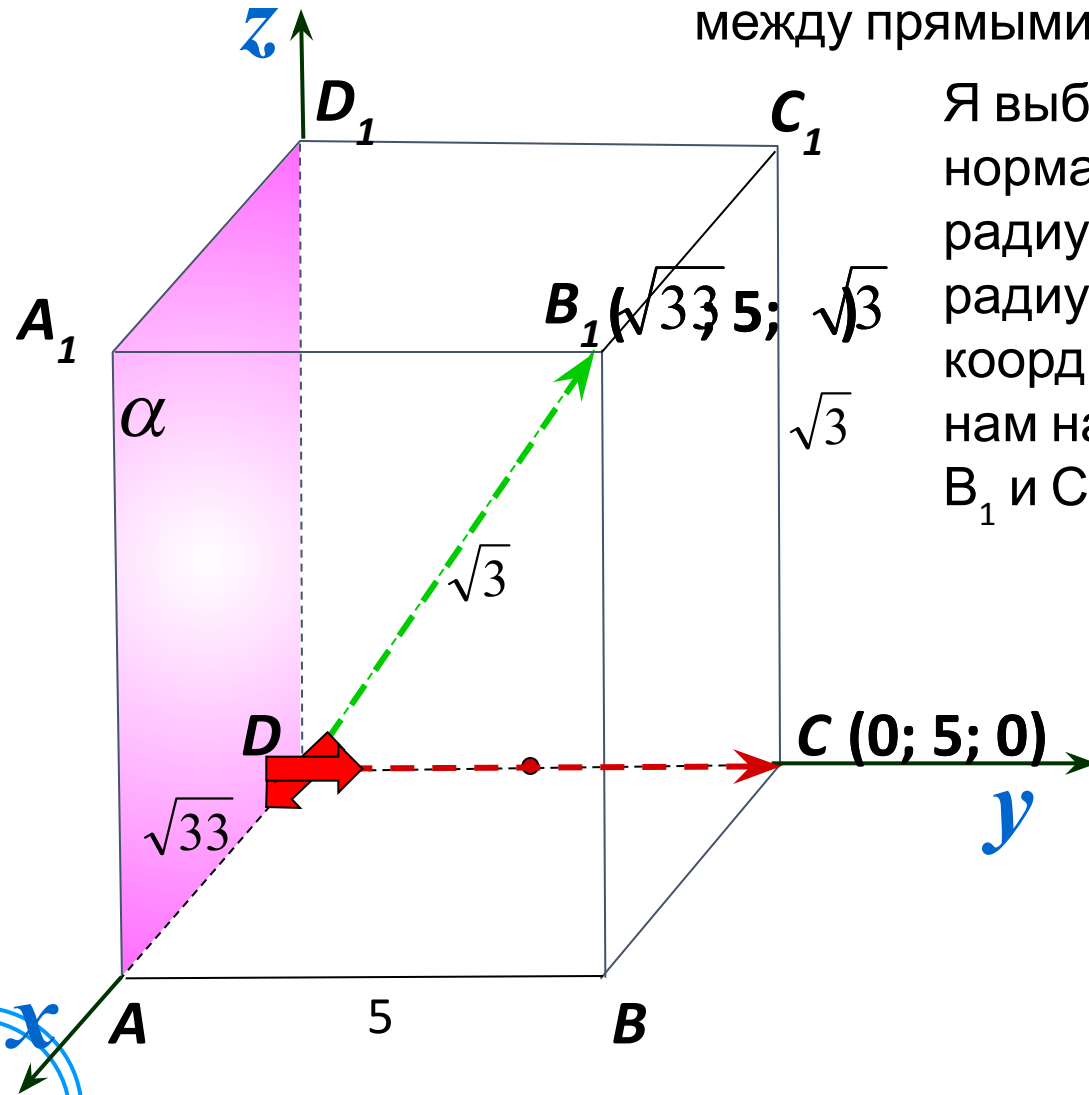
ADD_1 $\vec{DC} \perp \alpha$

2. Нормаль ко второй плоскости β которую я и строить не берусь... Но по условию это сечение проходит перпендикулярно прямой $B_1 D$.

Значит, $B_1 D$ перпендикуляр к плоскости. Выберем нормаль $B_1 D$.

$\vec{DB_1} \perp \beta$

Основание прямой четырехугольной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{33}$. Найдите тангенс угла между плоскостью грани $AA_1 D_1 D$ и плоскостью, проходящей через середину ребра CD перпендикулярно прямой $B_1 D$, если расстояние между прямыми $A_1 C_1$ и BD равно $\sqrt{3}$.



Я выбрала очень удобно нормальные векторы. Ведь это радиус-векторы. Координаты радиус-вектора такие же, как и координаты конца вектора. Значит, нам надо найти координаты точек B_1 и C .

1. $\vec{DB_1}$
2. \vec{DC}

$$\overrightarrow{DB_1} (\sqrt{33}; 5; \sqrt{3}) \quad \overrightarrow{DC} (0; 5; 0)$$

$$3. \cos \varphi = \frac{|x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2|}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

$$\cos \varphi = \frac{|\sqrt{33} \cdot 0 + 5 \cdot 5 + \sqrt{3} \cdot 0|}{\sqrt{(\sqrt{33})^2 + 5^2 + (\sqrt{3})^2} \cdot \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2}}$$

$$= \frac{|0 + 25 + 0|}{\sqrt{33 + 25 + 3} \cdot \sqrt{25}} = \frac{25}{\sqrt{61} \cdot 5} = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

$$\cos \varphi = \frac{5}{\sqrt{61}}$$

Теперь найдем тангенс.

$$\text{tg}^2 A + 1 = \frac{1}{\cos^2 A}$$

$$\text{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{1}{\left(\frac{5}{\sqrt{61}}\right)^2}$$

$$\text{tg}^2 \varphi + 1 = \frac{61}{25}$$

$$\text{tg}^2 \varphi = \frac{61}{25} - 1$$

$$\text{tg}^2 \varphi = \frac{36}{25}$$

$$\text{tg} \varphi = \pm \frac{6}{5} \quad \text{tg} \varphi = \frac{6}{5}$$

т.к. φ – острый

угол