

Элементы комбинаторики

Никандрова И.А.
МБОУ «Лицей 10»
г. Великие Луки

Примеры комбинаторных задач

- Задачи , решая которые приходится составлять различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитывать число комбинаций , называются **комбинаторными**
- Раздел математики , в котором рассматриваются подобные задачи, называют **комбинаторикой**
- Слово «комбинаторика» от латинского *combinare* - «соединять , сочетать»

Пример 1

- Из группы теннисистов, в которую входят четыре человека-Антонов, Григорьев, Сергеев и Федоров, тренер выделяет пару для участия в соревнованиях. Сколько существует вариантов выбора такой пары?
- АГ, АС, АФ
- ГС, ГФ
- СФ
- Значит, всего существует шесть вариантов выбора
- Способ рассуждений, которым мы воспользовались, называют **перебором возможных вариантов**

Пример 2

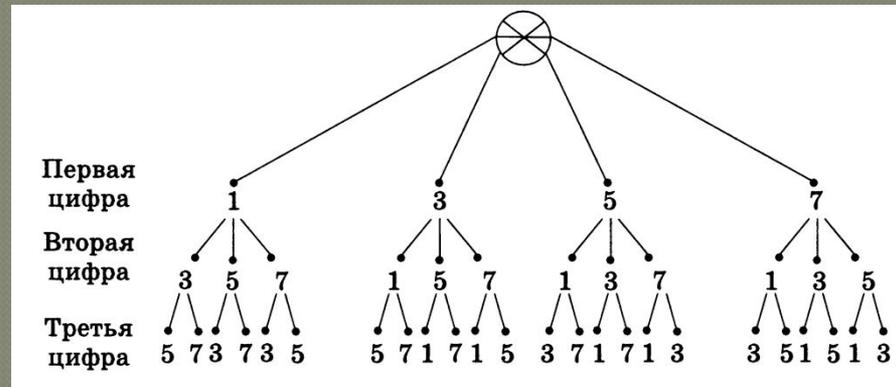
Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Чтобы ответить на вопрос задачи, выпишем все такие числа. Полученные результаты запишем в четыре строки, в каждой из которых шесть чисел:

135	137	153	157	173	175
315	317	351	357	371	375
513	517	531	537	571	573
713	715	731	735	751	753

Способ второй

- Проведенный перебор вариантов проиллюстрирован на схеме



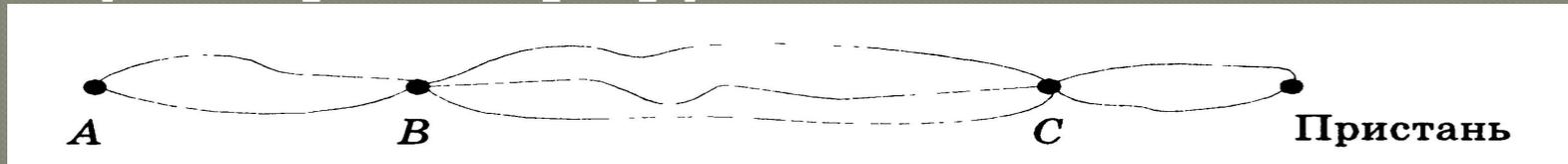
- Такую схему называют **деревом возможных вариантов**

Способ третий

- Первую цифру можно выбрать четырьмя способами . Так как после выбора первой цифры останутся три , то вторую цифру можно выбрать уже тремя способами. Наконец , третью цифру можно выбрать двумя способами. Следовательно , общее число искомых чисел равно произведению $4 \cdot 3 \cdot 2$, т.е. 24
- Использовалось **комбинаторное правило умножения:**
- Пусть имеется n элементов и требуется выбрать из них один за другим k элементов. Если первый элемент можно выбрать n_1 способами, после чего второй элемент можно выбрать n_2 способами из оставшихся, затем третий элемент можно выбрать n_3 способами из оставшихся и т. д., то число способов, которыми могут быть выбраны все k элементов, равно произведению $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_k$.

Пример 3

- Из города А в город В ведут две дороги, из города В в город С – три дороги, из города С до пристани – две дороги. Туристы хотят проехать из города А через В и С к пристани. Сколькими способами они могут выбрать маршрут?



- Решение: $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Задачи

- 1. В кафе предлагают два первых блюда :борщ , рассольник-и четыре вторых блюда: гуляш, котлеты, сосиски, пельмени. Укажите все обеды из двух блюд, которые может заказать посетитель . Построить дерево возможных вариантов
- 2. Стадион имеет четыре входа: А, В, С, D. Укажите все возможные способы, какими посетитель может войти через один вход, а выйти через другой. Сколько таких способов?
- 3. **Ответ: 12 способов**
- 3. Используя цифры 0,2,4,6 составьте все возможные трехзначные числа, в которых цифры не повторяются.

Задачи

- 4. В шахматном турнире участвуют 9 человек. Каждый из них сыграл с каждым по одной партии. Сколько всего партий было сыграно?
● **Ответ:36 партий**
- 5. При встрече 8 человек обменялись рукопожатиями. Сколько всего было сделано рукопожатий?
● **Ответ:28 рукопожатий**
- 6. Учащиеся 9 класса решили обменяться фотографиями. Сколько фотографий для этого потребуется, если в классе 24 учащихся?
● **Ответ:552 фотографии**

Задачи

- 7. В кафе имеются три первых блюда , пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами посетитель кафе может выбрать обед , состоящий из первого , второго и третьего блюд?
● **Ответ:30 способов**
- 8. Петр решил пойти на новогодний карнавал в костюме мушкетера. В ателье проката ему предложили на выбор различные по фасону и цвету предметы: пять видов брюк , шесть камзолов , три шляпы , две пары сапог . Сколько различных карнавальных костюмов можно составить из этих предметов?
● **Ответ:180 костюмов**

Перестановки

- Простейшими комбинациями , которые можно составить из элементов конечного множества , являются **перестановки**
- Число перестановок из n элементов обозначают символом P_n (читается «Р из n »)

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 2)(n - 1)n$$

- Для произведения первых n натуральных чисел используют специальное обозначение: $n!$ (читается n факториал)
- $2! = 2$; $5! = 120$; $1! = 1$
-

Примеры задач

- Таким образом , число всевозможных перестановок из n элементов вычисляется по формуле: $P_n = n!$
- **Пример 1.** Сколькими способами могут быть расставлены 8 участниц финального забега на восьми беговых дорожках?
- $P_8 = 8! = 40320$
- **Пример 2.** Сколько различных четырехзначных чисел, в которых цифры не повторяются, можно составить из цифр 0, 2, 4, 6?
- Из цифр 0, 2, 4, 6 можно получить P_4 перестановок. Из этого числа надо исключить те перестановки , которые начинаются с 0. Получаем: $P_4 - P_3 = 4! - 3! = 18$

-
- **Пример 3.** Имеется 9 различных книг, четыре из которых- учебники . Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так , чтобы все учебники стояли рядом?
 - Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 9, а 6 книг . Это можно сделать P_6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить P_4 перестановок учебников. Значит , искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P_6 * P_4$. Получаем:
$$P_6 * P_4 = 6! * 4! = 720 * 24 = 17280$$

Задачи

- 1. Сколькими способами 4 человека могут разместиться на четырехместной скамейке?
○ **Ответ:24**
- 2. Курьер должен разнести пакеты в 7 различных учреждений. Сколько маршрутов может он выбрать?
○ **Ответ:5040**
- 3. Сколько шестизначных чисел (без повторения цифр) можно составить из цифр: а) 1,2,5,6,7,8; б) 0,2,5,6,7,8 ?
○ **Ответ : а)720;б)600**
- 4. В расписании на понедельник шесть уроков: алгебра, геометрия, биология, история, физкультура, химия. Сколькими способами можно составить расписание уроков на этот день так , чтобы два урока математики стояли рядом?
○ **Ответ:240**

Задачи

- 5. Делится ли число $14!$ на:
А) 168; б) 136; в) 147; г) 132?

- 6. Найдите значение выражения:

а) $\frac{15!}{14!}$; б) $\frac{8!}{10!}$; в) $\frac{42!}{40!}$; г) $\frac{16!}{14! \cdot 3!}$.

- 7. Что больше и во сколько раз:

а) $6! \cdot 5$ или $5! \cdot 6$; б) $(n+1)! \cdot n$ или $n! \cdot (n+1)!$

- Ответ на 6) : 15; 1/90; 1722; 40

Проверочная работа

1 ВАРИАНТ

- 1. Комбинаторные задачи
- 2. Способы решения комбинаторных задач
- 3. Вычислить

$$\Gamma) \frac{36!}{2! \cdot 34!}; \quad \Delta) \frac{15!}{2! \cdot 16!}; \quad \epsilon) \frac{25!}{23! \cdot 5!}$$

2 ВАРИАНТ

- 1. Перестановки, формула
- 2. Комбинаторика
- 3. Вычислить

$$a) \frac{8!}{6! \cdot 2!}; \quad б) \frac{12!}{9! \cdot 3!}; \quad в) \frac{7! \cdot 5!}{8! \cdot 4!}$$

Размещения

Пусть имеется 4 шара и 3 пустых ячейки. В пустые ячейки можно по-разному разместить три шара из этого набора шаров. Выбирая разными способами первый, второй и третий шары, будем получать различные тройки шаров.

Каждую упорядоченную тройку, которую можно составить из четырех элементов, называют **размещением** из четырех элементов по три

- **Размещением из n элементов по k ($k < n$) называется любое множество, состоящее из любых k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов**
- Число размещений из n элементов по k обозначают A_n^k
- Читают « A из n по k »
- Формула для вычисления числа размещений из n элементов

по

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-(k-1)).$$

Примеры

- 1. Учащиеся второго класса изучают 8 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на один день, чтобы в нем было 4 различных предмета?
- В этом примере речь идет о размещениях из 8 элементов по 4. Имеем: $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.
- 2. Сколько трехзначных чисел (без повторения цифр в записи числа) можно составить из цифр 0,1,2,3,4,5,6?
- Среди данных цифр есть цифра 0, с которой не может начинаться трехзначное число . Поэтому:

$$A_7^3 - A_6^2 = 7 \cdot 6 \cdot 5 - 6 \cdot 5 = 180.$$

Задачи

- 1. Сколькими способами может разместиться семья из трех человек в четырехместном купе, если других пассажиров в купе нет?
• Ответ: 24
- 2. Из 30 участников собрания надо выбрать председателя и секретаря. Сколькими способами это можно сделать?
• Ответ: 870
- 3. Сколькими способами организаторы конкурса могут определить, кто из 15 его участников будет выступать первым, вторым и третьим?
• Ответ: 2730
- 4. На странице альбома 6 свободных мест для фотографий. Сколькими способами можно вложить в свободные места: а) 2 фотографии; б) 4 фотографии; в) 6 фотографий?
• Ответ: 30;360;720

Сочетания

- Сочетанием из n элементов по k называется любое множество, составленное из данных n элементов
- В отличие от размещений в сочетаниях не имеет значения, в каком порядке указаны элементы. Два сочетания из n элементов по k отличаются друг от друга хотя бы одним элементом
- Обозначают

$$C_n^k$$

- Читают «С
- Формула сочетаний по k , где $k < n$

$$C_n^k = \frac{n!}{k! (n-k)!} \cdot$$

Примеры

- 1. Из 15 членов туристической группы надо выбрать трех дежурных. Сколькими способами можно сделать этот выбор?
- Каждый выбор отличается от другого хотя бы одним дежурным. Значит, здесь речь идет о сочетаниях из 15 элементов

- Имеем:
$$C_{15}^3 = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455.$$

- 2. Из вазы с фруктами, в которой лежит 9 яблок и 6 груш, надо выбрать 3 яблока и 2 груши. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

- Имеем:
$$C_9^3 \cdot C_6^2 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 1260.$$

Задачи

- 1. В классе 7 человек успешно занимаются математикой. Сколькими способами можно выбрать из них двоих для участия в математической олимпиаде?
Ответ:21
- 2. Учащимся дали список из 10 книг , которые рекомендуется прочитать во время каникул. Сколькими способами ученик может выбрать из них 6 книг?
Ответ:210
- 3. В классе учатся 16 мальчиков и 12 девочек. Для уборки территории требуется выделить четырех мальчиков и трех девочек. Сколькими способами это можно сделать?
Ответ:400400
- 4. В библиотеке читателю предложили на выбор из новых поступлений 10 книг и 4 журнала. Сколькими способами он может выбрать из них 3 книги и 2 журнала?
Ответ:720

Самостоятельная работа

1 вариант

- 1. Сколькими способами 9 участников конкурса могут выступить в порядке очередности в финале ?
- 2. Делится ли число $40!$ на:
а) 410 ; б) 500 ; в) 780 ?
- 3. Используя цифры $0, 3, 7, 8$ составьте все возможные двузначные числа, в которых цифры не повторяются
- 4. В городской думе 10 депутатов моложе 30 лет. Сколькими способами можно выбрать из них троих для работы в комитете по молодежной политике?

2 вариант

- 1. Курьер должен развести пиццу по шести адресам. Сколько маршрутов он может выбрать?
- 2. Делится ли число $50!$ на:
а) 400 ; б) 98 ; в) 510 ?
- 3. Используя четные цифры $0, 2, 4, 6, 8$, составьте все возможные трехзначные числа, в которых цифры не повторяются
- 4. В группе 9 студентов хорошо владеют иностранным языком. Сколькими способами можно выбрать из них четверых для работы на практике с иностранцами?

ОТВЕТЫ

1 вариант

- 1. $9! = 362880$
- 2. а) нет
- б) да
- в) да
- 3. 30 70 80
- 37 73 83
- 38 78 87
- 4. 120

2 вариант

- 1. $6! = 720$
- 2. а) да
- б) да
- в) да
- 3. 48 чисел
- 4. 126