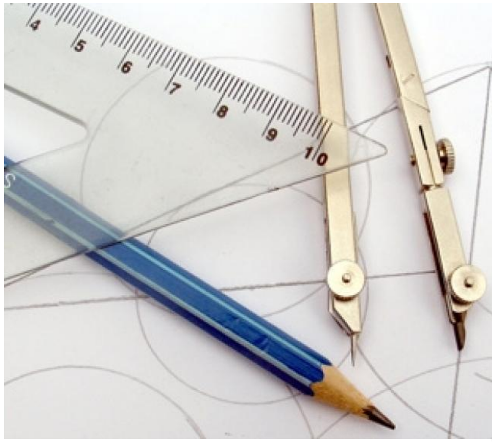


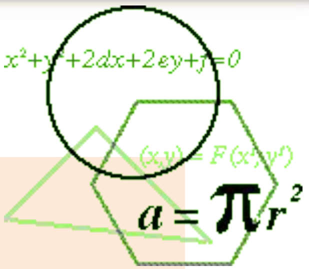
УРАВНЕНИЯ
N-ОЙ СТЕПЕНИ

Большинство жизненных задач решаются как алгебраические уравнения: приведением их к самому простому виду.

Толстой Л.Н.

Задачи:

- рассмотреть основные виды уравнений
- познакомиться с различными методами решения уравнений



Метод решения хорош, если с самого начала мы можем предвидеть – и впоследствии подтвердить это, - что следуя этому методу, мы достигнем цели.

Лейбниц

Методы решения уравнений

- разложение многочлена на множители
- метод введения новой неизвестной
- комбинирование различных методов
- метод неопределенных коэффициентов

Разложение многочлена на множители

Любой многочлен может быть представлен в виде произведения. Самые известные методы разложения многочленов это: вынесение общего множителя, применение формул сокращенного умножения, выделение полного квадрата, группировка, разложение квадратного трехчлена на множители по формуле

$$\underline{2x^5}\ \underline{-10x^4}\ \underline{+14x^3}\underline{-10x^2}\underline{+12x=0}$$

$$2x\,(x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 6) = 0$$

$x = 0$ *или* $x^4 - 5x^3 + 7x^2 + 6 = 0$

$$(x-2)(x^3 - 3x^2 + x - 3)=0$$

$$(x-2)(x^2\cdot(x-3)+(x-3))=0$$

$$(x-2)(x-3)(x^2+1)= 0$$

$x - 2 = 0$ *или* $x - 3 = 0$ *или* $x^2 + 1 = 0$

$x = 2$ $x = 3$ *корней нет*

Ответ: $0,\ 2,\ 3$

Метод введения новой неизвестной

В некоторых случаях путем замены выражения f(x), входящего в многочлен $P_n(x)$, через у можно получить многочлен относительно у, который уже легко разложить на множители. Затем после замены у на f(x) получаем разложение на множители многочлена $P_n(x)$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$$

пусть $x^2 + 2x + 2 = t$

$$\frac{t-1}{t}+\frac{t}{t+1}=\frac{7}{6}$$

умножим обе части уравнения на $6t(t+1)$, где $t \neq 0$, $t \neq -1$

$$6t^2 - 6 + 6t^2 - 7t^2 - 7t = 0$$

$$t_1 = 2, \quad t_2 = -0,6$$

$$5t^2 - 7t - 6 = 0$$

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\frac{7}{6}$$

1) $x^2 + 2x + 2 = 2$

$x^2 + 2x = 0$

$x(x+2)=0$

$x = 0$ или $x = -2$

2) $x^2 + 2x + 2 = -0,6$

$5x^2 + 10x + 13 = 0$

$D = -169 < 0$

корней нет

Ответ: $-2; 0$

Метод неопределенных коэффициентов

Суть метода неопределённых коэффициентов состоит в том, что вид сомножителей, на которые разлагается данный многочлен, угадывается, а коэффициенты этих сомножителей (также многочленов) определятся путём перемножения сомножителей и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях переменной.

$x^4+4x^3-20x^2+21x-16=0$

$x^4+4x^3-20x^2+21x-16=(x^2+px+g)(x^2+bx+c)$

$(x^2+px+g)(x^2+bx+c)=x^4+x^3(p+b)+x^2(c+g+pb)+x(pc+gb)+gc$

$$\begin{cases} p+b=4 \\ c+g+pb=-20 \\ pc+gb=21 \\ gc=-16 \end{cases}$$

p=-1, b=5, c=-16, g=1.

$(x^2-x+1)(x^2+5x-16)=0$

1) $x^2-x+1=0$ или 2) $x^2+5x-16=0$

D= -3 < 0

Корней нет

D = 89

$$x_1=\frac{-5-\sqrt{89}}{2}$$

$$x_2=\frac{-5+\sqrt{89}}{2}$$

Ответ: $\dfrac{-5\pm\sqrt{89}}{2}$

Виды уравнений

- квадратные уравнения
- биквадратные уравнения
- возвратные уравнения
- уравнения вида $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A$
- уравнения вида:

  $(ax^2 + bx + c)(ax^2 + b_1x + c_1)=Ax^2$
- уравнения, однородные относительно многочленов

<u>Возвратные уравнения</u>

общий вид :

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0$$

Алгебраическое уравнение f(x)=0 называется возвратным, если у многочлена в левой его части, представленного в каноническом виде, равны коэффициенты членов, равноудаленных от его концов: первого и последнего, второго и предпоследнего и т.д.

Рассмотрим алгоритм решения возвратных уравнений четной степени

$$ax^n+bx^{n-1}+\ldots+bx+a=0$$

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$$

$$a\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b\left(x+\frac{1}{x}\right)+c=0$$

$$t=x+\frac{1}{x} \qquad t^2-2=x^2+\frac{1}{x^2}$$

$$at^2+bt+c-2a=0$$

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$$

	2	5	-13	-13	5	2
-1	2	3	-16	3	2	0

$$x-1=0 \quad \text{или} \quad 2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$$

$$(x-1)(2x^4+3x^3-16x^2+3x+2)=0$$

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\frac{1}{x}\right)-16=0$$

$$x+\frac{1}{x}=t,\ x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$$

$$2t^2+3t-20=0$$

$$t_1=\frac{5}{2},\ t_2=-4$$

$$2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$$

$x+1=0$ или $2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0$

$x=-1$

1) $2x^2+5x+2=0$

$x_1=2,\ x_2=0{,}5$

2) $x^2+4x+1=0$

$$x_3=-2+\sqrt{3}$$

$$x_4=-2-\sqrt{3}$$

Ответ: $0{,}5;\ 2;\ -2\pm\sqrt{3}$

$$(x^2-x+1)^4 - 6x^2(x^2-x+1)^2 = -5x^2$$

Пусть $(x^2-x+1)^2 = a$; $x^2 = b$

$$a^2 - 6ab + 5b^2 = 0$$

$$a)\; x^2 - x + 1 = -\sqrt{5x^2}$$

$$x^2-x+1 = x$$

$$a(a-b) - 5b(a-b) = 0$$

$$б)\; x^2 - x + 1 = \sqrt{5x^2}$$

$$(a-b)(a-5b) = 0$$

$a=b$ или $a=5b$

1) $(x^2-x+1)^2 = x^2$ 2) $(x^2-x+1)^2 = 5x^2$

$$Ответ: 1;\ \frac{1+\sqrt{5} \pm \sqrt{2+2\sqrt{5}}}{2}$$

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!