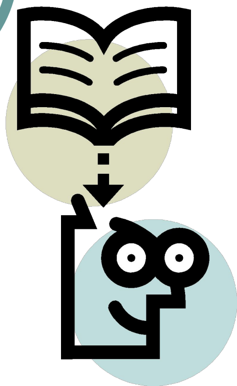
Учимся решать тригонометрические неравенства

Автор: учитель высшей категории МОУ СОШ № 27
Ветрова Л.И.



Решение простейшего неравенства sin $x \geq a$, гд

Точки на окружности единичного радиуса, соответствующие аргументу x, расположены выше прямой $y = a$ или на самой прямой.
Из рисунка 1 видно, что arcsin $a + 2\Pi n \leq x \leq \Pi$ - arcsin $a + 2\Pi n$, n Є Z.

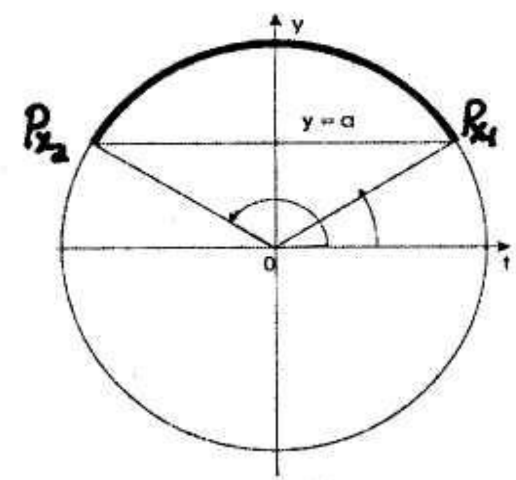


Рис. 1.

- X_1 = arcsin a
- $X_2 = \Pi - X_1$

Решение простейшего неравенства $\sin x \geq a$, где $-1 \leq a \leq 0$

- При $-1 \leq a \leq 0$ точки, соответствующие аргументу x на окружности единичного радиуса, расположены выше прямой $y = a$ или на самой прямой. Очевидно, что эта дуга по длине больше полуокружности и из рис. 2 видно, что $\arcsin a + 2\pi k \leq x \leq \pi - \arcsin a + 2\pi k$, $k \in Z$.

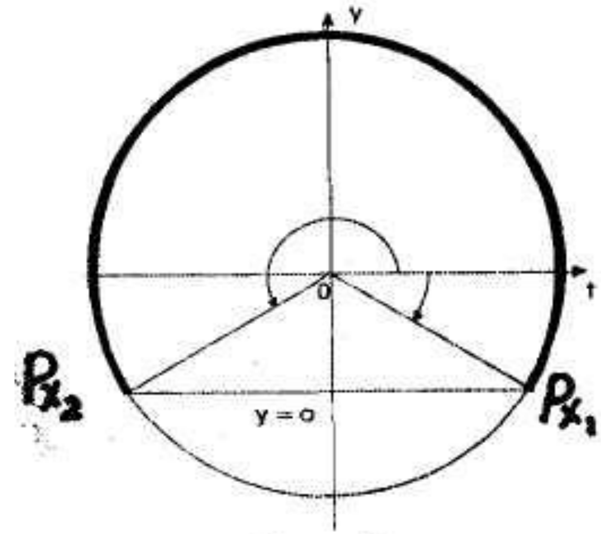


Рис. 2.

$X_1 = \arcsin a$

$X_2 = \pi - X_1$

ПРИМЕР 1

Решить неравенство: $\sin 2x \geq -\frac{1}{2}$.

Решение.

Обозначим $2x$ через z, тогда $\sin z \geq -\frac{1}{2}$ и $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n \leq z \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$.

Возвращаясь к старой переменной, получим $-\frac{\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z$.

Решение неравенства sin x $\le$ a.

- Точки на единичной окружности, которые соответствуют аргументу x, расположены ниже прямой $y = a$ или на самой прямой. В общем виде решения неравенства могут быть записаны в виде $-\Pi - \arcsin a + 2\Pi n \le x \le \arcsin a + 2\Pi n$,

$n \in Z$.

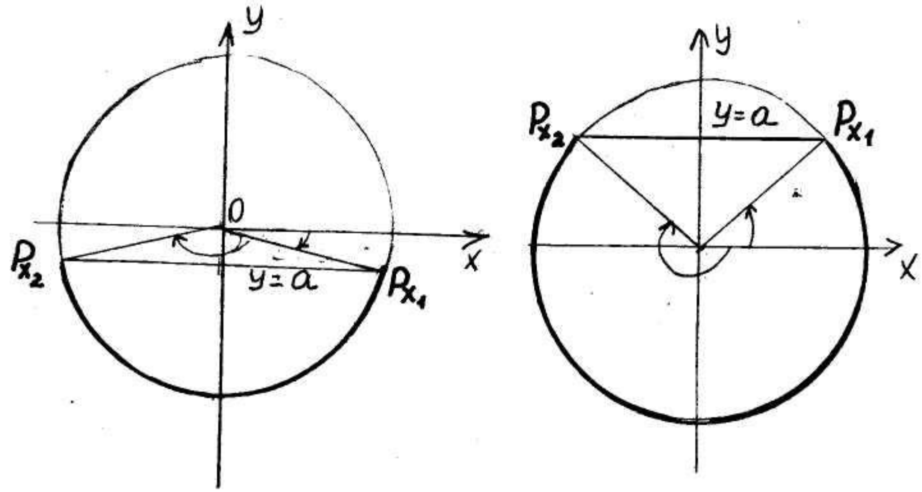


Рис 3.

- $X_1 = \arcsin a$
- $X_2 = -\Pi - X_1$

ПРИМЕР 2

Решить неравенство: $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

Имеем $-\Pi - \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\Pi n \leq x \leq \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\Pi n, \; n \in Z.$

$-\frac{3\Pi}{4} + 2\Pi n \leq x \leq -\frac{\Pi}{4} + 2\,\Pi n, \; n \in Z.$

Решение неравенств cos x $\geq$ a

- Точки на окружности единичного радиуса, которые соответствуют решению cos $x \geq a$, лежат правее прямой

  $x = a$ или на самой прямой (см рис.4). Тогда все решения можно записать формулой

  -arccos $a + 2\Pi n \leq x \leq$ arccos $a + 2\Pi n$, $n \in Z$

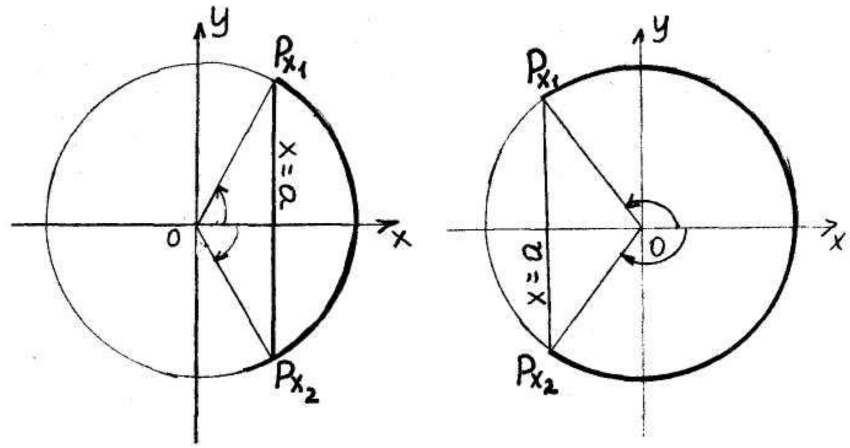


Рис. 4

X_1 = arccos a
$X_2 = - X_1$

Решение неравенств cos x $\leq$ a

- Точки, соответствую-щие неравенству cos x $\leq$ a, лежат левее от прямой x = a или на самой прямой. Решения неравенства можно записать так $\arccos a + 2\Pi n \leq x \leq 2\Pi - \arccos a + 2\Pi n,\ n \in Z$.

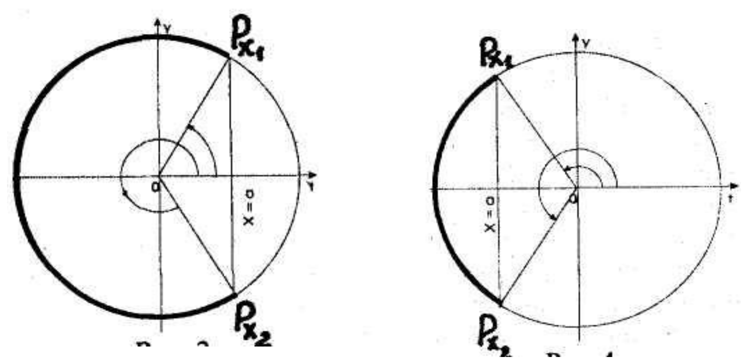


Рис 5.

$X_1 = \arccos a$

$X_2 = 2\Pi - X_1$

ПРИМЕР 3

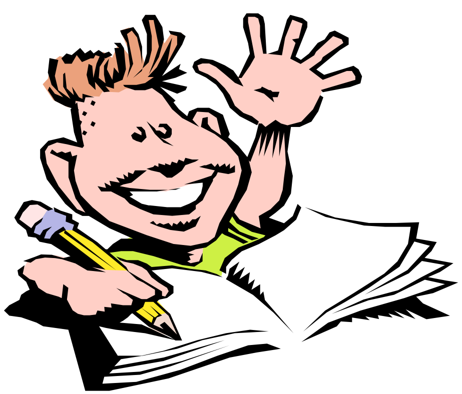
Решить неравенство: $\cos\frac{1}{2}x \le -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

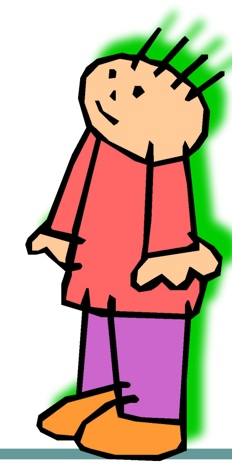
Имеем $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n \le \frac{1}{2}x \le 2\pi - \arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\pi n,\ n \in Z;$

$\frac{3\pi}{4} + 2\pi n \le \frac{1}{2}x \le \frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ n \in Z$ (кстати, заметить углы $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$ легко на

Рис 5.

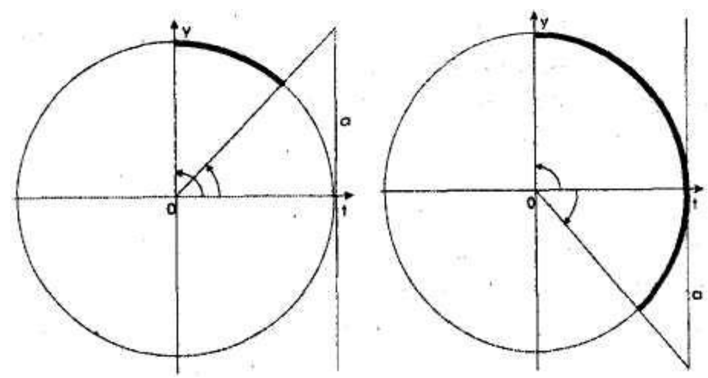
Умножая неравенство на 2, получим $\frac{3\pi}{2} + 4\pi n \le x \le \frac{5\pi}{2} + 4\pi n,\ n \in Z.$





Решения неравенства tg x $\geq$ a

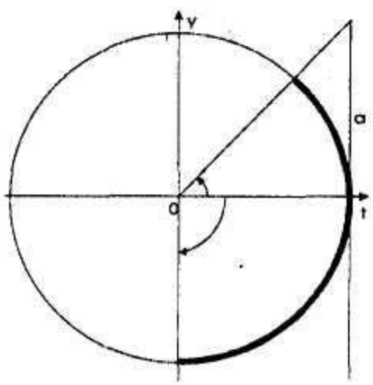
- Все решения неравенства tg x $\geq$ a задаются неравенством arctg $a + \Pi n \leq x < \frac{\Pi}{2} + \Pi n$, $n \in Z$

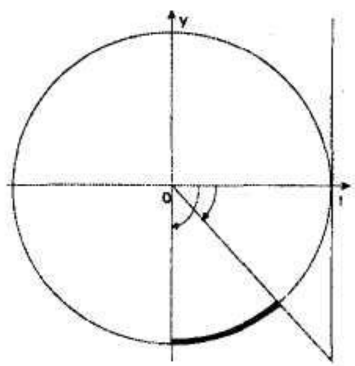


Решения неравенства tg x ≤ a

Все решения неравенства *tg x* ≤ *a* задаются формулой

$$-\frac{\Pi}{2}+\Pi k < x \leq arctg\ a + \Pi k,\ k \in Z$$





ПРИМЕР 4

Решить неравенство: tg $2x \le -1$.

Решение.

$$-\frac{\pi}{2} + \pi k < 2x \le -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z,$$

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} < x \le -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ k \in Z,\ \frac{\pi}{2}$$

ВНИМАНИЕ !!!

Мы не рассматриваем решение неравенств ctg $x \geq a$ или ctg $x \leq a$, так как они легко сводятся к неравенствам $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \geq a$ или $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leq a$.


EXiT