Дзбоева ТБ,учитель математики
МБОУСОШ №2.

Решение заданий С3 нестандартными методами.

Метод Голубева

Решение неравенств

- При подготовке к ЕГЭ, сталкиваешься с задачами, которые привычными методами решить сложно или громоздко. Приходится искать методы, которые позволяют решать задачи более просто. Одним из таких методов является «метода замены множителей». При решении логарифмических и показательных неравенств воспользуемся следующими правилами.

Основная идея метода замены множителей состоит в замене любого множителя в числителе или в знаменателе на знакосовпадающий с ним и имеющий одни и те же корни.

Замечание. Преобразованное таким образом неравенство всегда равносильно исходному в области существования последнего.

Предупреждение. Указанная замена возможна только тогда, когда неравенство приведено к стандартному виду.

№	Выражение F	Выражение G
1 1а 1б	$\log_a f - \log_a g$ $\log_a f - 1$ $\log_a f$	$(a-1)(f-g)$ $(a-1)(f-a)$ $(a-1)(f-1)$
2 2а 2б	$\log_h f - \log_h g$ $\log_h f - 1$ $\log_h f$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)(f-h)$ $(h-1)(f-1)$
3	$\log_f h - \log_g h$ $(g \neq 1,\ f \neq 1)$	$(f-1)(g-1)\times$ $\times(h-1)(g-f)$
4 4а	$h^f - h^g \quad (h>0)$ $h^f - 1$	$(h-1)(f-g)$ $(h-1)f$
5	$f^h - g^h$ $(f>0; g>0)$	$(f-g)h$
6	$\|f\|-\|g\|$	$(f-g)(f+g)$
7	$\log_h f \cdot \log_p g$	(h-1)(f-1)(p-1)(g-1)
8	$\log_h f + \log_h g$	(fg-1)(h-1)

Пример 12. (2010) Решите неравенство

$$\log_{2x+3} x^2 < 1.$$

Решение. Запишем неравенство в виде $\log_{2x+3} x^2 - 1 < 0$ и заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases} (2x+2)(x^2-2x-3) < 0 \\ 2x+3 > 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x+1)(x-3) < 0 \\ x > -1{,}5 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

x≠-1

Ответ: $(-1{,}5;-1)\cup(-1;0)\cup(0;3)$.

Пример 2. Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)\le 2.$$

Решение. Запишем неравенство в виде

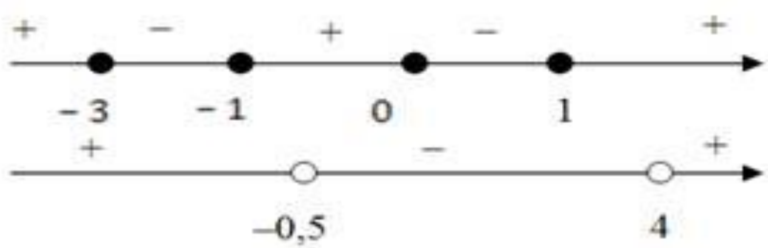
$\log_{|x+2|}\left(4+7x-2x^2\right)-\log_{|x+2|}(x+2)^2\le 0$ и

заменим его равносильной системой, используя метод рационализации

$$\begin{cases}(|x+2|-1)(4+7x-2x^2-x^2-4x-4)\le 0\\ 4+7x-2x^2>0\\ x+2\ne 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}((x+2)^2-1)(-3x^2+3x)\le 0\\ (x+0{,}5)(x-4)<0\\ x\ne -2\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x(x+1)(x+3)(x-1)\ge 0\\ (x+0{,}5)(x-4)<0\\ x\ne -2\end{cases}$$



Ответ: $(-0{,}5;0]\cup[1;4)$.

2.Решите неравенство

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leqslant 2.$$

Решение

Одз:

$$\left[\begin{array}{l} |x+2| > 0, \\ |x+2| \neq 1, \\ 4+7x-2x^2 > 0. \end{array}\right.$$

$$\log_{|x+2|}(4+7x-2x^2) \leqslant 2 \Leftrightarrow \frac{\log_2(4+7x-2x^2)}{\log_2|x+2|} - 2 \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(4+7x-2x^2) - \log_2|x+2|^2}{\log_2|x+2| - \log_2 1} \leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(4+7x-2x^2)-(x+2)^2}{|x+2|-1} \leq 0, \\ 4+7x-2x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-3x^2+3x}{(x+2)^2-1^2} \leq 0, \\ 2x^2-7x-4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x(x-1)}{(x+1)(x+3)} \geq 0, \\ -0,5 < x < 4. \end{cases}$$

Последняя система легко решается методом интервалов.

Ответ: **(–0,5; 0]∪[1; 4).**

1.Решите неравенство **$\log_{2x-5}(5x-2) \geq 1$.**

Решение.

$$\log_{2x-5}(5x-2) \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2)}{\log_2(2x-5)} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(5x-2) - \log_2(2x-5)}{\log_2(2x-5) - \log_2 1} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(5x-2)-(2x-5)}{(2x-5)-1} \geq 0, \\ 5x-2 > 0, \\ 2x-5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+3}{2x-6} \geq 0, \\ x > 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-3} \geq 0, \\ x > 2,5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 3.$$

Ответ: **(3; ∞)**

.

Перепишем неравенство в виде:

$$\log_{5-x}(x-7)^2 \le 2\log_{5-x}(x-1)(7-x)-2$$

Найдем область определения неравенства

$$\begin{cases} 5-x>0 \\ 5-x\ne 1 \\ x\ne 7 \\ (x-1)(7-x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<5 \\ x\ne 4 \\ x\ne 7 \\ 1<x<7 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<x<4 \\ 4<x<5 \end{array}\right.$$

В области определения неравенство равносильно следующему

$$2\log_{5-x}(7-x) \le 2\log_{5-x}(x-1)+2\log_{5-x}(7-x)-2$$

$$\log_{5-x}(7-x) \le \log_{5-x}(x-1)+\log_{5-x}(7-x)-1$$

$$\log_{5-x}(x-1) \ge 1$$

$$\log_{5-x}(x-1) \ge \log_{5-x}(5-x)$$

Исходя из метода рационализации, на области определения неравенство равносильно следующему

$$(5-x-1)(x-1-5+x) \ge 0$$

$$(4-x)(2x-6) \ge 0$$

$$(4-x)(x-3) \ge 0$$

$$3 \le x \le 4$$

С учетом области определения имеем $3 \le x < 4$

Ответ: $[3;4)$

3.Решите неравенство $\mathbf{\log_{2-x}(x + 2)\cdot\log_{x+3}(3 - x) \le 0}$.

Решение.

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+2)}{\log_2(2-x)}\cdot\frac{\log_2(3-x)}{\log_2(x+3)}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+2)-\log_2 1}{\log_2(2-x)-\log_2 1}\cdot\frac{\log_2(3-x)-\log_2 1}{\log_2(x+3)-\log_2 1}\leqslant 0 \Leftrightarrow$$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} x+2>0, \\ 3-x>0, \\ 2-x>0, \\ 2-x\neq 1, \\ x+3>0, \\ x+3\neq 1. \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x>-2 \\ x<3 \\ x<2 \\ x>-3 \\ x\neq 1 \\ x\neq -2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(2-x)}{(1-x)(x+2)}\le 0, \\ -2<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}\le 0, \\ -2<x<2 \end{cases}$$

$\left[\begin{array}{l} x>-2 \\ x<2 \\ x\neq 1 \end{array}\right.$

Последняя система легко решается методом интервалов.

Ответ: **(–2; –1]∪(1; 2).**

4.Решите неравенство

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geqslant \log_{2x^2-5x+3}(3-x).$$

Решение.

$$\log_{12x^2-41x+35}(3-x) \geqslant \log_{2x^2-5x+3}(3-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(3-x)}{\log_2(12x^2-41x+35)} - \frac{\log_2(3-x)}{\log_2(2x^2-5x+3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log_2(3-x)\cdot(\log_2(2x^2-5x+3)-\log_2(12x^2-41x+35))}{\log_2(12x^2-41x+35)\cdot\log_2(2x^2-5x+3)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\log_2(3-x)-\log_2 1)\cdot(\log_2(2x^2-5x+3)-\log_2(12x^2-41x+35))}{(\log_2(12x^2-41x+35)-\log_2 1)\cdot(\log_2(2x^2-5x+3)-\log_2 1)} \geqslant 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2-x)(-10x^2+36x-32)}{(12x^2-41x+34)(2x^2-5x+2)} \geq 0, \\ 3-x>0, \\ 12x^2-41x+35>0, \\ 2x^2-5x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)^2\left(x-\dfrac{8}{5}\right)}{\left(x-\dfrac{17}{12}\right)(x-2)^2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)} \geq 0, \\ x<3, \\ \left(x-\dfrac{5}{3}\right)\left(x-\dfrac{7}{4}\right)>0, \\ (x-1)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)>0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства последней системы – объединение промежутков

$$\left(\frac{1}{2};\ \frac{17}{12}\right) \cup \left[\frac{8}{5};\ 2\right) \cup (2;\ \infty).$$

Пересечением решений трех оставшихся неравенств является множество

$$(-\infty;\ 1) \cup \left(\frac{3}{2};\ \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4};\ 3\right).$$

Следовательно, решение всей системы:

$$\left(\frac{1}{2};\ 1\right) \cup \left[\frac{8}{5};\ \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4};\ 2\right) \cup (2;\ 3).$$

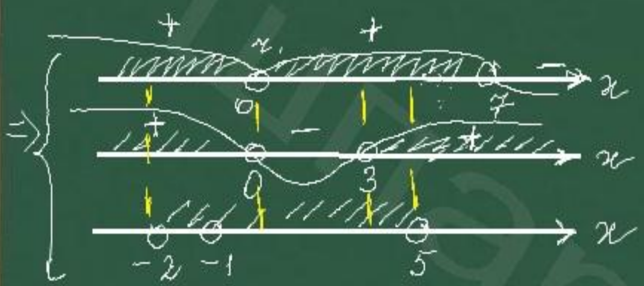
Ответ
:

$$\left(\frac{1}{2};\ 1\right) \cup \left[\frac{8}{5};\ \frac{5}{3}\right) \cup \left(\frac{7}{4};\ 2\right) \cup (2;\ 3).$$

C3 Решите неравенство

$$\log_{x+2}(7x^2-x^3)+\log_{(x+2)^{-1}}(x^2-3x)\ge\log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5-x}$$

1) О.Д.З. $\begin{cases} x+2>0 \\ x+2\neq 1 \\ 7x^2-x^3>0 \\ x^2-3x>0 \\ 5-x>0 \end{cases}$; $\begin{cases} x>-2 \\ x\neq -1 \\ x^2(7-x)>0 \\ x(x-3)>0 \\ x<5 \end{cases}$ $\Rightarrow$



$\Rightarrow$ $x\in(-2;-1)\cup(-1;0)\cup(3;5)$

2) $\log_{x+2}(7x^2-x^3)+\log_{(x+2)^{-1}}(x^2-3x)\ge\log_{\sqrt{x+2}}\sqrt{5-x} \Leftrightarrow$

$\overset{\text{О.Д.З.}}{\Leftrightarrow} \log_{x+2}(7x^2-x^3)-\log_{x+2}(x^2-3x)\ge\log_{x+2}(5-x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_{x+2}(7x^2-x^3)\ge\log_{x+2}(5-x)(x^2-3x) \overset{\text{О.Д.З.}}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\text{О.Д.З.}}{\Leftrightarrow} (x+2-1)(7x^2-x^3-(5-x)(x^2-3x))\ge 0 \overset{\text{О.Д.З.}}{\Leftrightarrow}$

$\overset{\text{О.Д.З.}}{\Leftrightarrow} (x+1)(-x^2+15x)\ge 0 \overset{\text{О.Д.З.}}{\Leftrightarrow} x(x+1)($