РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ

Презентация подготовлена:
Учителем математики
Корсуковой Викторией Кимовной
Школа №43 Приморского района Санкт-Петербурга

Занятие №1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ, СОДЕРЖАЩИХ МОДУЛЬ.

I. Определение модуля: $|a|=\{a, \text{если } a\geq 0; -a, \text{если } a<0\}$

Свойства модуля:

1° $|-a|=|a|$

2° $|a\ b|=|a|\bullet|b|$

3° $|a/b|=|a|/|b|$

4° $|a+b|=|a|+|b|$, тогда и только тогда, когда $a\geq 0$ и $b\geq 0$

5° $|a|+|b|=a+b$, тогда и только тогда, когда $a\geq 0$, $b\geq 0$

6° $|a-b|=|a|+|b|$, тогда и только тогда, когда $ab\geq 0$

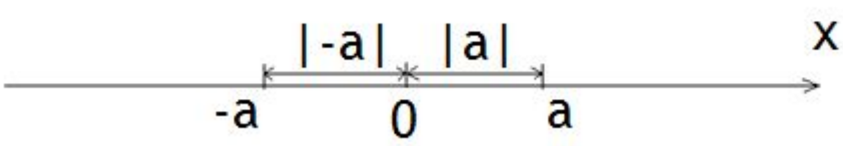
7° $|a_1+a_2+\ldots+a|\leq a_1+a_2+\ldots+a$

8° $\sqrt{a^2}=|a|$

9° $|a|^2=a^2$

10° $|a|-|b|\geq 0$, тогда и только тогда, когда $a^2-b^2\geq 0$.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ модуля действительного числа а будет рассматриваться длина отрезка от начала отсчета до точки, изображающей число.



РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВИДА:

$|f(x)|=a$, если $a<0$, то корней нет

если $a=0$, то $f(x)=0$

если $a>0$, то $f(x)=a$ или $f(x)=-a$

Примеры:

1) $|2x-3|=1 \Leftrightarrow 2x-3=1$ или $2x-3=-1$; $x=2$ или $x=1$. Ответ: 1;2.
2) $|x^2-5x|=6 \Leftrightarrow x^2-5x=6$ или $x^2-5x=-6$; $x^2-5x-6=0$ или $x^2-5x+6=0$; $x=-1$; $x=6$; $x=2$; $x=3$. Ответ: -1;2;3;6.
3) Задания для самоконтроля:

а) $|2x+3|=4$

б) $|x^2+x+1|=1$

в) $|(x-1)/(x+1)|=2$

г) $|x^3-3x|=2$

д) $|(|x|-1)/(|x|+1)|=3/4$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $|x+2|=-1$
2. $|3x-3|=6$
3. $|x^2+2x-3|=5$
4. $|x^2-5x|=6$
5. $|(|x|+5)/(3+|x|)|=5/6$

2 вариант:

1. $|1-x|=-3$
2. $|4x-4|=8$
3. $|x^2-3x|=4$
4. $|x^2-4x+2|=2$
5. $|(|x|-2)/(|x|+2)|=2/3$

Занятие №2 $|\pm f(x)|=f(x) \Leftrightarrow f(x)\geq 0$

Примеры:

1) $|x-8|=x-8 \Leftrightarrow x-8\geq 0; x\geq 8$ Ответ: $[8; \infty)$
2) $|x|+x=0 \Leftrightarrow |x|=-x \Leftrightarrow -x\geq 0; x\leq 0$ Ответ: $(-\infty; 0]$
3) Задания для самоконтроля:

   а) $x-|x-2|=2$

   б) $|9-x^2|=9-x^2$

   в) $|x^2-8x+12|=x^2-8x+12$

   г) $|x^3/(x^2-1)|=x^3/(x^2-1)$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $x+|x-2|=2$
2. $|x^2+x-6|=x^2+x-6$
3. $|(1-2x-3x^2)/(3x-x^2-5)|=(1-2x-3x^2)/(x^2-3x+5)$

2 вариант:

1. $|4x-7|-4x=7$
2. $|2x^2-9x+6|=2x^2-9x+6$
3. $|(x^2+x-2)/(x+3)|=(x^2+x-2)/(x+3)$

3. $|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ или $f(x)=-g(x)$

Занятие №3

Возможен другой вариант:

$|f(x)|=|g(x)| \Leftrightarrow f^2(x)-g^2(x)=0 \Leftrightarrow (f(x)-g(x))\bullet(f(x)+g(x))=0$

Примеры:

1) $|2x-3|=|3x+1| \Leftrightarrow$ $2x-3=3x+1; x=-4$ или $2x-3=-3x-1; x=0{,}4$. Ответ: $-4; 0{,}4$.
2) $|2x-3|=|x+7| \Leftrightarrow (2x-3-x-7)\bullet(2x-3+x+7)$; $x=10$ или $x=-{}^4/_3$ Ответ: $10; -4/3$.
3) Задания для самоконтроля:

а) $|5x+6|=|3x-1|$

б) $|x^2+4x+3|=|x+1|$

в) $|(x-2)/(x-1)|=2|(x+1)/(x+2)|$

г) $|3x^2-6x-1|=2|3-x|$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $|x-7|=|x-9|$
2. $|x-x^2-1|=|2x-3+x^2|$
3. $|x+1|-2|x-2|=0$

2 вариант:

1. $|2x-1|=|x+3|$
2. $|x^2-x-2|=|2x^2-x-1|$
3. $|x-1|-2|x+2|=0$

$|f(x)|=g(x) \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ при $g(x)\geq 0$ или $f(x)=-g(x)$ при $g(x)\geq 0$

Примеры:

1) $|2x-3|=x-2 \Leftrightarrow 2x-3=x-2$ или $2x-3=-x+2$ при $x-2\geq 0$; $x\in\varnothing$ Ответ: $\varnothing$
2) $|3x-10|=x-2 \Leftrightarrow 3x-10=x-2$ или $3x-10=2-x$ при $x-2\geq 0$; $x=4$ или $x=3$ Ответ: 3;4.
3) Задания для самоконтроля:

   а) $|x-1|+(x-3)(x+2)=1$

   б) $|x^2+4x+2|=(5x+16)/3$

   в) $|y^2+3y|=1-y$

   г) $(1-2x)/(3-|x-1|)=1$

   Самостоятельная работа:

   1 вариант:

   1. $|2x-1|=5x-10$
   2. $|x^2+3x-4|=x^2-7x-2$
   3. $2|x-2|=3x-x^2$

   2 вариант:

   1. $|3x-7|=2x+1$
   2. $|2x^2-1|=x^2-2x+3$
   3. $|3x+3=-4x^2+4$

5.$f(|x|)=a \Leftrightarrow f(x)=a$ при $x\geq 0$ или $f(-x)=a$ при $x<0$

Занятие №4

Примеры:

1) $x^2-|x|-6=0 \Leftrightarrow x^2-x-6=0$ при $x\geq 0$; $x=3$ или $x^2+x-6=0$ при $x<0$; $x=-3$ Ответ: -3;3.

   Самостоятельная работа:

   1 вариант:

   1. $x^2+5|x|+x-1=0$
   2. $x^2+|x|-6=0$
   3. $2x^2+|x|-1=0$

   2 вариант:

   1. $x^2+3x+|x|-1=0$
   2. $x^2-7|x|-8=0$
   3. $2x^2-3|x|-2=0$

6. $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\ldots+|f(x)|=g(x)$

Схема решения уравнения:

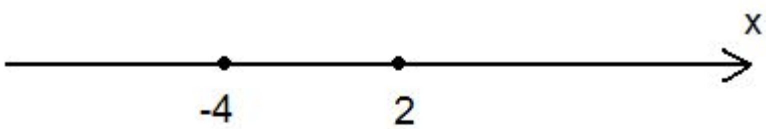
1. Найти нули всех подмодульных выражений;
2. Отметить нули на числовой прямой, разделив ее на промежутки;
3. На каждом промежутке уравнение заменяется на другое уравнение, не содержащее знаков модуля и равносильное исходному уравнению на этом промежутке;
4. На каждом промежутке отыскиваются корни того уравнения, которое на этом промежутке получается;
5. Отбираются те корни, которые принадлежат данному промежутку. Они и будут корнями исходного уравнения на рассматриваемом промежутке;
6. Все корни исходного уравнения получают, объединяя все корни, найденные на всех промежутках.

Примеры:

1) $2|x-2|-3|x+4|=1$

$x-2=0;\ x=2$

$x+4=0;\ x=-4$



$-2x+4+3x+12=1$ при $x<-4$; $x=-15$

$-2x+4-3x-12=1$ при $-4\le x<2$; $x=-1{,}8$

$2x-4-3x-12=1$ при $x\ge 2$; $\varnothing$

Ответ: -15;-1,8.

2) Задания для самоконтроля:

а) $|x+2|+|x-4|=8$

б) $3|x-1|-2|x-2|+|x+3|=2$

в) $|x|+3|x+2|=2|x+1|$

г) $||x+1|-|x-3||=|x|$

д) $|2-|1-|x|||=1$

Самостоятельная работа:

1 вариант:

1. $|x+3|+|x-3|=6$
2. $|x-1|-|x+1|=3$
3. $|5x-13|-|6-5x|=7$

2 вариант:

1. $|x+6|+|x+4|=5$
2. $|5+x|-|8-x|=13$
3. $|3x-8|-|3x-2|=6$