10 способов решения квадратных уравнений

Задачи:

- исследовать методы и показать способы решений квадратных уравнений
- создать программный код в Delphi7 которая решает квадратное уравнение.

История развития квадратных уравнений.

- Квадратные уравнения в Древнем Вавилоне:

$X^2+X=3/4$ $X^2-X=14,5$

- Квадратные уравнения в Европе XIII - XVII вв.

$$x^2 + bx = c,$$

при всевозможных комбинациях знаков коэффициентов *b*, *c* было сформулировано в Европе лишь в 1544 г. М. Штифелем.

Способы решения квадратных уравнений.

- **1. СПОСОБ**: *Разложение левой части уравнения на множители.*

Решим уравнение *x2 + 10x - 24 = 0.* Разложим левую часть на множители:

$x^2 + 10x - 24 = x^2 + 12x - 2x - 24 = x(x + 12) - 2(x + 12) = (x + 12)(x - 2).$

Следовательно, уравнение можно переписать так:

$$(x + 12)(x - 2) = 0$$

Так как произведение равно нулю, то, по крайней мере, один из его множителей равен нулю. Поэтому левая часть уравнения обращается нуль при $x = 2$, а также при $x = - 12$. Это означает, что число 2 и $- 12$ являются корнями уравнения $x^2 + 10x - 24 = 0$.

- **2. СПОСОБ**: *Метод выделения полного квадрата.*

Решим уравнение $x^2 + 6x - 7 = 0$. Выделим в левой части полный квадрат.

Для этого запишем выражение $x^2 + 6x$ в следующем виде:

$$x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3.$$

полученном выражении первое слагаемое - квадрат числа x, а второе - удвоенное произведение x на 3. По этому чтобы получить полный квадрат, нужно прибавить 32, так как

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 32 = (x + 3)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения

$$x^2 + 6x - 7 = 0,$$

прибавляя к ней и вычитая 32. Имеем:

$$x^2 + 6x - 7 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 32 - 32 - 7 = (x + 3)2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16.$$

Таким образом, данное уравнение можно записать так:

$$(x + 3)^2 - 16 = 0, \quad (x + 3)^2 = 16.$$

Следовательно, $x + 3 - 4 = 0$, $x_1 = 1$, *или* $x + 3 = -4$, $x_2 = -7$.

- **3. СПОСОБ**: *Решение квадратных уравнений по формуле.*

Умножим обе части уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0$$

на 4а и последовательно имеем:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0,$$

$$((2ax)^2 + 2ax \cdot b + b^2) - b^2 + 4ac = 0,$$

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac,$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac},$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

- **4. СПОСОБ:** *Решение уравнений с использованием теоремы Виета.*

Как известно, приведенное квадратное уравнение имеет вид

$$x^2 + px + c = 0. \qquad (1)$$

Его корни удовлетворяют теореме Виета, которая при $a = 1$ имеет вид

$$x_1 x_2 = q,$$
$$x_1 + x_2 = -p$$

а) $x^2 - 3x + 2 = 0$; $x_1 = 2$ и $x_2 = 1$, *так как* $q = 2 > 0$ и $p = -3 < 0$;

$x^2 + 8x + 7 = 0$; $x_1 = -7$ и $x_2 = -1$, *так как* $q = 7 > 0$ и $p = 8 > 0$.

б) $x^2 + 4x - 5 = 0$; $x_1 = -5$ и $x_2 = 1$, *так как* $q = -5 < 0$ и $p = 4 > 0$;

$x^2 - 8x - 9 = 0$; $x_1 = 9$ и $x_2 = -1$, *так как* $q = -9 < 0$ и $p = -8 < 0$.

- **5. СПОСОБ:** *Решение уравнений способом «переброски».*

Рассмотрим квадратное уравнение

$ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Умножая обе его части на а, получаем уравнение

$a^2x^2 + abx + ac = 0$.

Пусть $ax = y$, откуда $x = y/a$; тогда приходим к уравнению

$y^2 + by + ac = 0$,

равносильно данному. Его корни y_1 и y_2 найдем с помощью теоремы Виета.

Окончательно получаем $x_1 = y_1/a$ и $x_1 = y_2/a$.

- **6. СПОСОБ:** *Свойства коэффициентов квадратного уравнения.*

А. Пусть дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

1) Если, $a + b + c = 0$ (т.е. сумма коэффициентов равна нулю), то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

Доказательство. Разделим обе части уравнения на а ≠ 0, получим приведенное квадратное уравнение

$$x^2 + b/a \cdot x + c/a = 0.$$

Согласно теореме Виета

$$x_1 + x_2 = - b/a,$$

$$x_1x_2 = 1 \cdot c/a.$$

По условию $a – b + c = 0$, откуда $b = a + c$. Таким образом,

$$x_1 + x_2 = - a + b/a = -1 – c/a,$$

$$x_1x_2 = - 1 \cdot (- c/a),$$

т.е. $x_1 = -1$ и $x_2 = c/a$, что и требовалось доказать.

- **<u>Б.</u>** Если второй коэффициент $b = 2k$ – четное число, то формулу корней

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ожно записать в виде

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \qquad (2)$$

<u>В.</u> Приведенное уравнение

$$x^2 + px + q = 0$$

совпадает с уравнением общего вида, в котором $a = 1$, $b = p$ и $c = q$. Поэтому для приведенного квадратного уравнения формула корней

$$x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \text{ или } x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \qquad (3)$$

- **7. СПОСОБ:** *Графическое решение квадратного уравнения.*

Если в уравнении

$x^2 + px + q = 0$

перенести второй и третий члены в правую часть, то получим

$x^2 = - px - q.$

Построим графики зависимости $y = x^2$ и $y = - px - q$.

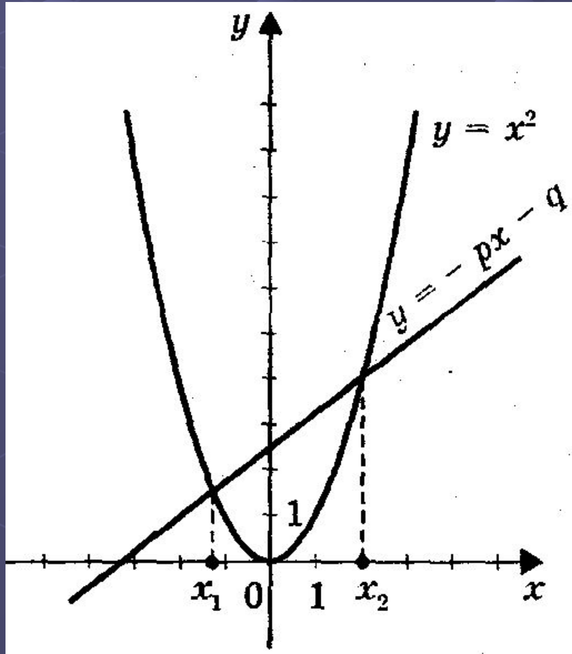


Рис. 1

• **8. СПОСОБ:** Решение квадратных уравнений с помощью циркуля и линейки.

нахождения корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с помощью циркуля и линейки (рис. 5).

Тогда по теореме о секущих имеем

$OB \cdot OD = OA \cdot OC$,

откуда $OC = OB \cdot OD / OA = x_1 x_2 / 1 = c/a$.

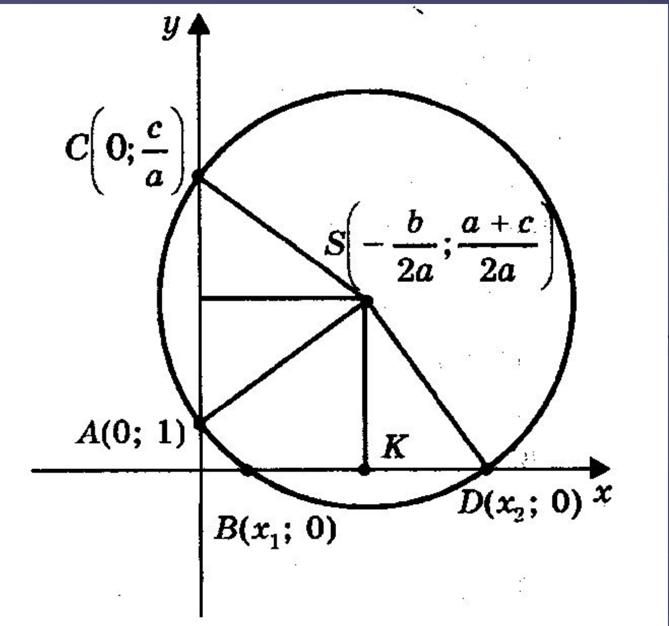


Рис. 5

$$SK = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a},$$

$$SF = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{1 + \frac{c}{a}}{2} = \frac{a + c}{2a}.$$

- 1) Радиус окружности больше ординаты центра

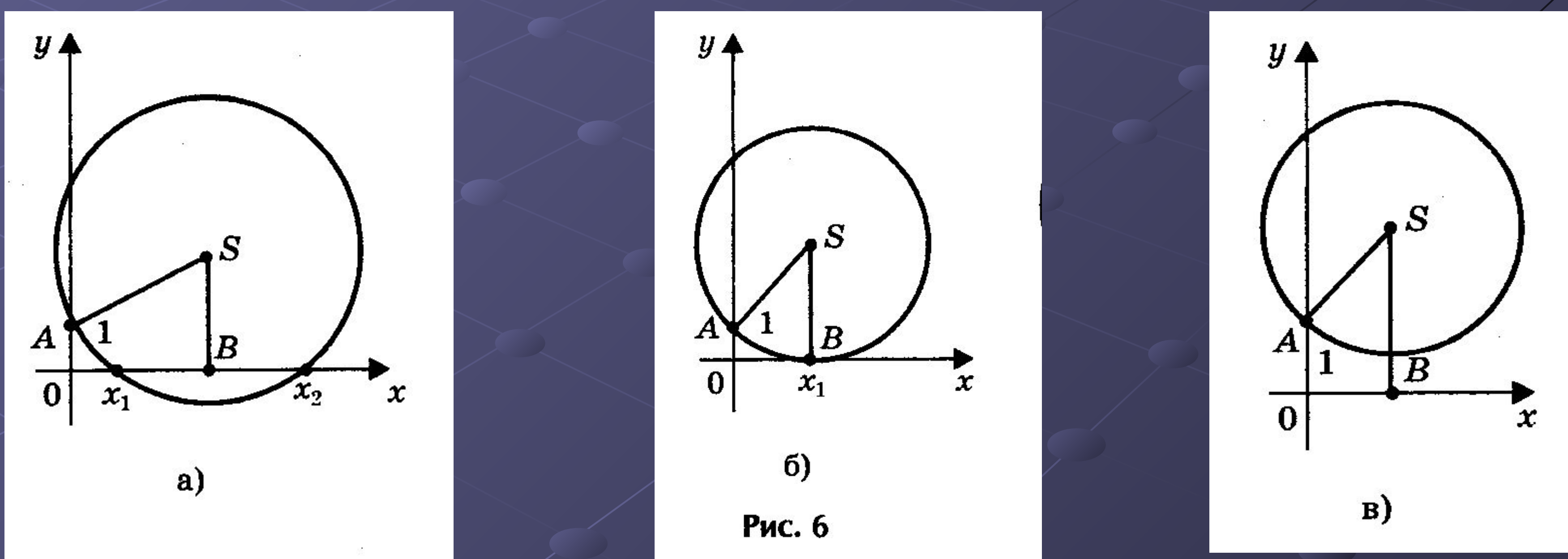
(AS > SK, или R > a + c/2a), окружность пересекает ось *Ox* в двух точках (6, а рис.) *B(x1; 0)* и *D(x2; 0)*, где x_1 и x_2 - корни квадратного уравнения *ax2 + bx + c = 0.*

2) Радиус окружности равен ординате центра

(AS = SB, или R = a + c/2a), окружность касается оси *Ox* (рис. 6,б) в точке *B (x1; 0)*, где x_1 - корень квадратного уравнения.

3) Радиус окружности меньше ординаты центра $\left(AS < SB, \text{ или } R < \dfrac{a+c}{2a}\right)$, окружность не имеет общих точек с осью абсцисс (рис.6,в), в этом случае

уравнение не имеет решения.



- **9. СПОСОБ:** *Решение квадратных уравнений с помощью номограммы.*

$z^2 + pz + q = 0.$

Криволинейная шкала номограммы построена по формулам (рис.11):

Полагая $OC = p$, $ED = q$, $OE = a$ (все в см.),

Из подобия треугольников CAH и CDF получим пропорцию

$$\frac{p-q}{p-AB} = \frac{a}{OB},$$

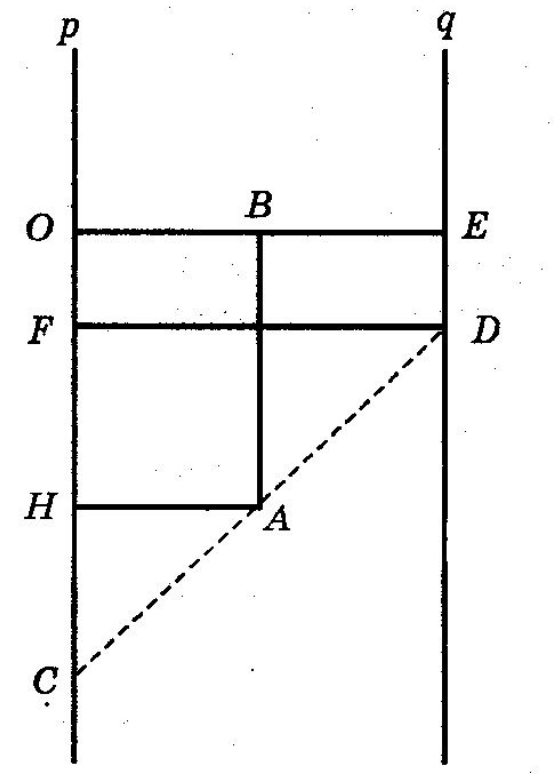


Рис. 11

- **10. СПОСОБ:** *Геометрический способ решения квадратных уравнений.*

- **Примеры.**

1) Решим уравнение $x^2 + 10x = 39$.

В оригинале эта задача формулируется следующим образом :

«Квадрат и десять корней равны 39» (рис.15).

Для искомой стороны х первоначального квадрата получим

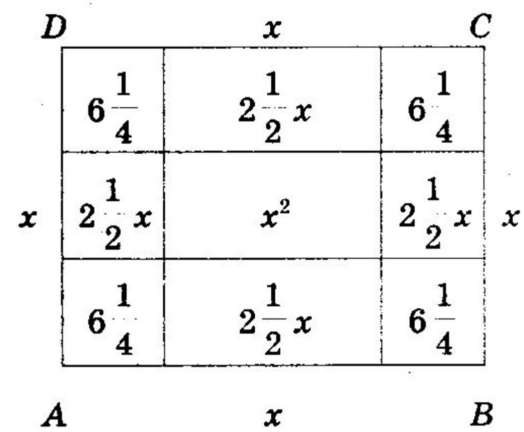


Рис. 15

$$x = 8 - 2\frac{1}{2} - 2\frac{1}{2} = 3.$$

11. СПОСОБ

Создадим приложение в delphi7 для решения квадратного уравнения.
Для этого нужно вставить следующие компоненты программы:


Label1
Label 2
Label3
Edit1
Edit2
Edit3
Label4
Form1
x^2+
x+
=0
Закрыть
Вычислить
Button1
Button2

Программный код для этой формы, точнее для кнопки Button1 будет следующим:

```
procedure TForm1.Button1Click(Sender: TObject);
var a,b,c,d,x1,x2:real;
begin
   a:=strtofloat(edit1.text); b:=strtofloat(edit2.text); c:=strtofloat(edit3.text);
                              d:=b*b-4*a*c;
   if a<>0 then
             if d>0 then
                 begin
                 x1:=(-b-sqrt(d))/(2*a);
                 x2:=(-b+sqrt(d))/(2*a);
                 if x1=x2 then Label4.Caption :=’дискриминант равен нулю’+
                 ' x1=x2='+floattostr(x1) else Label4.Caption :='x1='+
                 floattostr(x1)+' x2='+floattostr(x2);
                 end
                     else Label4.Caption:='нет решений'
          else  begin
           if (b=0) and (c=0) then Label4.Caption:='бесконечно много
решений';
           if (b=0) and (c<>0) then Label4.Caption:='нет решений';
           if (b<>0) then begin
                       x1:=(-c)/b;
                       Label4.Caption:=floattostr(x1);
                            end;
                 end;
end;
```

Заключение:

- Исследованы методы решения квадратных уравнений
- Создано программное приложение, которое решает эти уравнения. Эта программа может применятся в учебном процессе.