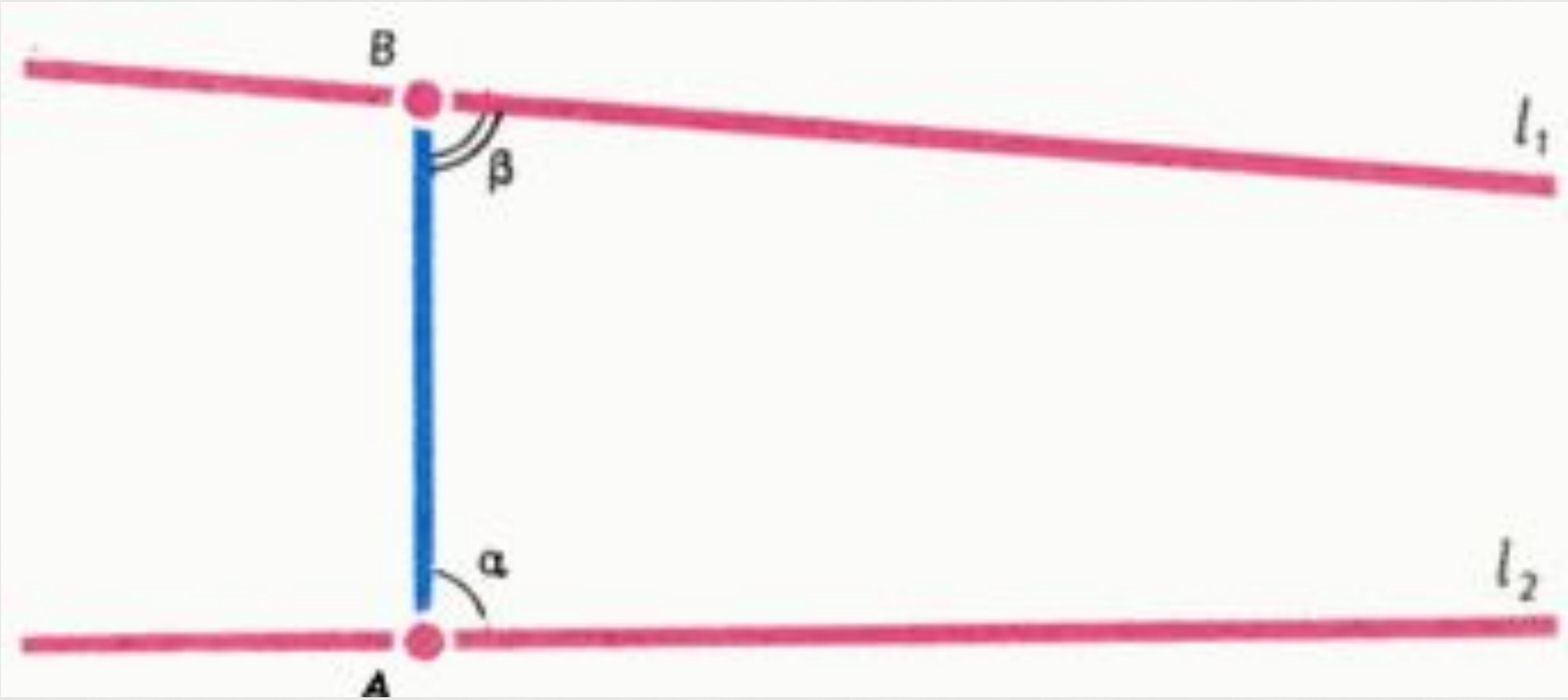
Геометрия Лобачевского.

- Лобачевского геометрия - геометрическая теория, основанная на тех же основных посылках, что и обычная евклидова геометрия, за исключением аксиомы о параллельных, которая заменяется на аксиому о параллельных Лобачевского.

- История создания геометрии Лобачевского одновременно является историей попыток доказать пятый постулат Евклида. Этот постулат представляет собой одну из аксиом, положенных Евклидом в основу изложения геометрии. Пятый постулат – последнее и самое сложное из предложений, включенных Евклидом в его аксиоматику геометрии. Напомним формулировку пятого постулата: **если две прямые пересекаются третьей так, что по какую-либо сторону от нее сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то по эту же сторону исходные прямые пересекаются.**

- Например, если на рис. 1 угол – прямой, а угол чуть меньше прямого, то прямые и непременно пересекаются, причем справа от прямой . Многие теоремы Евклида (например, «в равнобедренном треугольнике углы при основании равны») выражают гораздо более простые факты, чем пятый постулат. К тому же проверить на эксперименте пятый постулат довольно сложно. Достаточно сказать, что если на рис. 1 расстояние ***/AB/*** считать равным 1 м, а угол ***B*** отличается от прямого на одну угловую секунду, то можно подсчитать, что прямые ***L1*** и ***L2*** пересекаются на расстоянии свыше 200 км от прямой ***M***

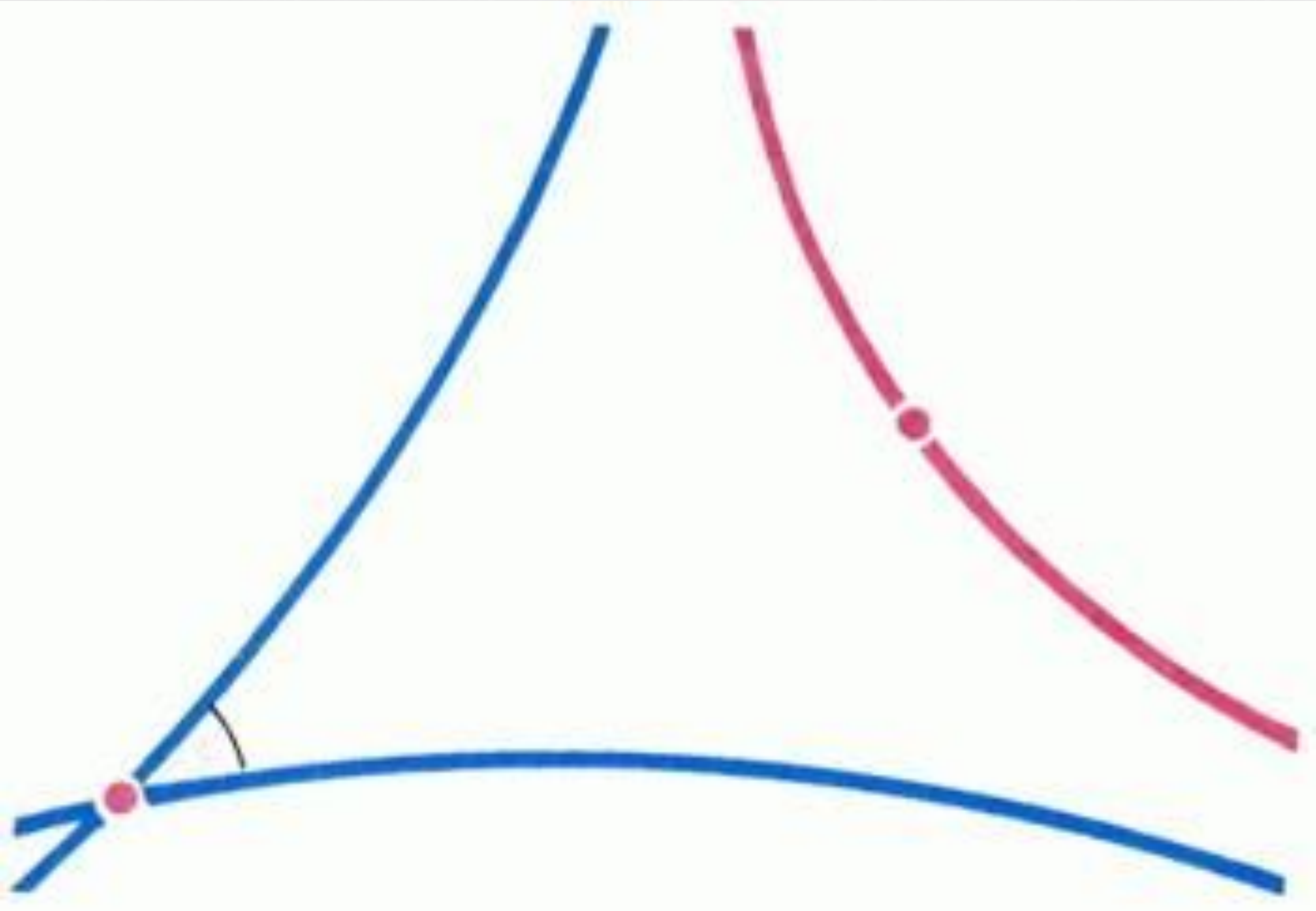


B
l_1
β
α
l_2
A

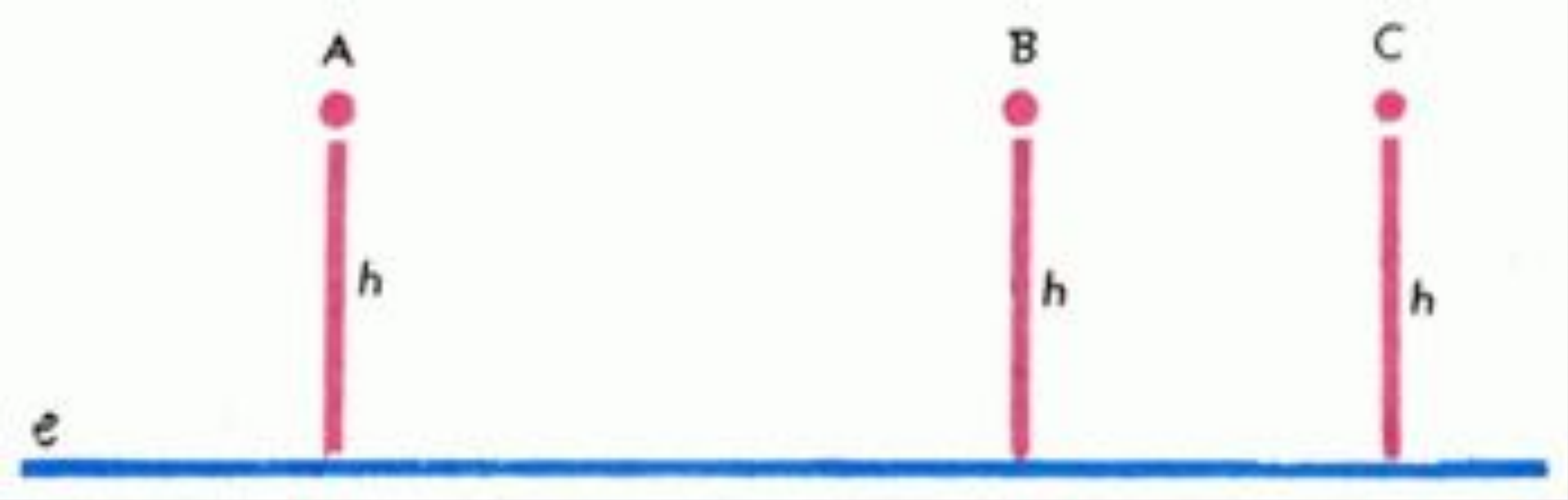
- Многие математики, жившие после Евклида, пытались доказать, что эта аксиома (пятый постулат) – лишняя, т.е. она может быть доказана как теорема на основании остальных аксиом. Так, в V в. математик Прокл (первый комментатор трудов Евклида) предпринял такую попытку. Однако в своем доказательстве Прокл незаметно для себя использовал следующее утверждение: два перпендикуляра к одной прямой на всем своем протяжении находятся на ограниченном расстоянии друг от друга (т.е. две прямые, перпендикулярные третьей, не могут неограниченно удаляться друг от друга, как линии на рис. 2). Но при всей кажущейся наглядной «очевидности» это утверждение при строгом аксиоматическом изложении геометрии требует обоснования. В действительности использованное Проклом утверждение является эквивалентом пятого постулата; иначе говоря, если его добавить к остальным аксиомам Евклида в качестве еще одной новой аксиомы, то пятый постулат можно доказать (что и сделал Прокл), а если принять пятый постулат, то можно доказать

- Критический анализ дальнейших попыток доказать пятый постулат выявил большое число аналогичных «очевидных» утверждений, которыми можно заменить пятый постулат в аксиоматике Евклида. Вот несколько примеров таких эквивалентов пятого постулата.

-) Через точку внутри угла, меньшего, чем развернутый, всегда можно провести прямую, пересекающую его стороны, т.е. прямые линии на плоскости не могут располагаться так, как показано на рис. 3



- 2) Существуют два подобных треугольника, не равных между собой.
- 3) Три точки, расположенные по одну сторону прямой *L* на равном расстоянии от нее (рис. 4), лежат на одной прямой.
- 4) Для всякого треугольника существует описанная окружность.


A
B
C
h
h
h
e

- Постепенно «доказательства» становятся все изощреннее, в них все глубже прячутся малозаметные эквиваленты пятого постулата. Допустив, что пятый постулат неверен, математики пытались прийти к логическому противоречию. Они приходили к утверждениям, чудовищно противоречащим нашей геометрической интуиции, но логического противоречия не получалось. А может быть, мы вообще никогда не придем на таком пути к противоречию? Не может ли быть так, что, заменив пятый постулат Евклида его отрицанием (при сохранении остальных аксиом Евклида), мы придем к новой, неевклидовой геометрии, которая во многом не согласуется с нашими привычными наглядными представлениями, но тем не менее не содержит никаких логических противоречий? Эту простую, но очень дерзкую мысль математики не могли выстрадать в течение двух тысячелетий после появления «Начал» Евклида.

- Первым, кто допустил возможность существования неевклидовой геометрии, в которой пятый постулат заменяется его отрицанием, был К. Ф. Гаусс. То, что Гаусс владел идеями неевклидовой геометрии, было обнаружено лишь после смерти ученого, когда стали изучать его архивы. Гениальный Гаусс, к мнениям которою все прислушивались, не рискнул опубликовать свои результаты по неевклидовой геометрии, опасаясь быть непонятым и втянутым в полемику.

- XIX в. принес решение загадки пятого постулата. К этому открытию независимо от Гаусса пришел и наш соотечественник – профессор Казанского университета Н. И. Лобачевский. Как и его предшественники, Лобачевский вначале пытался выводить различные следствия из отрицания пятого постулата, надеясь, что рано или поздно он придет к противоречию. Однако он доказал много десятков теорем, не обнаруживая логических противоречий. И тогда Лобачевскому пришла в голову догадка о непротиворечивости геометрии, в которой пятый постулат заменен его отрицанием. Лобачевский назвал эту геометрию воображаемой. Свои исследования Лобачевский изложил в ряде сочинений, начиная с 1829 г. Но математический мир не принял идеи Лобачевского. Ученые не были подготовлены к мысли о том, что может существовать геометрия, отличная от евклидовой. И лишь Гаусс выразил свое отношение к научному подвигу русского ученого: он добился избрания в 1842 г. Н. И. Лобачевского членом-корреспондентом Геттингенского королевского научного общества. Это единственная научная почесть, выпавшая на долю Лобачевского при жизни. Он умер, так и не добившись признания своих идей.

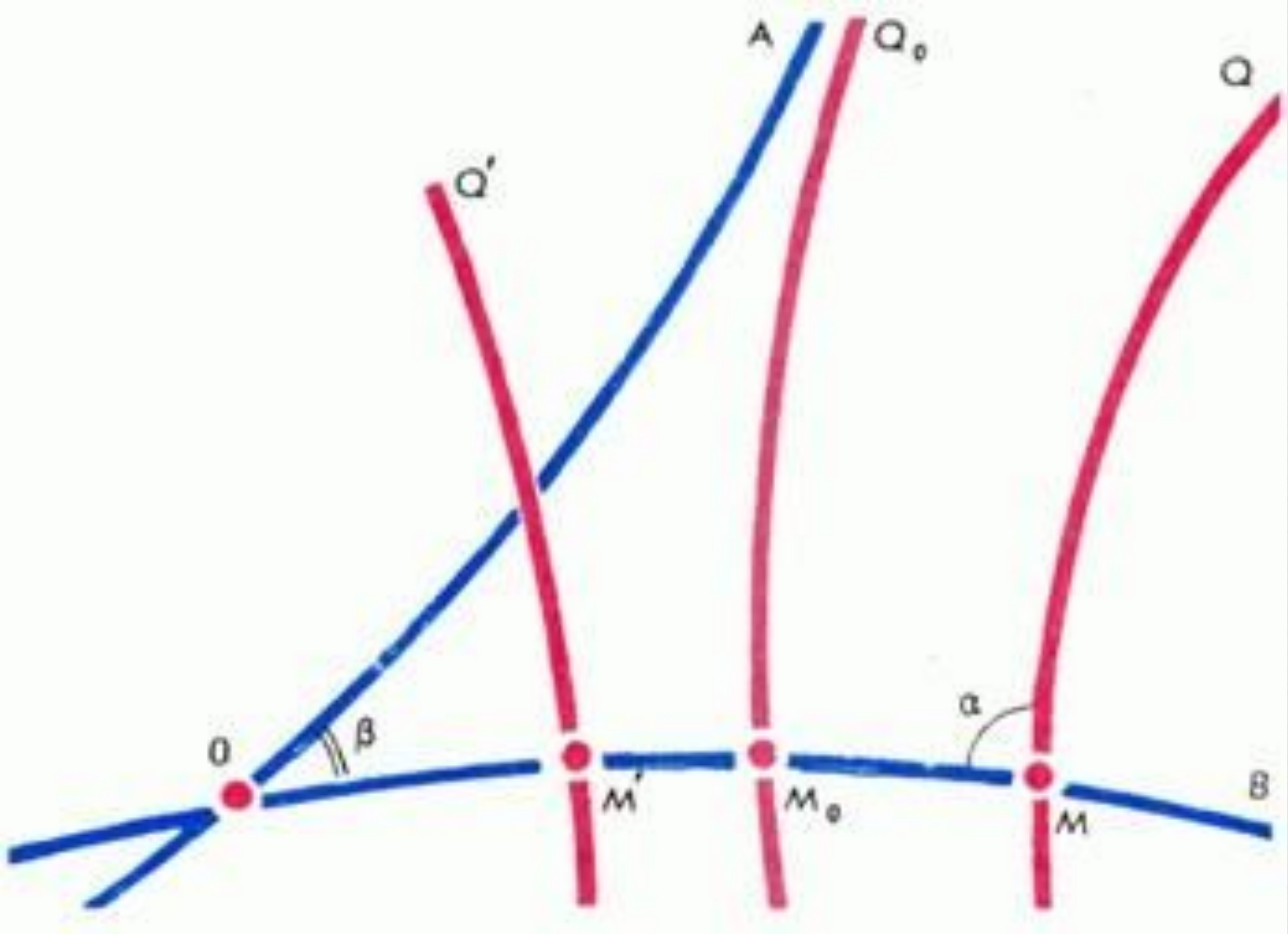
- Рассказывая о геометрии Лобачевского, нельзя не отметить еще одного ученою, который вместе с Гауссом и Лобачевским делит заслугу открытия неевклидовой геометрии. Им был венгерский математик Я. Бойяи (1802-1860). Его отец, известный математик Ф. Бойяи, всю жизнь работавший над теорией параллельных, считал, что решение этой проблемы выше сил человеческих, и хотел оградить сына от неудач и разочарований. В одном из писем он писал ему: «Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи и всякий светоч, всякую радость жизни в ней похоронил… она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни…» Но Янош не внял предостережениям отца. Вскоре молодой ученый независимо от Гаусса и Лобачевского пришел к тем же идеям. В приложении к книге своего отца, вышедшей в 1832 г., Я. Бойяи дал самостоятельное изложение неевклидовой геометрии.

- В геометрии Лобачевского сохраняются все теоремы, которые в евклидовой геометрии можно доказать без использования пятого постулата.Например: вертикальные углы равны; углы при основании равнобедренного треугольника равны; из данной точки можно опустить на данную прямую только один перпендикуляр; сохраняются также признаки равенства треугольников и др. Однако теоремы, при доказательстве которых применяется аксиома параллельности, видоизменяются. Теорема о сумме углов треугольника – первая теорема школьного курса, при доказательстве которой используется аксиома параллельности. Здесь нас ожидает первый «сюрприз»: в геометрии Лобачевского сумма углов любого

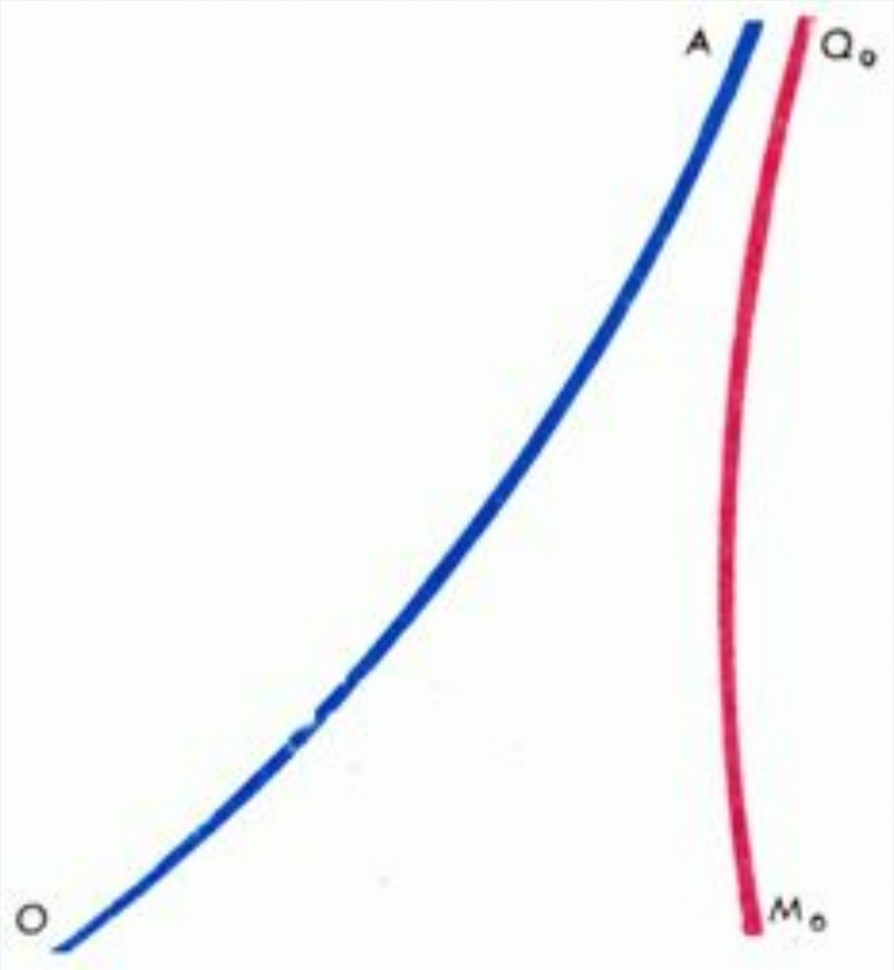
- Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого треугольника, то в евклидовой геометрии равны и третьи углы (такие треугольники подобны). В геометрии Лобачевского не существует подобных треугольников. Более того, в геометрии Лобачевского имеет место четвертый признак равенства треугольников: если углы одного треугольника соответственно равны углам другого треугольника, то эти треугольники равны.

- Разность между 180° и суммой углов треугольника *ABC* в геометрии Лобачевского положительна; она называется дефектом этого треугольника. Оказывается, что в этой геометрии площадь треугольника замечательным образом связана с его дефектом: , где *S* и *D* означают площадь и дефект треугольника, а число *k* зависит от выбора единиц измерения площадей и углов.

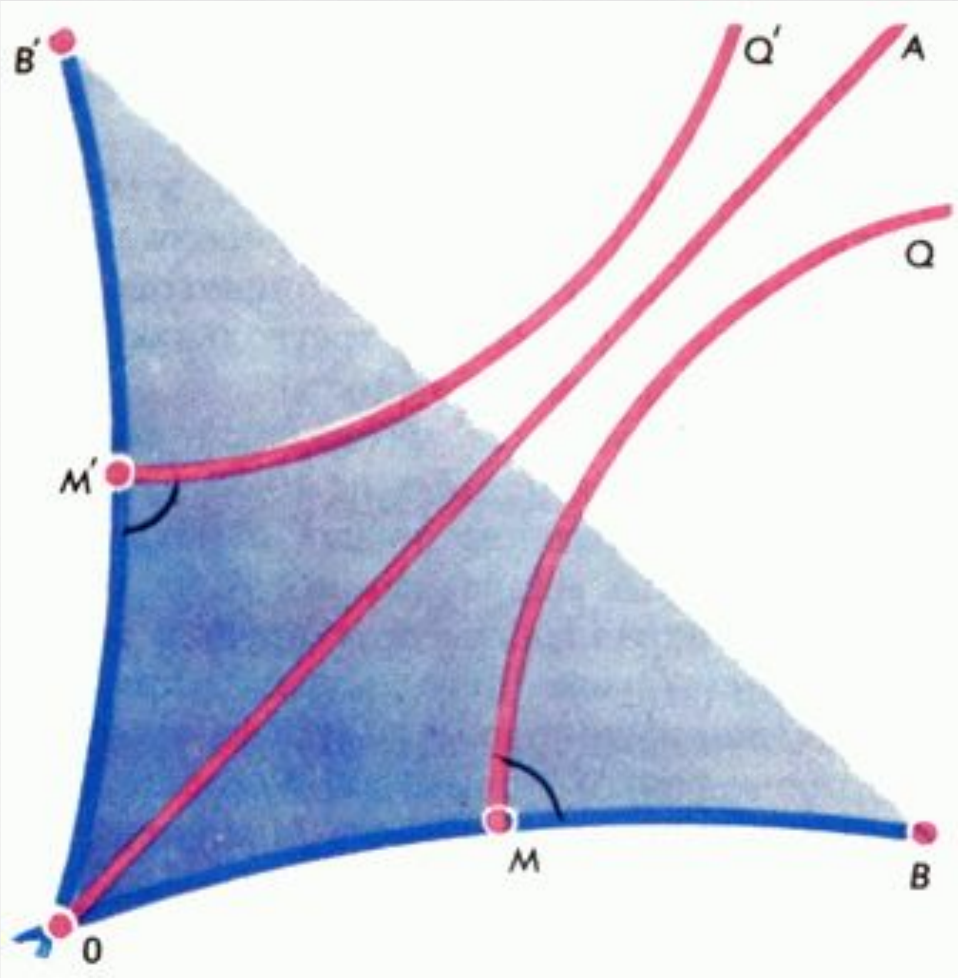
- Пусть теперь *AOB* – некоторый острый угол (рис. 5). В геометрии Лобачевского можно выбрать такую точку М на стороне ***OB***, что перпендикуляр **MQ** к стороне **OB** не пересекается с другой стороной угла. Этот факт как раз подтверждает, что не выполняется пятый постулат: сумма углов ***a*** и ***b*** меньше развернутого угла, но прямые ***AO*** и ***MQ*** не пересекаются. Если начать приближать точку ***M*** к ***Q*** , то найдется такая «критическая» точка Mo , что перпендикуляр ***MoQo*** к стороне все еще не пересекается со стороной ***AO*** , но для любой точки , лежащей между ***O*** и ***Mo*** , соответствующий перпендикуляр пересекается со стороной ***OA***.


A
Q₀
Q
Q'
β
O
M'
M₀
α
M
B

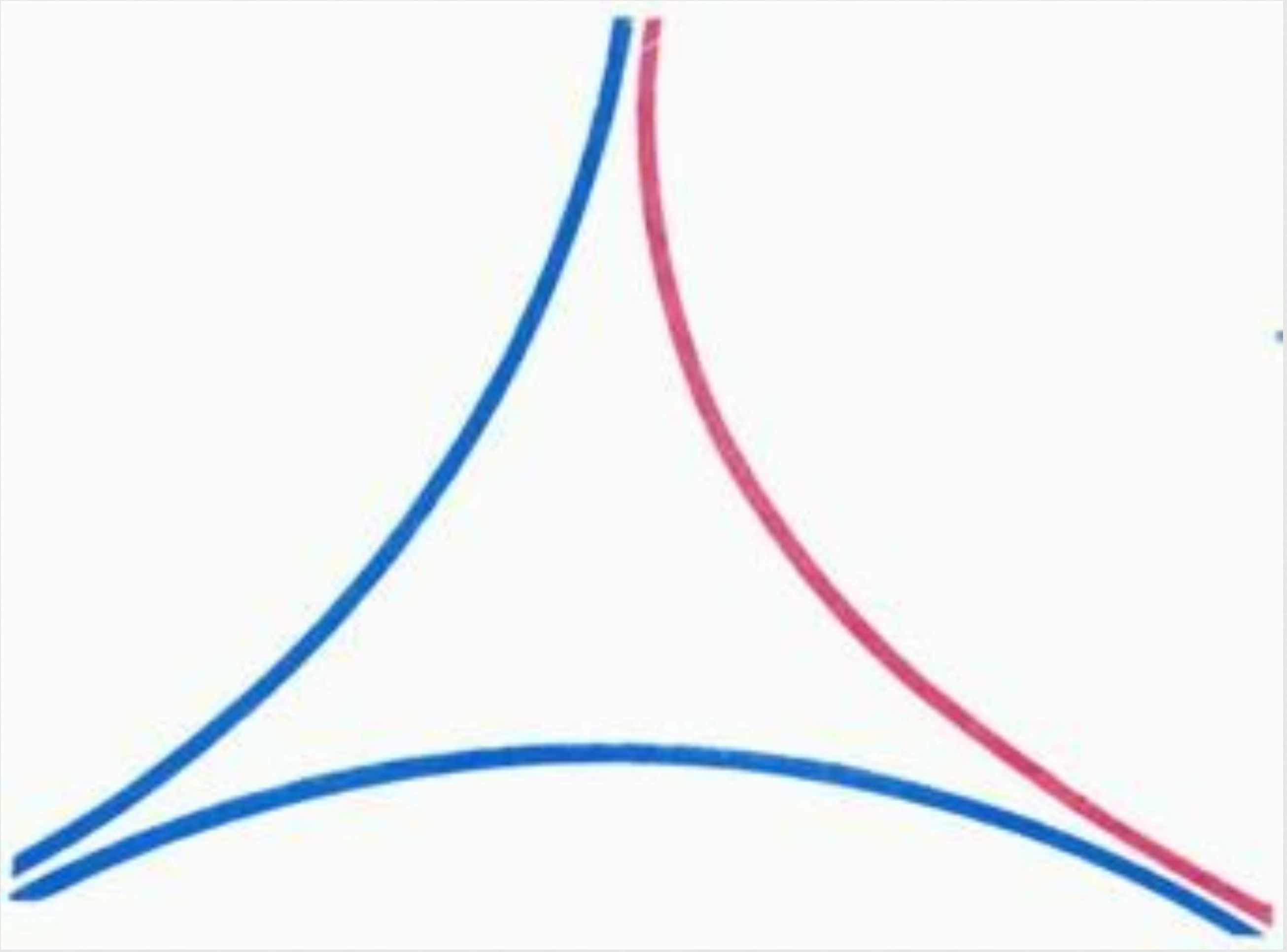
- Прямые и все более приближаются друг к другу, но общих точек не имеют. На рис. 6 эти прямые изображены отдельно; именно такие неограниченно приближающиеся друг к другу прямые Лобачевский называет в своей геометрии параллельными. А два перпендикуляра к одной прямой (которые неограниченно удаляются друг от друга, как на рис. 2) Лобачевский называет расходящимися прямыми. Оказывается, что этим и ограничиваются все возможности расположения двух прямых на плоскости Лобачевского: две несовпадающие прямые либо пересекаются в одной точке, либо параллельны (рис. 6), либо являются расходящимися (в этом случае они имеют единственный

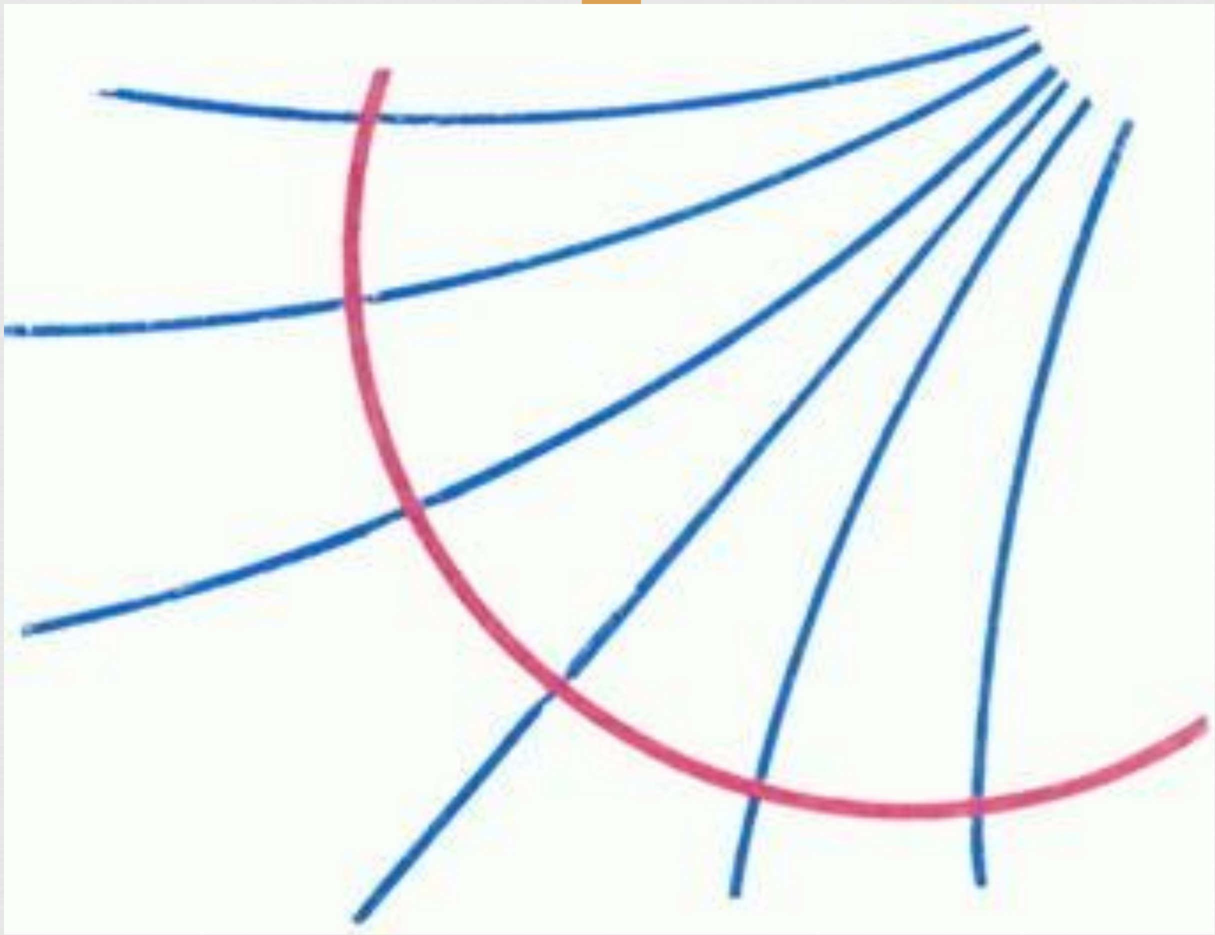

A
Q₀
O
M₀

- На рис. 7 перпендикуляр MQ к стороне OB угла AOB не пересекается со стороной AO, а прямые OB*,M*Q* симметричны прямым OB,MQ относительно . Далее,/OM/=/MB/ , так что (MQ) – перпендикуляр к отрезку OB в его середине и аналогично(M*Q*) – перпендикуляр к отрезку OB* в его середине. Эти перпендикуляры не пересекаются, и потому не существует точки, одинаково удаленной от точек O,B,B* т.е. треугольник не имеет описанной окружности.


B′
Q′
A
Q
M′
M
B
0

- На рис. 8 изображен интересный вариант расположения трех прямых на плоскости Лобачевского: каждые две из них параллельны (только в разных направлениях). А на рис. 9 все прямые параллельны друг другу в одном направлении (пучок параллельных прямых). Красная линия на рис. 9 «перпендикулярна» всем проведенным прямым. Эта линия называется предельной окружностью, или орициклом. Прямые рассмотренного пучка являются как бы ее «радиусами», а «центр» предельной окружности лежит в бесконечности, поскольку «радиусы» параллельны. В то же время предельная окружность не является прямой линией, она «искривлена». И другие свойства, которыми в евклидовой геометрии обладает прямая, в геометрии Лобачевского оказываются присущими другим линиям. Например, множество точек, находящихся по одну сторону от данной прямой на данном расстоянии от нее, в геометрии Лобачевского представляет собой кривую линию (она называется эквидистантой).





НИКОЛАЙ ИВАНОВИЧ ЛОБАЧЕВСКИЙ (1792-1856)

- С 14 лет жизнь Н.И.Лобачевского была связана с Казанским университетом. Его студенческие годы приходились на благополучный период в истории университета. Было у кого учиться математике; среди профессоров выделялся М.Ф. Бартельс, сотоварищ первых шагов в математике К. Ф. Гаусса.

- С 1814 г. Лобачевский преподает в университете: читает лекции по математике, физике, астрономии, заведует обсерваторией, возглавляет библиотеку. В течение нескольких лет он избирался деканом физико-математического факультета.

- С 1827 г. начинается 19-летний период его непрерывного ректорства. Все надо было начинать заново: заниматься строительством, привлекать новых профессоров, менять студенческий режим. На это уходило почти все время.

- Еще в первых числах февраля 1826 г. он передал в университет рукопись «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных», 11 февраля он выступил с докладом на заседании Совета университета. Собственно, речь шла не о доказательстве пятого постулата Евклида, а о построении геометрии, в которой имеет место его отрицание, т.е. о доказательстве его невыводимости из остальных аксиом. Вероятно, никто из присутствовавших не мог уследить за ходом мысли Лобачевского. Созданная комиссия из членов Совета несколько лет не давала заключения.
- В 1830 г. в «Казанском вестнике» выходит работа «О началах геометрии», представляющая собой извлечение из доклада на Совете. Чтобы разобраться в ситуации, решили воспользоваться помощью столицы: в 1832 г. статью послали в Петербург. И здесь никто ничего не понял, работа была квалифицирована как бессмысленная. Не следует слишком сурово судить русских ученых: нигде в мире

- Ничто не могло поколебать уверенность Лобачевского в своей правоте. В течение 30 лет он продолжает развивать свою геометрию, пытается делать изложение более доступным, публикует работы по-французски и по-немецки.

- Немецкую версию изложения прочитал Гаусс и, разумеется, понял автора с полуслова. Он прочитал его работы на русском языке и оценил их в письмах к ученикам, но публичной поддержки новой геометрии Гаусс не оказал.

- Н. И. Лобачевский дослужился до высоких чинов, он был награжден большим числом орденов, пользовался уважением окружающих, но о его геометрии предпочитали не говорить, даже в те дни, когда Казань прощалась с ним. Прошло еще не менее двадцати лет, прежде чем геометрия Лобачевского завоевала права гражданства в математике.

Приведём несколько фактов геометрии Лобачевского, отличающих её от геометрии Евклида и установленных самим Лобачевским

- 1) В Лобачевского геометрия не существует подобных, но неравных треугольников; треугольники равны, если их углы равны. Поэтому существует абсолютная единица длины, т. е. отрезок, выделенный по своим свойствам, подобно тому как прямой угол выделен своими свойствами. Таким отрезком может служить, например, сторона правильного треугольника с данной суммой углов.

- 2) Сумма углов всякого треугольника меньше p и может быть сколь угодно близкой к нулю. Это непосредственно видно на модели Пуанкаре. Разность p — (a + b + g), где a, b, g — углы треугольника, пропорциональна его площади.

- 3) Через точку O, не лежащую на данной прямой a, проходит бесконечно много прямых, не пересекающих a и находящихся с ней в одной плоскости; среди них есть две крайние b, b`, которые и называются параллельными прямой a в смысле Лобачевского. В моделях Клейна (Пуанкаре) они изображаются хордами (дугами окружностей), имеющими с хордой (дугой) a общий конец (который по определению модели исключается, так что эти прямые не имеют общих точек) (рис. 1,3). Угол ее между прямой b (или b`) и перпендикуляром из O на a — т. н. угол параллельности — по мере удаления точки O от прямой убывает от 90° до 0° (в модели Пуанкаре углы в обычном смысле совпадают с углами в смысле Лобачевского, и потому на ней этот факт можно видеть непосредственно). Параллель b с одной стороны (a b` с противоположной) асимптотически приближается к a, a с другой — бесконечно от неё удаляется (в моделях расстояния определяются сложно, и потому этот факт непосредственно не

- 4) Если прямые имеют общий перпендикуляр, то они бесконечно расходятся в обе стороны от него. К любой из них можно восстановить перпендикуляры, которые не достигают другой прямой.

- 5) Линия равных расстояний от прямой не есть прямая, а особая кривая, называемая эквидистантой, или гиперциклом.

- 6) Предел окружностей бесконечно увеличивающегося радиуса не есть прямая, а особая кривая, называемая предельной окружностью, или орициклом.

- 7) Предел сфер бесконечно увеличивающегося радиуса не есть плоскость, а особая поверхность — предельная сфера, или орисфера; замечательно, что на ней имеет место евклидова геометрия. Это служило Лобачевскому основой для вывода формул тригонометрии.
- 8) Длина окружности не пропорциональна радиусу, а растет быстрее.
- 9) Чем меньше область в пространстве или на плоскости Лобачевского, тем меньше геометрические соотношения в этой области отличаются от соотношений евклидовой геометрии. Можно сказать, что в бесконечно малой области имеет место евклидова геометрия. Например, чем меньше треугольник, тем меньше сумма его углов отличается от p; чем меньше окружность, тем меньше отношение её длины к радиусу отличается от 2p, и т. п. Уменьшение области формально равносильно увеличению единицы длины, поэтому при безграничном увеличении единицы длины формулы Лобачевского геометрия переходят в формулы евклидовой геометрии. Евклидова геометрия есть в этом смысле «предельный»

- Лобачевского геометрия продолжает разрабатываться многими геометрами; в ней изучаются: решение задач на построение, многогранники, правильные системы фигур, общая теория кривых и поверхностей и т. п. Ряд геометров развивали также механику в пространстве Лобачевского. Эти исследования не нашли непосредственных применений в механике, но дали начало плодотворным геометрическим идеям. В целом Лобачевского геометрия является обширной областью исследования, подобно геометрии Евклида.

Спасибо за внимание!!!