Системы счисления

I. Системы счисления.

II. Перевод чисел из одной системы счисления в другую

1.Перевод из десятичной системы

а) целое число

б) правильная десятичная дробь

в) вещественное число.

2. Перевод в десятичную систему

3. Перевод из двоичной в восьмеричную и шестнадцатеричную системы.

4. Перевод из восьмеричной и шестнадцатеричной системы в двоичную

5. Перевод из восьмеричной в шестнадцатеричную систему и обратно.

III. Арифметические операции в позиционных системах счисления

1. сложение

2. вычитание

3. умножение

4. деление

IV. Представление чисел в компьютере

1. целые числа

2. вещественные числа

Системы счисления

Система счисления – совокупность правил наименования и изображения чисел с помощью набора символов, называемых цифрами.

Системы счисления

Позиционные

Количественное значение каждой цифры числа зависит от того, в каком месте (позиции или разряде) записана та или иная цифра.

0,7 7 70

Непозиционные

Количественное значение цифры числа не зависит от того, в каком месте (позиции или разряде) записана та или иная цифра.

XIX

Позиционные системы счисления

«Мысль – выражать все числа немногими знаками, придавая им значение по форме, ещё значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно оценить, насколько она удивительна»

Пьер Симон Лапласс

Первая позиционная система счисления была придумана еще в Древнем Вавилоне, причем вавилонская нумерация была **шестидесятеричная**, т.е. в ней использовалось шестьдесят цифр!

В XIX веке довольно широкое распространение получила **двенадцатеричная** система счисления.

В настоящее время наиболее распространены **десятичная**, **двоичная**, **восьмеричная** и **шестнадцатеричная** системы счисления.

Основание системы счисления

Количество различных символов, используемых для изображения числа в позиционных системах счисления, называется **основанием системы счисления.**

Позиции цифр называются разрядами.

Основание системы счисления показывает во сколько раз изменяется количественное значение цифры при перемещении её на соседнюю позицию

За основание системы можно принять любое натуральное число не менее 2.

Основание системы счисления

Компьютеры используют двоичную систему так как

- для её реализации нужны технические устройства с двумя устойчивыми состояниями,
- представление информации с помощью только двух состояний надежно и помехоустойчиво,
- возможно применение аппарата булевой алгебры для выполнения логических преобразований,
- двоичная арифметика намного проще десятичной

Двоичная система, удобная для компьютера, для человека неудобна из-за её громоздкости и непривычной записи. Для того, чтобы понимать слово компьютера, разработаны восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. Числа в этих системах требуют в 3/4 раза меньше разрядов, чем в двоичной системе.

Основание системы счисления

Запись чисел в каждой из систем счисления с основанием *q* означает сокращенную запись выражения

$$a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_1q^1 + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + \ldots + a_{-m}q^{-m} ,$$

где a_i – цифры системы счисления, *n* и *m* –число целых и дробных разрядов соответственно

Система счисления	Основание	Алфавит цифр
Десятичная	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Двоичная	2	0, 1
Восьмеричная	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Шестнадцатеричная	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Соответствие систем счисления

Десятичная	0	1	2	3	4	5	6	7
Двоичная	0	1	10	11	100	101	110	111
Восьмеричная	0	1	2	3	4	5	6	7
Шестнадцатеричная	0	1	2	3	4	5	6	7

Десятичная	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Двоичная	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111	10000
Восьмеричная	10	11	12	13	14	15	16	17	20
Шестнадцатерич ная	8	9	A	B	C	D	E	F	10

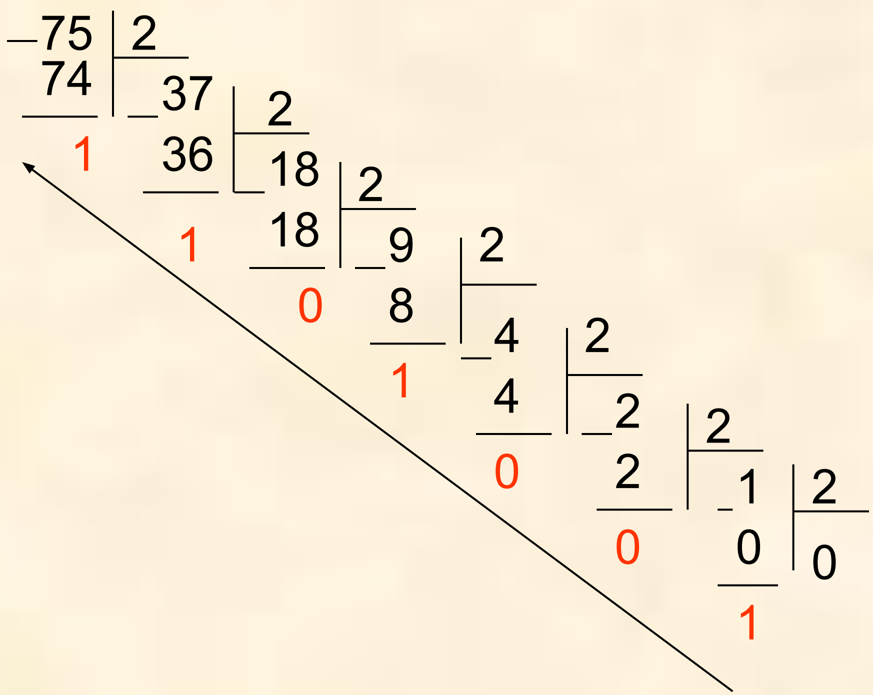
Перевод целых чисел из десятичной системы счисления

Алгоритм перевода:

1. Последовательно делить с остатком данное число и получаемые целые частные на основание новой системы счисления до тех пор, пока частное не станет равно нулю.
2. Полученные остатки выразить цифрами алфавита новой системы счисления
3. Записать число в новой системе счисления из полученных остатков, начиная с последнего.

Перевод целых чисел из десятичной системы счисления

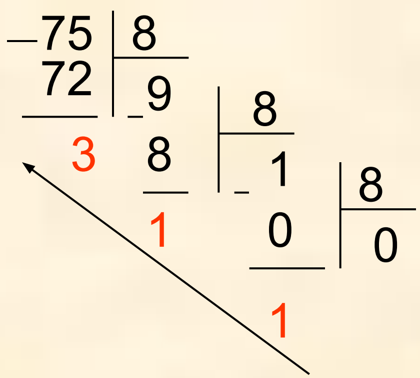
Пример. Перевести число 75 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную.

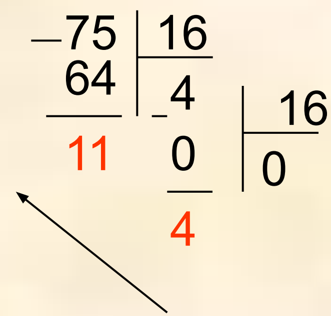


$75_{10} = 1001011_2$

Перевод целых чисел из десятичной системы счисления

Пример 1. Перевести число 75 из десятичной системы счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную.





$75_{10} = 113_8$

$75_{10} = 4B_{16}$

В меню

Перевод правильной десятичной дроби из десятичной системы счисления

Алгоритм перевода:

1. Последовательно умножать десятичную дробь и получаемые дробные части произведений на основание новой системы счисления до тех пор, пока дробная часть не станет равна нулю или не будет достигнута необходимая точность перевода.

2. Полученные целые части произведений выразить цифрами алфавита новой системы счисления.

3. Записать дробную часть числа в новой системе счисления начиная с целой части первого произведения.

Перевод правильной десятичной дроби из десятичной системы счисления

Пример. Перевести число 0,35 из десятичной системы в счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную.

$$\begin{array}{r} 0{,}35 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0{,}70 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1{,}40 \\ \times\quad 2 \\ \hline 0{,}80 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1{,}60 \\ \times\quad 2 \\ \hline 1{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}35 \\ \times\quad 8 \\ \hline 2{,}80 \\ \times\quad 8 \\ \hline 6{,}40 \\ \times\quad 8 \\ \hline 3{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0{,}35 \\ \times\quad 16 \\ \hline 5{,}60 \\ \times\quad 16 \\ \hline 9{,}60 \end{array}$$

$0{,}35_{10} = 0{,}01011_2$

$0{,}35_{10} = 0{,}263_8$

$0{,}35_{10} = 0{,}59_{16}$

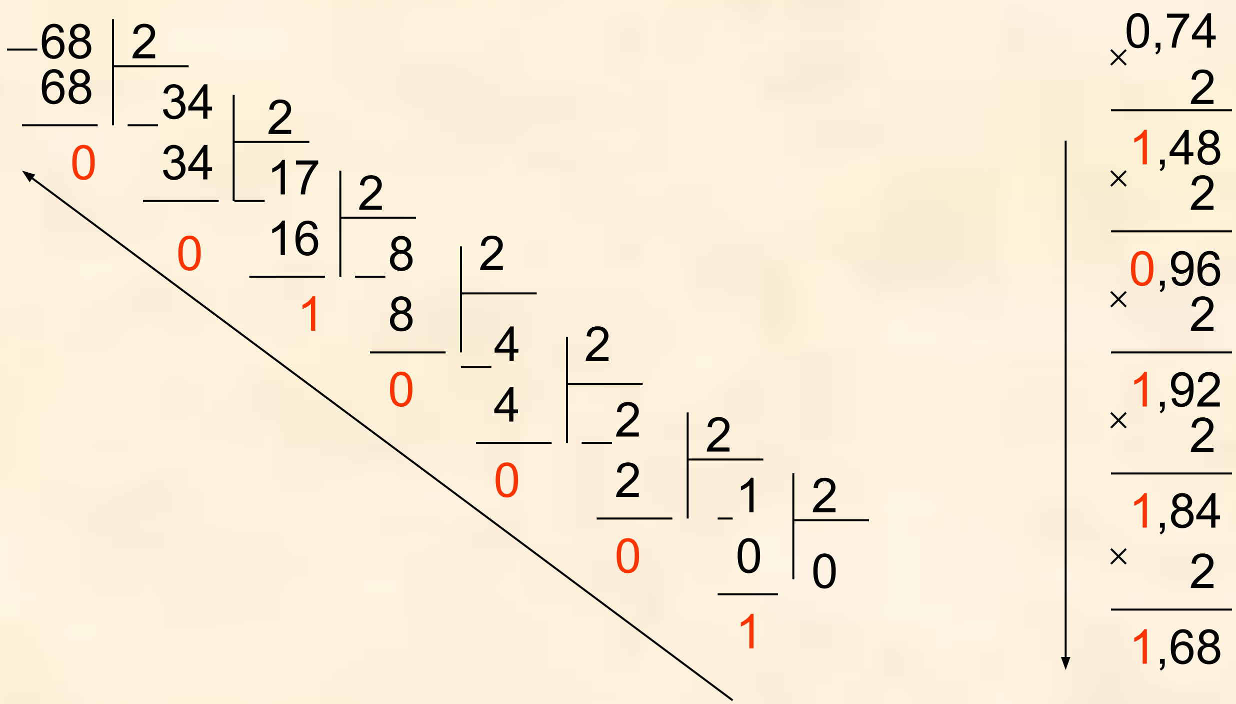
В меню

Перевод вещественных чисел из десятичной системы счисления

При переводе смешанных дробей отдельно по своим правилам переводятся целая и дробные части, результаты перевода разделяются запятой.

Перевод вещественных чисел из десятичной системы счисления

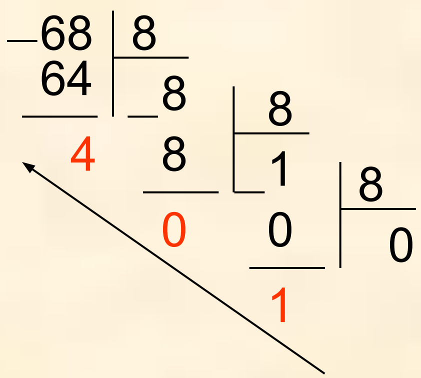
Пример. Перевести число 68,74 из десятичной системы в счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную

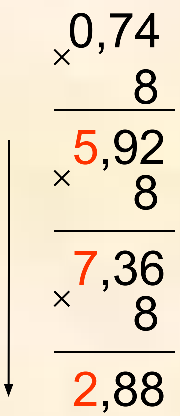


$68{,}74_{10} = 1000100{,}10111_2$

Перевод вещественных чисел из десятичной системы счисления

Пример. Перевести число 68,74 из десятичной системы в счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную

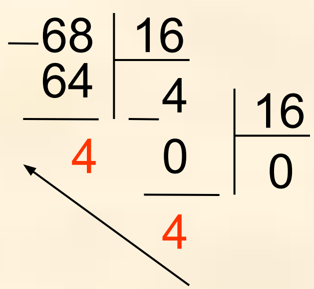


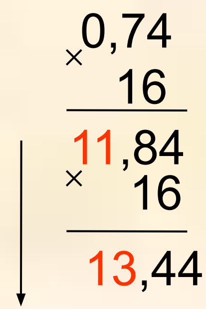


$68{,}74_{10} = 104{,}572_{8}$

Перевод вещественных чисел из десятичной системы счисления

Пример. Перевести число 68,74 из десятичной системы в счисления в двоичную, восьмеричную и шестнадцатеричную





В меню

$68{,}74_{10} = BD_8$

Перевод чисел в десятичную систему счисления

При переводе числа из системы счисления с основанием q в десятичную надо представить это число в виде суммы произведений степеней основания его системы счисления q на соответствующие цифры числа.

$$a_{n-1}q^{n-1} + a_{n-2}q^{n-2} + \ldots + a_1q^1 + a_0q^0 + a_{-1}q^{-1} + \ldots + a_{-m}q^{-m}$$

и выполнить арифметические вычисления.

Перевод чисел в десятичную систему счисления

Пример. Перевести число 1011,1 из двоичной системы счисления в десятичную.

разряды 3 2 1 0 -1

число $1\ 0\ 1\ 1,1_2 = 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0 + 1\cdot2^{-1} = 11{,}5_{10}$

Пример. Перевести число 276,8 из восьмеричной системы счисления в десятичную.

разряды 2 1 0 -1

число $2\ 7\ 6,5_8 = 2\cdot8^2 + 7\cdot8^1 + 6\cdot8^0 + 5\cdot8^{-1} = 190{,}625_{10}$

Пример. Перевести число 1F3 из шестнадцатеричной системы счисления в десятичную.

разряды 2 1 0

число $1\ F\ 3_{16} = 1\cdot16^2 + 15\cdot16^1 + 3\cdot16^0 = 499_{10}$

Перевод из восьмеричной и шестнадцатеричной системы счисления в двоичную

Заменить каждую цифру восьмеричного/шестнадцатеричного числа соответствующим трехразрядным/четырехразрядным двоичным кодом.

Пример. Перевести число $527,1_8$ в двоичную систему счисления.

$$527,1_8 = \underbrace{101}_{5}\ \underbrace{010}_{2}\ \underbrace{111}_{7},\ \underbrace{001}_{1}\ {}_2$$

Пример. Перевести число $1A3,F_{16}$ в двоичную систему счисления.

$$1A3,F_{16} = \underbrace{0001}_{1}\ \underbrace{1010}_{A}\ \underbrace{0011}_{3},\underbrace{1111}_{F}\ {}_2$$

Таблица соответствия

В меню

Перевод из двоичной системы счисления в восьмеричную и шестнадцатеричную

Для перехода от двоичной к восьмеричной/шестнадцатеричной системе счисления поступают следующим образом: двигаясь от запятой влево и вправо, разбивают двоичное число на группы по 3/4 разряда, дополняя при необходимости нулями крайние левую и правую группы. Затем каждую группу из 3/4 разрядов заменяют соответствующей восьмеричной/шестнадцатеричной цифрой.

Пример

$$\underbrace{0\,1\,0}_{2}\,\underbrace{1\,0\,1}_{5}\,\underbrace{0\,0\,1}_{1},\underbrace{1\,0\,1}_{5}\,\underbrace{1\,1\,0}_{6}{}_{2} = 251{,}65_8$$

$$\underbrace{1\,0\,1\,0}_{A}\,\underbrace{1\,0\,0\,1}_{9},\underbrace{1\,0\,1\,1}_{B}\,\underbrace{1\,000}_{8}{}_{2} = A9{,}B8_{16}$$

Таблица соответствия

В меню

Перевод из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно

При переходе из восьмеричной системы счисления в шестнадцатеричную и обратно вначале производится перевод чисел из исходной системы счисления в двоичную, а затем – в конечную систему .

Пример. Перевести число $527,1_8$ в шестнадцатеричную систему счисления.

$$527,1_8 = \underbrace{0001}_{1}\underbrace{0101}_{5}\underbrace{0111}_{7},\underbrace{0110}_{6}\,_2 = 157,6_{16}$$

Пример. Перевести число $1A3,F_{16}$ в восьмеричную систему счисления.

$$1A3,F_{16} = \underbrace{110}_{6}\underbrace{100}_{4}\underbrace{011}_{3},\underbrace{111}_{7}\underbrace{100}_{4}\,_2 = 643,74_8$$

Таблица соответствия

В меню

Арифметические операции в позиционных системах счисления

Правила выполнения основных арифметических операций в любой позиционной системе счисления подчиняются тем же законам, что и в десятичной системе.

При сложении цифры суммируются по разрядам, и если при этом возникает переполнение разряда, то производится перенос в старший разряд. Переполнение разряда наступает тогда, когда величина числа в нем становится равной или большей основания системы счисления.

При вычитании из меньшей цифры большей в старшем разряде занимается единица, которая при переходе в младший разряд будет равна основанию системы счисления

Арифметические операции в позиционных системах счисления

Если при умножении однозначных чисел возникает переполнение разряда, то в старший разряд переносится число кратное основанию системы счисления. При умножении многозначных чисел в различных позиционных системах применяется алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты умножения и сложения записываются с учетом основания системы счисления.

Деление в любой позиционной системе производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе, то есть сводится к операциям умножения и вычитания.

Сложение в позиционных системах счисления

Цифры суммируются по разрядам, и если при этом возникает избыток, то он переносится влево

двоичная система

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ 1\ \ \ 1\ \ \ } \\ 10101 \\ +\ 1101 \\ \hline 100010 \end{array}$$

1+1=2=2+**0**

1+0+0=**1**

1+1=2=2+**0**

1+1+0=2=2+**0**

1+1=2=2+**0**

восьмеричная система

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1\ 1\ \ } \\ 2154 \\ +\ 736 \\ \hline 3112 \end{array}$$

4+6=10=8+**2**

5+3+1=9=8+**1**

1+7+1=9=8+**1**

1+2=3

шестнадцатеричная система

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\ \ 1\ \ } \\ 8D8 \\ +\ 3BC \\ \hline C94 \end{array}$$

8+12=20=16+4

13+11+1=25=16+**9**

8+3+1=12=$\mathbf{C}_{16}$

В меню

Ответ: 100010_2 Ответ: 3112_8 Ответ: $C94_{16}$

Вычитание в позиционных системах счисления

При вычитании чисел, если цифра уменьшаемого меньше цифры вычитаемого, то из старшего разряда занимается единица основания

двоичная система

```
  1   1
 -1 0 1 0 1
    1 0 1 1
 ----------
  0 1 0 1 0
```

1-1=**0**

2-1=**1**

0-0=**0**

2-1=**1**

восьмеричная система

```
  1   1
 -4 3 5 0 6
    5 0 4 2
 ----------
  3 6 4 4 4
```

6-2=**4**

8-4=**4**

4-0=**4**

8+3-5=11-5=**6**

шестнадцатеричная система

```
  1  1
 -C  9  4
  3  B  C
 --------
  8  4  8
```

16+4-12=20-12=**8**

16+8-11=24-11=**13=**$\mathbf{D_{16}}$

11-3=**8**

В меню

Ответ: 1010_2

Ответ: 36444_8

Ответ: 848_{16}

Умножение в позиционных системах счисления

При умножении многозначных чисел в различных позиционных системах применяется алгоритм перемножения чисел в столбик, но при этом результаты умножения и сложения записываются с учетом основания системы счисления

двоичная система

```
      1 1 0 1 1
    x   1 1 0 1
    -----------
        1 1 0 1 1
    1 1 0 1 1
  1 1 0 1 1
-----------------
1 0 1 0 1 1 1 1 1
```

1+1+1=3=2+**1**

1+1+1=3=2+**1**

1+1=2=2+**0**

восьмеричная система

```
   1 6 3
 x   6 3
 -------
   5 3 1
 1 2 6 2
 -------
 1 3 3 5 1
```

3·3=9=8+**1**

6·3=18=16+**2**=8·2+**2**

6·3+1=19=16+**3**=2·8+**3**

6·6+2=38=32+**6**=4·8+**6**

6·1+4=10=8+**2**

В меню

Ответ: 101011111_2

Ответ: 13351_8

Деление в позиционных системах счисления

Деление в любой позиционной системе производится по тем же правилам, как и деление углом в десятичной системе. При этом необходимо учитывать основание системы счисления.

двоичная система

```
 1 0 0 0 1 1 | 1 1 1 0
_  1 1 1 0   |--------
   -------   | 1 0,1
     _1 1 1 0
      1 1 1 0
      -------
            0
```

Ответ: $10{,}1_2$

восьмеричная система

```
 1 3 3 5 1 |  1 6 3
_1 2 6 2   |-------
 -------   | 6 3
   _5 3 1
    5 3 1
    -----
        0
```

Ответ: 63_8

В меню

Представление чисел в компьютере

Числа в компьютере могут храниться в формате с фиксированной запятой – целые числа и в формате с плавающей запятой – вещественные числа.

Целые числа без знака занимают в памяти один или два байта.

Целые числа со знаком занимают в памяти компьютера один, два или четыре байта, при этом самый левый (старший) разряд содержит информацию о знаке числа

Применяются три формы записи (кодирования) целых чисел со знаком: прямой код, обратный код и дополнительный код.

Вещественные числа хранятся и обрабатываются в компьютере в формате с плавающей запятой. Этот формат базируется на экспоненциальной форме записи, в которой может быть представлено любое число

Представление целых чисел в компьютере

Целые числа в компьютере могут представляться со знаком или без знака.

Целые числа без знака занимают в памяти один или два байта.

Формат числа в байтах	Запись с порядком	Обычная запись
1 2	$0 \ldots 2^{8} - 1$ $0 \ldots 2^{16} - 1$	0 …255 0 …65535

Пример. Число $72_{10} = 1001000_2$ в однобайтовом формате

0	1	0	0	1	0	0	0

Представление целых чисел в компьютере

Целые числа со знаком занимают в памяти компьютера один, два или четыре байта, при этом самый левый (старший) разряд содержит информацию о знаке числа. Знак «плюс» кодируется нулем, а «минус» - единицей

Формат числа в байтах	Запись с порядком	Обычная запись
1	$-2^{7} \ldots 2^{7}-1$	-128 …127
2	$-2^{15} \ldots 2^{15}-1$	-32 768 …32 767
4	$-2^{31} \ldots 2^{31}-1$	- 2 147 483 648 …2 147 483 647

Представление целых чисел в компьютере

В компьютерной технике применяются три формы записи (кодирования) целых чисел со знаком: **прямой** код, **обратный** код и **дополнительный** код.

Положительные числа в прямом, обратном и дополнительных кодах изображаются одинаково – двоичными кодами с цифрой 0 в знаковом разряде.

Пример. Число $62_{10} = 111110_2$ в однобайтовом формате

0	0	1	1	1	1	1	0

Знак числа

Представление целых чисел в компьютере

Отрицательные числа в прямом, обратном и дополнительных кодах имеют разное изображение..

Прямой код. В знаковый разряд помещается цифра 1, а в разряды цифровой части числа – двоичный код его абсолютной величины.

Пример. Число $-57_{10} = -111001_2$ в однобайтовом формате

прямой код

1	0	1	1	1	0	0	1

Знак числа

Представление целых чисел в компьютере

Обратный код. Для образования обратного кода отрицательного двоичного числа необходимо в знаковом разряде поставить 1, а в цифровых разрядах единицы заменить нулями, а нули - единицами.

Пример. Число $-57_{10} = -111001_2$ в однобайтовом формате

обратный код

1	1	0	0	0	1	1	0

Знак числа

Представление целых чисел в компьютере

Дополнительный код отрицательного числа получается образованием обратного кода с последующим прибавлением единицы к его младшему разряду

Пример. Число $-57_{10} = -111001_2$ в однобайтовом формате

дополнительный код

1	1	0	0	0	1	1	1

Знак числа

Представление целых чисел в компьютере

Отрицательные десятичные числа при вводе в компьютер автоматически преобразуются в обратный или дополнительный код и в таком виде хранятся, перемещаются и участвуют в операциях.
При выводе таких чисел из компьютера происходит обратное преобразование в отрицательные десятичные числа

В меню

Представление вещественных чисел в компьютере

Любое число N в системе счисления с основанием *q* можно записать в виде $N = m \cdot q^{p}$, где M называется **мантиссой** числа, а *p* – **порядком**. Такой способ записи чисел называется **представлением числа с плавающей точкой**

Мантисса должна быть правильной дробью, первая цифра которой отлична от нуля.

Данное представление вещественных чисел называется нормализованным.
Мантиссу и порядок *q*-ичного числа записывают в системе счисления с основанием *q*, а само основание – в десятичной системе

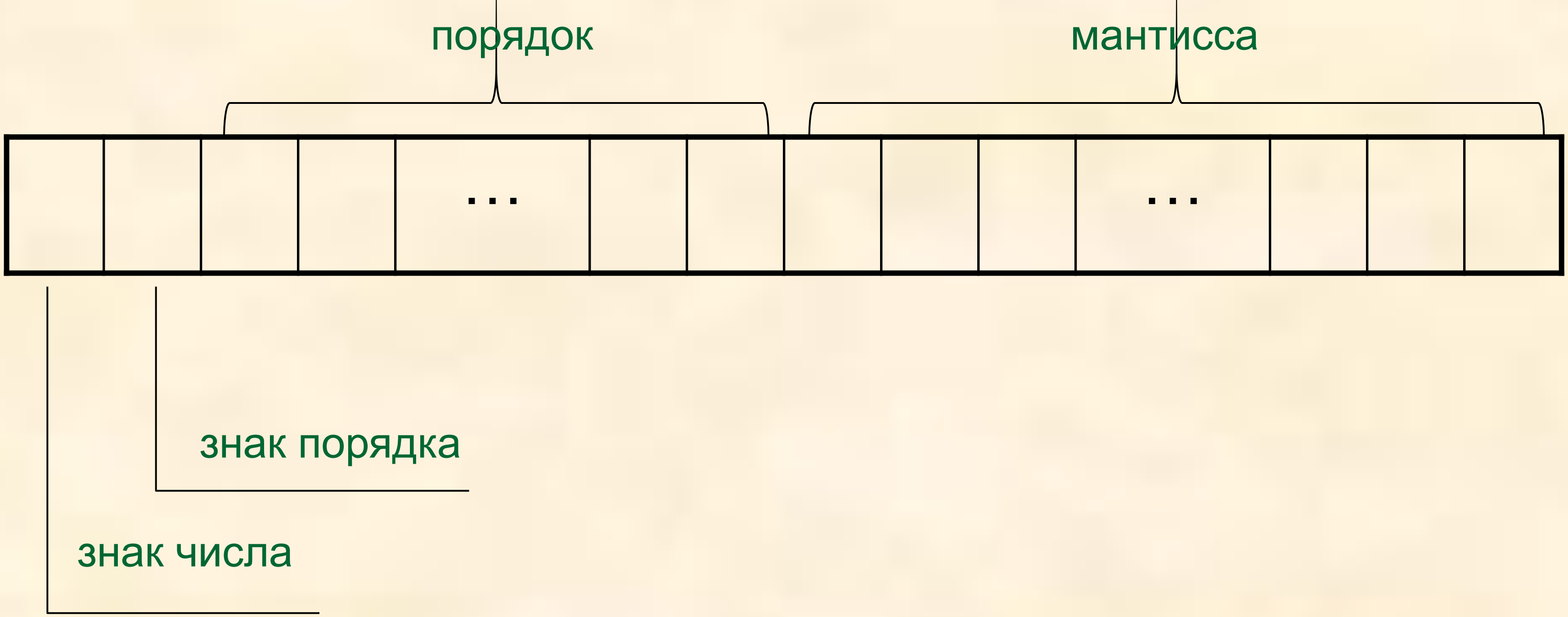
Представление вещественных чисел в компьютере

Форматы вещественных чисел

Формат числа	Диапазон абсолютных значений	Размер в байтах
одинарный	$10^{-45} \dots 10^{38}$	4
вещественный	$10^{-39} \dots 2^{38}$	6
двойной	$10^{-324} \dots 10^{308}$	8
расширенный	$10^{-4932} \dots 10^{4932}$	10

Представление вещественных чисел в компьютере

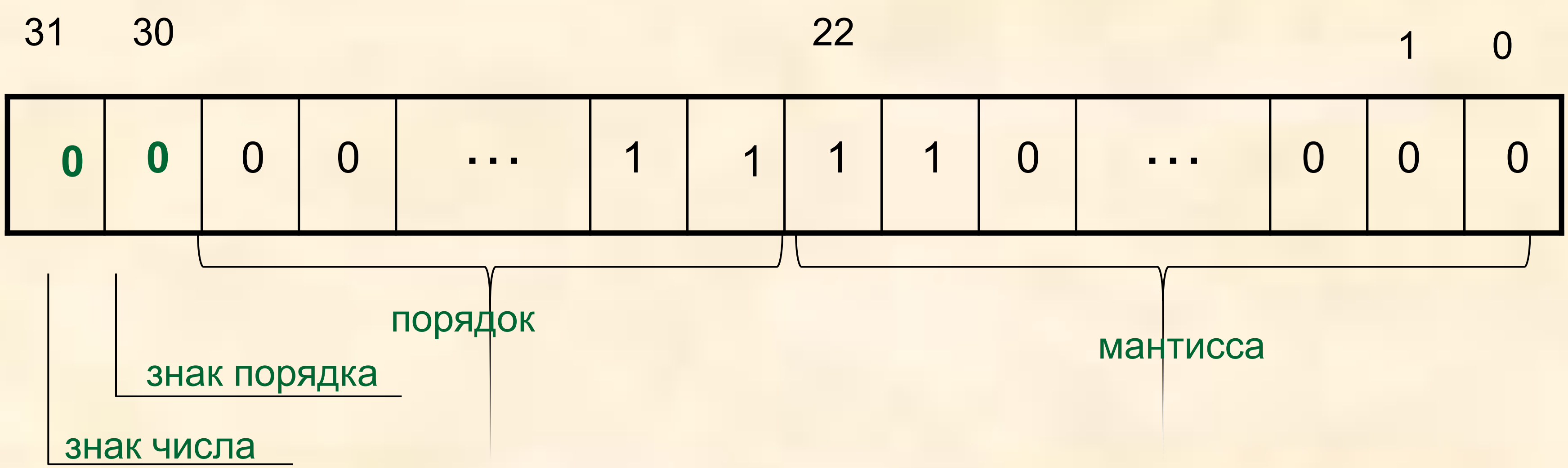
При хранении числа с плавающей точкой отводятся разряды для мантиссы, порядка, знака числа и знака порядка



Представление вещественных чисел в компьютере

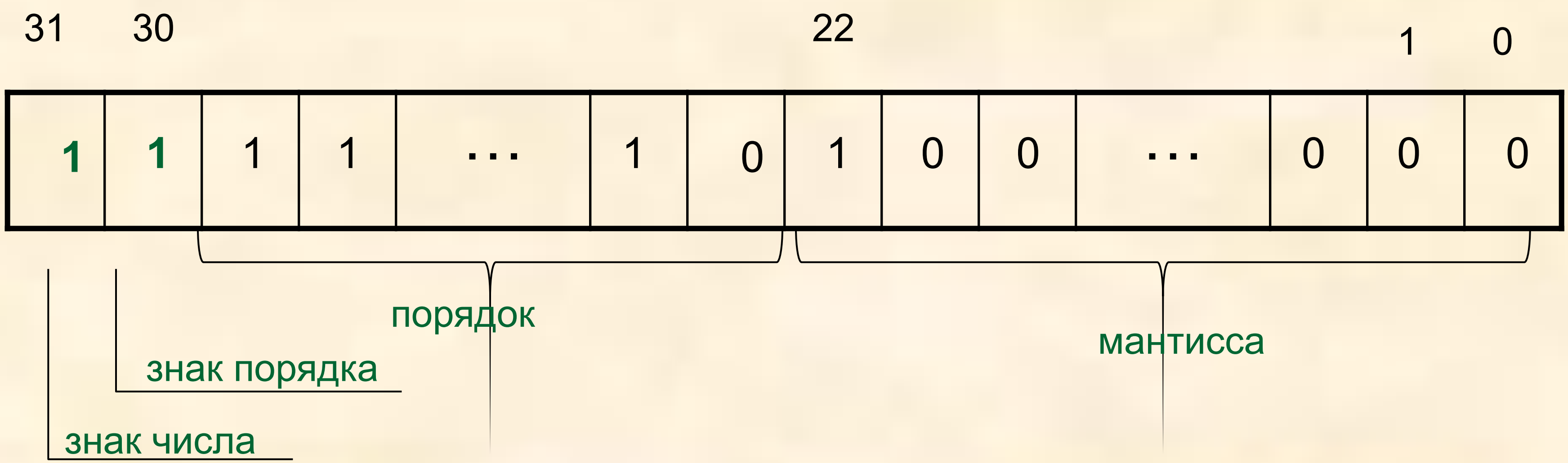
Пример. Число $6{,}25_{10}$ записать в нормализованном виде в четырехбайтовом формате с семью разрядами для записи порядка

$6{,}25_{10} = 110{,}01_2 = 0{,}11001 \cdot 2^{11}$



Представление вещественных чисел в компьютере

Пример. Число $-0{,}125_{10}$ записать в нормализованном виде в четырехбайтовом формате с семью разрядами для записи порядка $-0{,}125_{10} = -0{,}001_2 = 0{,}1 \cdot 2^{10}$ (отрицательный порядок записан в дополнительном коде)



В меню