Решение тригонометрических уравнений.

Учитель математики
Лукьянова Е.Ю.
МБОУ «Школа №103»

Что будем изучать:

- 1. Что такое тригонометрические уравнения?
  2. Простейшие тригонометрические уравнения.
  3. Два основных метода решения тригонометрических уравнений.
  4. Однородные тригонометрические уравнения.
  5. Примеры.

Что такое тригонометрические уравнения?

- Ребята, мы с вами изучили уже арксинуса, арккосинус, арктангенс и арккотангенс. Теперь давайте посмотрим на тригонометрические уравнения в общем.
- Тригонометрические уравнения – уравнения в котором переменная содержится под знаком тригонометрической функции.

Повторим вид решения простейших тригонометрических уравнений:

1)Если $|a| \leq 1$, то уравнение $\cos(x) = a$ имеет решение:

$x = \pm \arccos(a) + 2\pi k$

2) Если $|a| \leq 1$, то уравнение $\sin(x) = a$ имеет решение: $x=((-1)^n)\arcsin(a)+ \pi n$.

3) Если $|a| > 1$, то уравнение $\sin(x) = a$ и $\cos(x) = a$ не имеют решений 4) Уравнение $tg(x)=a$ имеет решение: $x=arctg(a)+ \pi k$

5) Уравнение $ctg(x)=a$ имеет решение: $x=arcctg(a)+ \pi k$

Для всех формул k- целое число

Простейшие тригонометрические уравнения имеют вид: T(kx+m)=a, T- какая либо тригонометрическая функция.

- **Пример.**

  Решить уравнения: а) sin(3x)= √3/2

  Решение:

  а) Обозначим 3x=t, тогда наше уравнение перепишем в виде:

  sin(t)=1/2.

  Решение этого уравнения будет: t=((-1)^n)arcsin(√3 /2)+ πn.

  Из таблицы значений получаем: t=((-1)^n)×π/3+ πn.

  Вернемся к нашей переменной: 3x =((-1)^n)×π/3+ πn,

  тогда x= ((-1)^n)×π/9+ πn/3

  Ответ: x= ((-1)^n)×π/9+ πn/3, где n-целое число. (-1)^n – минус один в степени n.

Решение тригонометрических уравнений сводится к двум задачам:

1. Решение уравнения
2. Отбор корней

Задачи делятся на следующие категории:

- Уравнения, сводящиеся к разложению на множители.
- Уравнения, сводящиеся к виду cos*x*=*a*. sin*x*=*a* .tg*x*=*a*.
- Уравнения, решаемые заменой переменной.
- Уравнения, требующие дополнительного отбора корней из-за иррациональности или знаменателя.

Уравнения, сводящиеся к разложению на множители

- [Формулы приведения]()
- [Синус, косинус двойного угла]()
- $\sin(\pi 2 + x) = \cos x$

- $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

Решите уравнение $\sin 2x = \sin(\pi 2 + x)$ Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-7\pi/2, -5\pi/2]$

- Используем формулы приведения:
- $\sin(\pi 2 + x) = \cos x$
- Тогда уравнение примет вид:
- $\sin 2x = \cos x$
- Дальше используем формулы синус двойного угла:
- $\sin 2x = 2\sin x \cos x$
- Тогда уравнение примет следующую форму:
- $2\sin x \cos x = \cos x$

$2\sin x\cos x - \cos x = 0$

$2\sin x\cos x - \cos x = 0$

Разложили на множители $\cos x(2\sin x - 1) = 0$

Теперь решаем:

$\cos x = 0$ или $2\sin x = 1$

Первое уравнение имеет корни:

$x = \pi/2 + \pi n$.

А второе:

$x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$

Теперь нужно отобрать корни:

Промежуток : $[-7\pi/2, -5\pi/2]$

Так как наш промежуток – целиком отрицательный, то нет нужды брать неотрицательные n, все равно они дадут неотрицательные корни.

Вначале поработаем с первой серией: $x=\pi/2+\pi n$.

Возьмем:

n=−1, тогда $x=-\pi/2$ не принадлежит промежутку.
Пусть n=−2, тогда x=−3π/2 не принадлежит промежутку..
Пусть n=−3, тогда x=π/2−3π=−2,5π-первый корень который принадлежит промежутку .
Пусть n=−4, тогда x=π2−4π=−3,5π корень принадлежит промежутку .
Пусть n=−5,$x=2\pi-5\pi=-4{,}5\pi$ не принадлежит промежутку.
Так что из первой серии промежутку [−3,5π; −2,5π] принадлежат 2 корня: −2,5π, −3,5π.

Работаем со второй серией -возводим (−1)в степень по правилу:
(−1)нечетная степень=−1
(−1)четная степень=1

$n=0$, $x=6\pi$ – не принадлежит промежутку.

n=−1, x= −π6−π=−7π/6– не принадлежит промежутку.

n=−2, x= π6−2π=−11π/6– не принадлежит промежутку.

n=−3, x= −π6−3π=−19π/6 **–** корень принадлежит промежутку.

n=−4, x=π6−4π=−23π/6 – не принадлежит промежутку.

Таким образом, моему промежутку принадлежат вот такие корни:

2,5π, −3,5π, −19π/6

Решить уравнение: $3tg\ x^2 + 2tg\ x - 1 = 0$

- Решение:
  Для решения нашего уравнения воспользуемся методом ввода новой переменной, обозначим: $t=tg(x)$.

  В результате замены получим: $3t^2 + 2t - 1 = 0$

  Найдем корни квадратного уравнения: $t=-1$ и $t=1/3$

  Тогда $tg(x)=-1$ и $tg(x)=1/3$, получили простейшее тригонометрическое уравнение, найдем его корни.

  $x=arctg(-1) + \pi k = -\pi/4+\pi k$; $x=arctg(1/3) + \pi k$.

  Ответ: $x= -\pi/4+\pi k$; $x=arctg(1/3) + \pi k$.

Решить уравнение: $2\sin^2(x) + 3\cos(x) = 0$

- Воспользуемся тождеством: $\sin^2(x) + \cos^2(x)=1$

  Наше уравнение примет вид: $2-2\cos^2(x) + 3\cos(x) = 0$

  $2\cos^2(x) - 3\cos(x) - 2 = 0$

  введем замену $t=\cos(x)$: $2t^2 - 3t - 2 = 0$

  Решением нашего квадратного уравнения являются корни: $t=2$ и $t=-1/2$

  Тогда $\cos(x)=2$ и $\cos(x)=-1/2$.

  Т.к. косинус не может принимать значения больше единицы, то $\cos(x)=2$ не имеет корней.

  Для $\cos(x)=-1/2$: $x= \pm \arccos(-1/2) + 2\pi k$; $x= \pm 2\pi/3 + 2\pi k$

  Ответ: $x= \pm 2\pi/3 + 2\pi k$

Задачи для самостоятельного решения.

- **Решить уравнения:** $\sin(3x) = \sqrt{3}/2$. **И найти все корни на отрезке** $[\pi/2; \pi]$.
- **Решить уравнение:** $ctg^2(x) + 2ctg(x) + 1 = 0$
- **Решить уравнение:** $3\sin^2(x) + \sqrt{3}\sin(x)\cos(x) = 0$
- **Решить уравнение:**

$3\sin^2(3x) + 10\sin(3x)\cos(3x) + 3\cos^2(3x) = 0$

- **Решить уравнение:** $\cos^2(2x) - 1 - \cos(x) = \sqrt{3}/2 - \sin^2(2x)$