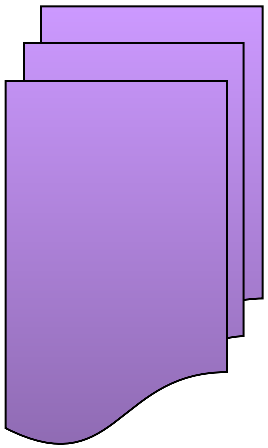
Системы уравнений

Способы решения



Системы уравнений с двумя переменными.

Определение: ***Решением системы уравнений с двумя переменными*** **называется пара значений переменных, обращающая каждое уравнение системы в верное равенство.**

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что решений нет.

Способы решения:

- *Способ подстановки*
- *Способ сложения*
- *Графический способ*
- *Способ замены*

Способ подстановки

1. Выразить из какого-нибудь уравнения системы одну переменную через другую.
2. Подставить в другое уравнение системы вместо этой переменной полученное выражение.
3. Решить получившееся уравнение с одной переменной.
4. Найти соответствующее значение второй переменной.

Пример:

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2y-5x=3 \end{cases}$ (1)

1. Выразим из первого уравнения ***y*** через ***x***: ***y=7-3x***.

2. Подставив во второе уравнение вместо ***y*** выражение ***7-3x***, получим систему: $\begin{cases} 3x+y=7 \\ 2(7-3x)-5x=3 \end{cases}$ (2)

3. В системе (2) второе уравнение содержит только одну переменную. Решим это уравнение: ***14-6x-5x=3,***

-11x= -11,

x=1.

4. Подставим в равенство ***y=7-3x*** вместо ***x*** число ***1***, найдём соответствующее значение ***y***: ***y=7-3•1,***

y=4.

Пара (1;4) – решение системы (1).

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x+2y=7 \\ 2x-3y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{x}{5}=1-\dfrac{y}{15} \\ 2x-5y=0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x+2y=0 \\ 4y=-9x+10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+5y=6 \\ x^2+3y=4 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^3+y^3=35 \\ x+y=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 5y+8(x-3y)=7x-12 \\ 9x+3(x-9y)=11y+46 \end{cases}$

Способ сложения

1. Умножьте почленно уравнения системы, подбирая множители так, чтобы коэффициенты при одной из переменных стали противоположными числами.
2. Сложите почленно левые и правые части уравнений системы.
3. Решите получившееся уравнение с одной переменной.
4. Найдите соответствующее значение второй переменной.

Пример:

Решим систему: $\begin{cases} 5x + 11y = 8 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$

1. Умножим все члены первого уравнения на ***-2***:

$$\begin{cases} -10x - 22y = -16 \\ 10x - 7y = 74 \end{cases}$$

2. Почленно сложим и получим уравнение с одной переменной: ***-29y=58***.

3. Из этого уравнения находим, что

y=58/(-29)= -2.

4. Подставив во второе уравнение вместо ***y*** число ***-2***,

Найдём значение ***x***: ***10x-7*(-2)=74***,

10x=60,

x=6.

Ответ: ***x=6***, ***y= -2***

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 5x + 2y = 9 \\ 7x - 3y = 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 9y + 8x = -2 \\ 5x = -4y - 11 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0,5 + 0,2y = 7 \\ \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{10}y = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{5} - \dfrac{y}{3} + \dfrac{1}{3} = 0 \\ 4x - 5y - 10 = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x = 4y - 7 \\ \dfrac{1-3x}{4} = \dfrac{4-2y}{3} \end{cases}$

6. $\begin{cases} 4(2x - y + 3) - 3(x - 2y) = 57 \\ 3(3x - 4y + 3) + 4(4x - 2y) = 84 \end{cases}$

Графический способ

1. Построить график функции, заданной первым уравнением системы.
2. Построить график функции, заданной вторым уравнением системы.
3. Определить координаты точек пересечения графиков функций.

Пример:

Решим систему уравнений: $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-y=-9 \end{cases}$

1.Построим график линейной функции

$$\boldsymbol{2x+3y=5.}$$

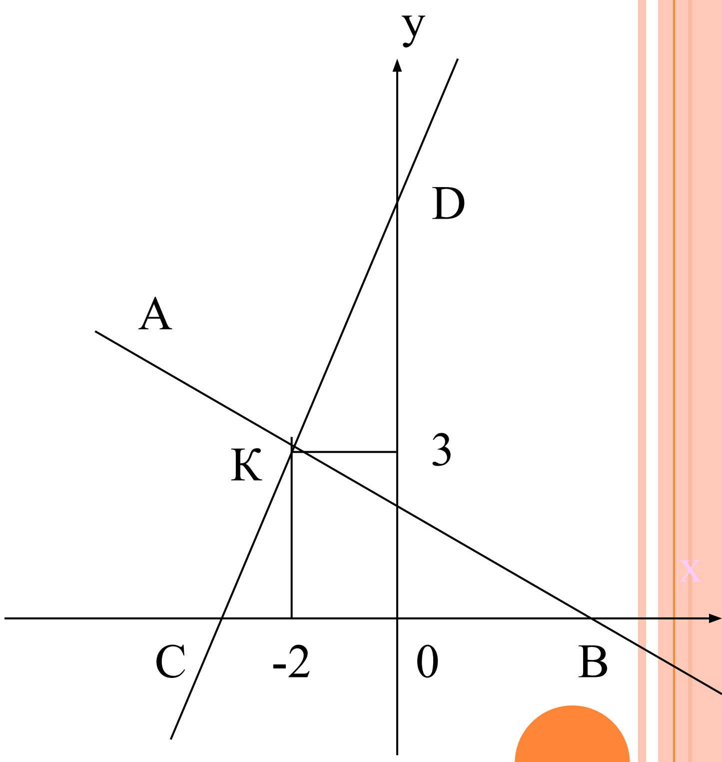
Её графиком является прямая **AB**.

2.Построим график линейной функции ***3x-y=-9***.

Её графиком является прямая **CD**.

3.Графики пересекаются в точке **K(-2;3).** Значит, система имеет Единственное решение:

x= -2, y=3



Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 3x + y = 7 \\ 2y - 5x = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y - 2x = 1 \\ 6x - 2y = 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7x - y = 1 \\ y - 2x = 4 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 4y + 3x = 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 9x + 4y = 10 \\ 7x + 2y = 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} -2(x - y) + 16 = 3(y + 7) \\ 6x - (x - 5) = -8 - (y + 1) \end{cases}$

Способ замены

Пример: Решим систему $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ x + y = 28 \end{cases}$

Сделаем замену: $\sqrt[3]{x} = a, \sqrt[3]{y} = b$

Получим систему: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^3 + b^3 = 28 \end{cases}$

Разложим левую часть второго уравнения на множители:

$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)$ - и подставим в него из первого уравнения $a + b = 4$. Тогда получим систему, равносильную второй: $\begin{cases} a + b = 4 \\ a^2 - ab + b^2 = 7 \end{cases}$

Подставляя во второе уравнение значение b, найденное из первого $b = 4 - a$ приходим к уравнению $a^2 - a(4-a) + (4-a)^2 = 7$, т.е. $a^2 - 4a + 3 = 0$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $a_1 = 1$ и $a_2 = 3$.

Соответствующие значения b таковы: $b_1 = 3$ и $b_2 = 1$.

Переходим к переменным x и y. Получаем: $\sqrt[3]{x} = a_1$, т.е. $x_1 = a_1^3 = 1$,

$y_1 = b_1^3 = 27$, $x_2 = a_2^3 = 27$, $y_2 = b_2^3 = 1$.

Ответ:(1;27), (27;1).

Решите системы уравнений:

1. $$\begin{cases} 2\sqrt{x}-\sqrt{y}=5 \\ \sqrt{x}\sqrt{y}=3 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=6 \\ x-y=12 \end{cases}$$

3. $$\begin{cases} \sqrt{6+x}-3\sqrt{3y+4}=-10 \\ 4\sqrt{3y+4}-5\sqrt{6+x}=6 \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3} \\ xy=9 \end{cases}$$

5. $$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=-3 \\ xy=8 \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} \sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y}+\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y}=12 \\ xy=64 \end{cases}$$

Системы показательных уравнений

Пример: Решим систему уравнений $\begin{cases} 2^x + 2^y = 12 \\ 3^{2x-y} = 3 \end{cases}$

Из второго уравнения системы находим *2x-y=1*, откуда *y=2x-1*.

Подставляя вместо у в первое уравнение выражение *2x-1*

получим $2^x + 2^{2x-1} = 12$, откуда $2^x + \frac{1}{2} \cdot 2^{2x} = 12$.

Обозначим $2^x = a$, получим квадратное уравнение

$a^2 + 2a - 24 = 0$. Находим корни этого уравнения:

$$a_1 = -6; a_2 = 4$$

Уравнение замены $2^x = -6$ решений не имеет. Корнем уравнения $2^x = 4$ является число ***x=2***.

Соответствующее значение *y=3*.

Ответ:(2;3).

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x + y = 9 \\ 2^x - 2^y = 16 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (1/5)^{4x-y} = 25 \\ 7^{9x-2} = \sqrt{7} \end{cases}$

3. $\begin{cases} 6^{x+y} = 216 \\ 3^x + 3^y = 12 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2^{6y-1-x} = 1 \\ 25 = (\sqrt{5})^{x-y} \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4^x - 4^y = 63 \\ 4^y \cdot 4^x = 64 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$

Системы логарифмических уравнений

Пример: Решим систему уравнений $\begin{cases} \lg(y-x)=\lg 2 \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y \end{cases}$

Первое уравнение системы равносильно уравнению **y-x=2**, а второе – уравнению $\frac{x}{16}=\frac{3}{y}$, причём $x>0$ и $y>0$. Подставляя

$y=x+2$ в уравнение $\frac{x}{16}=\frac{3}{y}$, получим $x(x+2)=48$, откуда

$x^2+2x-48=0$,т.е. $x=-8$ или $x=6$.Но так как $x>0$, то $x=6$ и тогда $y=8$. Итак, данная система уравнений имеет одно решение: $x=6$, $y=8$.

Ответ: (6;8).

Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} x+y=34 \\ \log_2 x+\log_2 y=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \log_4(x+y)=2 \\ \log_3 x+\log_3 y=2+\log_3 7 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)=2 \\ \log_3(x-y)=2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_9 x-\log_3 y=0 \\ x^2-5y^2+4=0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \log_2 y+2\log_4 x=4 \\ \log_2(x^2+y^2)=5 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)=1+\lg 13 \\ \lg(x+y)=\lg(x-y)+\lg 8 \end{cases}$